* 2020 학년도 대수능 수학 가형 30번.

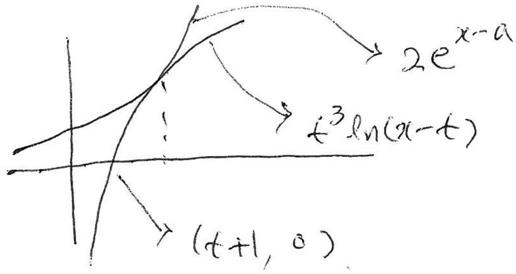
$(t>0)$ $y_1 = t^3 \ln(x-t)$ → $\ln x$ 그래프를 x축에 대한 평행이동과 y축에 대한

$y_2 = 2 \cdot e^{x-a}$ 닮음변환(실수배)의 합성으로 볼 수 있다.

(⇒ y_1은 정의역에서 항상 위로 볼록이다).

∴ y_1과 y_2가 오직 한 점에서 만나려면

오른쪽 그림과 같은 경우이다.



교점의 x좌표를 k ($k>t+1$)라 하면

① $t^3 \ln(k-t) = 2e^{k-a}$

② $\dfrac{t^3}{k-t} = 2e^{k-a}$

$y_1' = \dfrac{t^3}{x-t}$

$y_2' = 2e^{x-a}$

① ⇒ 공통교점

② ⇒ 공통접선.

①과 ②에 의해 $\ln(k-t) = \dfrac{1}{k-t}$ ..... ③

③을 만족시키는 a가 $f(t)$가 된다. ∴ $k-t = p$ (상수)

① 에서 $e^{k-a} = \dfrac{t^3 \ln(k-t)}{2}$ 이고,

$k-a = k-f(t) = \ln(t^3 \ln p) - \ln 2$ $(\because k-t=p)$

$\therefore f(t) = k - \ln(t^3 \ln p) + \ln 2 = p + t - \ln(t^3 \ln p) + \ln 2$

$\therefore f'(t) = 1 - \dfrac{3t^2 \ln p}{t^3 \cdot \ln p} = 1 - \dfrac{3}{t}$ $(t>0)$

$\therefore \{f'(\tfrac{1}{3})\}^2 = (-8)^2 = 64$ //

* 2020학년도 대수능 수학 나형 30번.

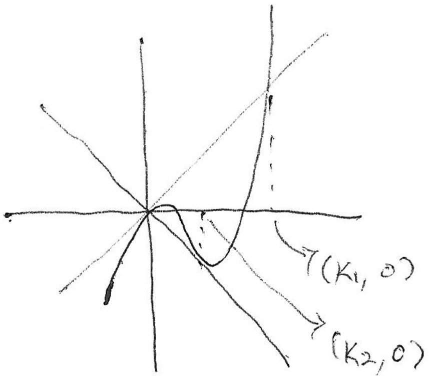
$f(x) = ax^3 + \cdots$, $(a>0)$, $f(0)=0$, $f'(1)=1$

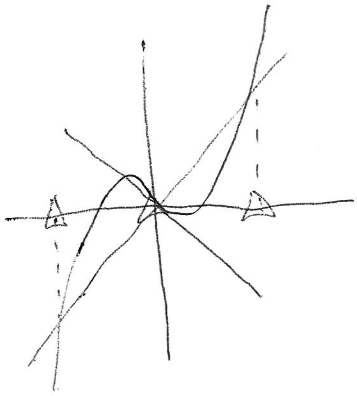
(가) 방정식 $f(x)-x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

} 각각 실근의 개수는 3이다.

why?

조건을 만족시키는 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.





이와 같은 개형은 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(△ → 3개)

$\therefore f(x) - x = g(x) = ax^2(x-k_1)$, $f'(x)-1 = g'(x)$ 에서

$g'(1) = 0$ 이므로 $g'(x)\big|_{x=1} = 2ax(x-k_1) + ax^2\big|_{x=1} = 2a - 2ak_1 + a = 0$.

