* 2019년 7월 시행 교육청 고3 수학 가형 30번.

$x=a\ (a>0)$ 에서 극대인 4차함수 $f(x)$. $\rightarrow f'(a)=0,\quad f(\alpha_n)=0$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)} & (f(x)\neq 0,\ x\neq\alpha)\\[2mm] \dfrac{7\pi^2}{128} & (f(x)=0,\ x=\alpha)\end{cases}$$

↓

미.가.

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi\sin\pi x\cdot f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2} & (f(x)\neq 0,\ x\neq\alpha)\\[2mm] g'(\alpha) & (f(x)=0,\ x=\alpha)\end{cases}$$

① $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x}\times\frac{1}{f(x)}$

② $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{\pi\sin\pi x\cdot f(x)-(1-\cos\pi x)\cdot f'(x)}{\{f(x)\}^2}=g'(\alpha)$.

(가) $g'(0)\neq 0$, $g'(2a)\neq 0$

(나) $g'(a)=0$

$g(1)=\dfrac{2}{7}\rightarrow\dfrac{2}{7}\neq\dfrac{7\pi^2}{128}$ 이므로 $g(1)=\dfrac{2}{f(1)}$. $\therefore f(1)=7$.

① 에서 $f(\alpha)=0$ 이므로 $1-\cos\pi\alpha=0$. $\therefore$ α는 짝수인 정수.

② 에서

②-1. $\alpha=a$라면 $1-\cos\pi a=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\pi\sin\pi a}{f(a)_{(=0)}}=0=g'(a)$. $\therefore$ a는 양의 정수.

(과정 계산로)

②-2. $\alpha\neq a$라면 $f'(a)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\pi\sin\pi a}{f(a)_{(\neq 0)}}=0=g'(a)$. $\therefore$ a는 양의 정수.

(과정 단로)

따라서 $\alpha=a$이든 $\alpha\neq a$이든 α는 짝수인 정수, a는 양의 정수이다.

③ $g'(0)\neq 0$. ③-1. $\alpha\neq 0$, $f(0)\neq 0$. $\dfrac{0}{\{f(0)\}^2}=0\rightarrow$ 모순.

③-2. $\alpha=0$, $f(0)=0$.

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin\pi x\, f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}\ \&\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\frac{7\pi^2}{128}$$

$\displaystyle\therefore\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\pi x}{(\pi x)^2}\times\frac{1}{1+\cos\pi x}\times\frac{\pi^2x^2}{f(x)}\Rightarrow f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다. $f(x)=x^2\cdot h(x)$

$\therefore\dfrac{\pi^2}{2h(0)}=\dfrac{7\pi^2}{128}$. $\quad\therefore h(0)=\dfrac{64}{7}$.

$f(x)$가 $x=0$에서 극소이므로 $f(a)>0$. $\therefore$ 위의 정리에서 $\alpha\neq a$.

④ $g'(2a)\neq 0$. ④-1. $\alpha\neq 2a$, $f(2a)\neq 0$. $g'(2a)=\dfrac{\pi\sin\pi 2a\cdot f(2a)-(1-\cos\pi 2a)\cdot f'(2a)}{\{f(2a)\}^2}$

a가 정수이므로 $g'(2a)=0$. → 모순.

∴ ④-2. $\alpha=2a$, $f(2a)=0$.

따라서 방정식 $f(x)=0$의 근은 $0, 0, 2a, \alpha$(미정) 라 할 때

$f(x)=kx^2(x-2a)(x-\alpha)$, $k>0$ (∵ $f(x)$는 $x=0$에서 극소, $x=a$에서 극대)

$f'(x)=2kx(x-2a)(x-\alpha)+kx^2(x-\alpha)+kx^2(x-2a)$

$f'(0)=0$, $f'(a)=0$. ∴ $f'(a)=2ka(-a)(a-\alpha)+ka^2(a-\alpha)+ka^2(-a)$

$=ka^2(-2a+2\alpha+a-\alpha-a)=ka^2(\alpha-2a)=0$. ∴ $\alpha=2a$.

따라서 $f(x)=kx^2(x-2a)^2$.

⑤ $f(1)=7$. ∴ $k(1-2a)^2=7$.

⑥ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\pi x}{kx^2(x-2a)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\pi x}{(\pi x)^2}\times\frac{1}{1+\cos\pi x}\times\frac{\pi^2x^2}{kx^2(x-2a)^2}$

$=\dfrac{\pi^2}{2k\times 4a^2}=\dfrac{7\pi^2}{128}$. ∴ $\dfrac{1}{ka^2}=\dfrac{7}{16}$. ∴ $k=\dfrac{16}{7a^2}$.

⑤, ⑥ 에서 $\dfrac{16}{7a^2}\times(1-2a)^2=7$. ∴ $(1-2a)^2=\dfrac{7^2a^2}{16}$.

∴ $1-2a=\dfrac{7a}{4}$ or $-\dfrac{7a}{4}$. ∴ $a=4$ (∵ a는 양의 정수. ∴ $a\neq\dfrac{4}{15}$).

$f(-1)\neq 0$, $g(-1)=\dfrac{2}{f(-1)}$. $f(x)=\dfrac{1}{7}x^2(x-8)^2$. ∴ $f(-1)=\dfrac{81}{7}$.

∴ $g(-1)=\dfrac{14}{81}$ //