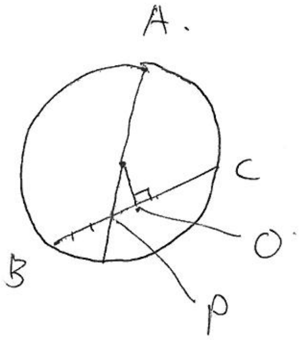
* 2019년 7월 시행 교육청 고3 수학 가형 29번.

중심이 O 이고 반지름이 1인 원 위의 세 점 A, B, C. $x>0$.

$x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 이 최대일 때 $\triangle ABC$의 넓이?



1) $\dfrac{5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{8}=-\dfrac{x}{8}\overrightarrow{OA}=\dfrac{x}{8}\overrightarrow{AO}$ ∴

$\overline{BC}$를 3:5로 내분하는 점을 P라 하자.

즉, $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{AO}$는 실수배의 관계다.

2) $x\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}=-3\overrightarrow{OC}$ 의 양변을 제곱하면 ($\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$이 최대일 때를 찾으려면)

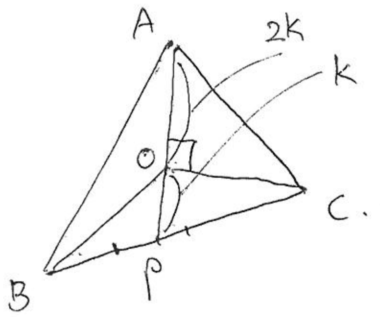
$x^2+25+10x\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9$. ∴ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{-x^2-16}{10x}$

($x>0$) 이 식을 미분해서 최대일 때를 찾아도 되는데, 식이 $-\left(\dfrac{x}{10}+\dfrac{16}{10x}\right)$ 이므로

전체가 최대가 되려면 ( ) 안이 최소일 때이므로 $x=4$. ($x>0$, 최솟값은 $\frac{4}{5}$).

3) ∴ $4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 이므로 $4\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}=-5\overrightarrow{OB}$ 에서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

따라서 $\triangle ABC$의 형태는 다음과 같다.



$\triangle AOC=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

$\triangle APC=\frac{3}{2}\times AOC\ (\triangle AOC)$

$\triangle ABC=\frac{8}{\cancel{3}5}APC\ (\triangle APC)=S$

∴ $\triangle ABC=\frac{8}{5}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$. ∴ $50S=60$//

→ 내분관계가 결정되면 (즉, $\overline{OP}:\overline{OA}=1:2$, $\overline{BP}:\overline{PC}=3:5$) 세 점의 위치가

고정된다.