$\therefore k_1 = \frac{3}{2}$ $(\because a>0)$ $\therefore f(x) - x = g(x) = ax^2(x-\frac{3}{2}) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2$

$f(x) + x = h(x) = ax(x-k_2)^2 = ax(x^2 - 2k_2x + k_2^2)$

$= ax^3 - 2k_2 \cdot ax^2 + ak_2^2x$ .... ①

$h(x) = g(x) + 2x = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2x$. .... ②

① = ② 이므로 $k_2 = \frac{3}{4}$. $ak_2^2 = 2$ 이므로 $a = 2 \times \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$.

따라서 $f(x) = \frac{32}{9}x^2(x-\frac{3}{2}) + x$ 에서 $f(3) = 32 \times \frac{3}{2} + 3 = 51$

* $k_1 = \frac{3}{2}$ 을 찾은 뒤 3차함수의 근의 특성을 이용하고 대칭기준(변곡)을 이용하는 것도 가능.

* 2020학년도 대수능 수학 가형 21번.

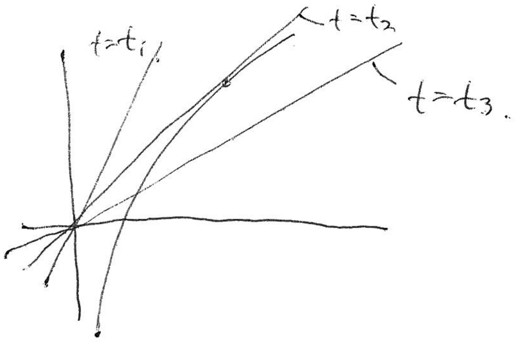
$y_1 = e^x$

$f(x) = e^t(x-t) + e^t = e^t x - te^t + e^t$ (1차 함수).

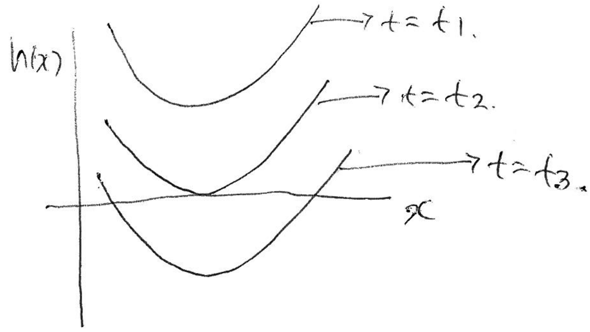
$y_2 = |f(x) + k - \ln x| = |(e^t x - \ln x) + \underbrace{k - te^t + e^t}_{\text{상수}}|$

y_2가 미분가능하도록 하는 k의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, $\int_a^b g(t)dt = m$ $(a<b)$

$e^t x - \ln x = h(x)$라 하면, $y_2 = |h(x) + ㅈ|$ (단, ㅈ는 상수)



$\Rightarrow$



$\therefore$ $h(x) + ㅈ \geq 0$이면 y_2가 미분가능하므로 $(h(x)$의 최솟값$) + ㅈ \geq 0$

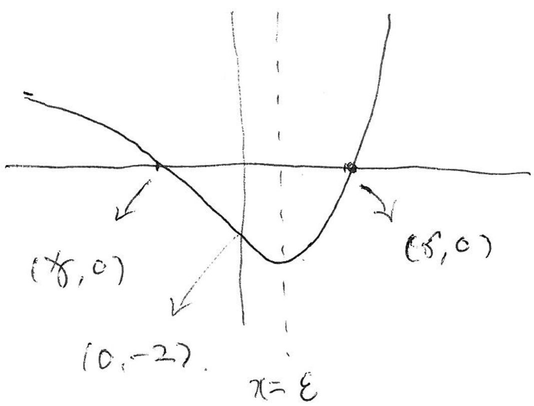
$h'(x) = e^t - \frac{1}{x}$ 에서 $(x = e^{-t})$일 때 $h'(x) = 0$이고 극값을 가진다. $(\ominus \to \oplus)$

$\therefore$ $h(x)$의 최솟값은 $h(e^{-t}) = 1+t$.

따라서 $1+t+k-te^t+e^t \geq 0$일 때 y_2가 미분가능하고,

$k = (t-1)e^t - 1 - t$를 만족시키는 k가 $g(t)$가 된다.

$\therefore$ $g(t) = (t-1)e^t - 1 - t$라 하면 $g'(t) = te^t - 1$이고 개형은 다음과 같다.



* $g'(t)$ 없이 $g(t)$의 개형을 추론할 것.

* $y_2 = |h(x) + ㅈ|$가 아닌 형태로 정리할 경우도 생각할 것.

ㄱ. True. ($\gamma < a < b < r$)인 경우는 언제나 성립.

(주의, 이 경우에만 성립하는 것은 아님).

ㄴ. $g(r)=0$, $g(\gamma)=0$.

$g(r) = (r-1)e^{r} - 1 - r = 0$.

$g(-r) = (-r-1)e^{-r} - 1 + r = \dfrac{-r-1}{e^{r}} + r - 1$

$\therefore\ e^{r} \times g(-r) = -r-1+(r-1)e^{r} = 0\ (\because\ g(r)=0)$

$\therefore\ g(-r) = 0\ (\because\ e^{r}>0)$

ㄴ → True. $\gamma = -r$.

ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ ($\alpha<\beta$) 일 때

m 값이 최소라면 $a=\alpha=\gamma=-r$, $b=\beta=r$ 인 경우이므로

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} = \frac{1+g'(r)}{1+g'(-r)} = \frac{1+r\cdot e^{r}-1}{1+(-r)\cdot e^{-r}-1} = \frac{r\cdot e^{r}}{-r\cdot e^{-r}} = -e^{2r}$$

따라서 $-e^{2r} < -e^{2}$ 은 $\begin{cases} (r>1) \text{ 이면 True.} \\ (r\le 1) \text{ 이면 False.} \end{cases}$

함수 개형상 ($0<x<r$) 범위에서는 $g(t)<0$.

($x>r$) 범위에서는 $g(t)>0$.

$g(1) = -2$, $g(r)=0$. $\longleftarrow$ $\begin{cases} g(t) = (t-1)e^{t} - 1 - t \\ g'(t) = te^{t} - 1 \end{cases}$

$\therefore\ r>1$, 따라서 ㄷ → True.

※ 2020 학년도 대수능 수학 나형 21번.

수열 $\{a_n\}$, 자연수 n, $\begin{pmatrix} a_{2n} = a_n - 1 \\ a_{2n+1} = 2a_n + 1 \end{pmatrix}$ → 이와 같이 $(2n)$과 $(2n+1)$ or $(2n-1)$ 도기를 보게 되면 '홀·짝 구분의 필요성이 있을 수 있다'는 점을 생각할 것.

$a_{20} = 1$. $\therefore a_{10} = 2$. $a_5 = 3$. $a_2 = 1$. $a_1 = 2$.

따라서 $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $a_5 = 3$, $a_6 = 4$, $a_7 = 11$, $a_8 = -1$, ...

→ 8개 정도의 항을 나열했음에도 규칙이 바로 눈에 들어오지 않으면 더 생각해야 한다. 점화식 형태로 주어졌으므로 짝끼리 더해보면 다음과 같은 규칙을 얻을 수 있다.

$$\boxed{※ \quad a_{2n} + a_{2n+1} = 3a_n}$$

※ V1) $\sum_{n=1}^{63} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \cdots\cdots + (a_{62} + a_{63})$

$= a_1 + 3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + \cdots + 3a_{31} = a_1 + 3 \times \sum_{n=1}^{31} a_n$

$= a_1 + 3 \times \left(3 \times \sum_{n=1}^{15} a_n + a_1\right) = 4a_1 + 9 \cdot \sum_{n=1}^{15} a_n$

$= 4a_1 + 9 \times \left(3 \times \sum_{n=1}^{7} a_n + a_1\right) = 13a_1 + 27 \times \sum_{n=1}^{7} a_n$

$= 13 \times 2 + 27 \times 26$ ($\because$ 위에서 $\sum_{n=1}^{7} a_n$은 직접 구할 수 있다)

$= 28 \times 26 = 26 \times 30 - 26 \times 2 = 780 - 52 = 728$ //

※ V2)

$a_1 = 2$

$a_2 + a_3 = 3a_1 = 2 \times 3$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 3a_2 + 3a_3 = 9a_1 = 2 \times 3^2$

$a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} = 2 \times 3^3$

$a_{16} + a_{17} + a_{18} + \cdots + a_{31} = 2 \times 3^4$

$a_{32} + a_{33} + a_{34} + \cdots + a_{63} = 2 \times 3^5$

$\therefore \sum_{n=1}^{63} a_n = 2 \times (1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^5)$

$= 2 \times \dfrac{1 \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = 729 - 1$

$= 728$ //

* 2020학년도 대수능 수학 가형 20번

한 개의 동전을 7번 던질 때 ⇒ $All = 2^7 = 128$.

(가) 앞면이 3번 이상 나온다 → 앞면이 3번 or 4번 or 5번 or ⋯ or 7번.

(나) 앞면이 연속해서 나오는 경우가 있다 → 앞면이 5번 이상일 때는 연속할 수 밖에 없다.

⇒ 앞면이 3번 or 4번인 경우와 5번 이상인 경우를 나눠서 생각하고 계산한다.

1. 앞면이 3번 나오는 경우 (연속과 상관없는 경우 − 연속하지 않는 경우)

$\therefore {}_7C_3 - {}_3H_3 = 35 - 10 = 25$.

2. 앞면이 4번 나오는 경우

${}_7C_4 - {}_1H_4 = 35 - 1 = 34$.

3. 앞면이 5번, 6번, 7번 나오는 경우

${}_7C_5\ (=21) + {}_7C_6\ (=7) + {}_7C_7\ (=1) = 29$

$\therefore$ Target $=$

$25 + 34 + 29$

$= 88$.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{88}{128} = \dfrac{22}{32} = \dfrac{11}{16}$ //

앞면이 3번 나오면서 연속하지 않는 경우. (H 확장으로 계산하는 방법 (H중복조합과는 별개))

1. 3. 5~7 (3가지).

→ ${}_3H_2$.

→ ${}_3H_3$.

앞면이 4번 나오면서 연속하지 않는 경우.

1. 3. 5. 7 (1가지)

→ ${}_1H_2$

→ ${}_1H_3$

→ ${}_1H_4$.

* 2020학년도 대수능 수학 나형 20번.

* 단변수 함수에서의 미분가능 { ① 점으로 판단할 때 : 미분계수 존재. ② 구간으로 판단할 때 : 본함수 연속, 도함수 연속.

①과 ③가 충돌할 경우 ① 이 우선하지만, ∞ 발산이 아닌 경우에는 다르보 정리 등을 통해서 ①과 ②의 충돌이 무의미함을 보일 수 있다. (diffentiable vs continuously differentiable 의 차이). 결과적으로 고등부 수준에서는 미분가능한지 아닌지를 묻는 질문 (yes or no question) 이 아니고, [미분가능할 때], [미분가능하도록 하는] 등의 질문형태를 띰으로써 미분가능을 전제한 상태에서의 추론을 묻는다.

* theme plus 1.

$$f(x) \left(= \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases} \right)$$

< differentiable (True).

continuously differentiable (False).

* theme plus 2.

평균값 정리의 전제 : 닫힌 구간에서 연속이고, 열린 구간에서 미분가능할 때,

$$f(x) = \begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x-1 & (0 < x \leq 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}, \quad p(x)f(x) = \begin{cases} (-x)\cdot p(x) & (x \leq 0) \\ (x-1)\cdot p(x) & (0 < x \leq 2) \\ (2x-3)\cdot p(x) & (x > 2) \end{cases}$$

$$(p(x)\cdot f(x))' = \begin{cases} -p(x) + (-x)\cdot p'(x) & (x \leq 0) \\ p(x) + (x-1)\cdot p'(x) & (0 < x \leq 2) \\ 2p(x) + (2x-3)\, p'(x) & (x > 2) \end{cases}$$

ㄱ. $p(x)f(x)$가 연속이면 (i) $0 = (-1+)\cdot p(0+)$, (ii) $p(2) = (1+)\cdot p(2+)$.

$p(0) = 0$. ∴ True. $\boxed{ㄱ \to \text{True}}$

ㄴ. $p(x)f(x)$ 가 미분가능 $\begin{cases} p(x)f(x) \text{ 연속} \to \text{ㄱ.} \\ (p(x)f(x))' \text{ 연속.} \end{cases}$

$$(p(x)f(x))' = \begin{cases} -p(x)+(-x)\cdot p'(x) & (x \leq 0) \\ p(x)+(x-1)p'(x) & (0<x\leq 2) \\ 2p(x)+(2x-3)p'(x) & (x>2) \end{cases}$$

(iii) $-p(0) = p(0+) + (-1+)\cdot p'(0+)$

$\therefore p'(0)=0$

(iv) $p(2)+p'(2) = 2p(2+)+(1+)p'(2+)$ $\quad \therefore p(2)=0$

따라서 $p(x)f(x)$가 미분가능하면 $p'(0)=0$, $p(2)=0$ 이다.

$\boxed{\text{ㄴ} \to \text{True.}}$

ㄷ. $$p(x)\{f(x)\}^2 = \begin{cases} x^2 p(x) & (x \leq 0) \\ (x-1)^2 p(x) & (0<x\leq 2) \\ (2x-3)^2 p(x) & (x>2) \end{cases}$$

$$(p(x)\{f(x)\}^2)' = \begin{cases} 2x\cdot p(x)+x^2 p'(x) & (x\leq 0) \\ 2(x-1)p(x) + (x-1)^2 p'(x) & (0<x\leq 2) \\ 4(2x-3)p(x) + (2x-3)^2\cdot p'(x) & (x>2) \end{cases}$$

$p(x)\{f(x)\}^2$이 미분가능하면

(v) $0 = (1-)p(0+)$, (vi) $p(2) = (1+)p(2+)$.

(vii) $0 = (-2+)p(0+) + (1-)\cdot p'(0+)$.

$\therefore$ (v) $p(0)=0$, (vi) 항등식 ($\because p(x)$가 다항식), (vii) $p'(0)=0$.

(viii) $2p(2)+p'(2) = 4(+)\cdot p(2+) + (1+)\cdot p'(2+)$

$\therefore p(2)=0$.

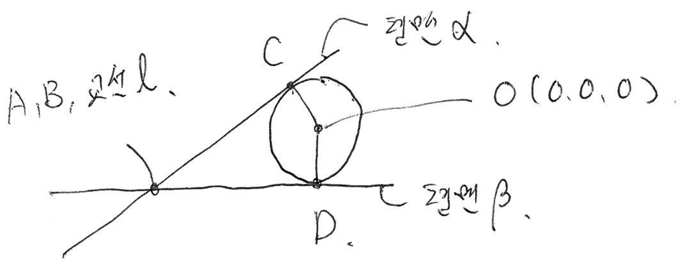
(v)~(viii) 에 의해서 $p(0)=0$, $p'(0)=0$, $p(2)=0$ 이므로

$p(x)$는 $x^2(x-2)$를 인수로 갖는다.

$\boxed{\text{ㄷ} \to \text{False}}$

※ 2020학년도 대수능 수학 가형 29번.

A(3, -3, 3), B(-2, 7, -2). $x^2+y^2+z^2=1$에 접하는 두 평면 α, β에 대하여



이와 같은 단면화가 가능하다.

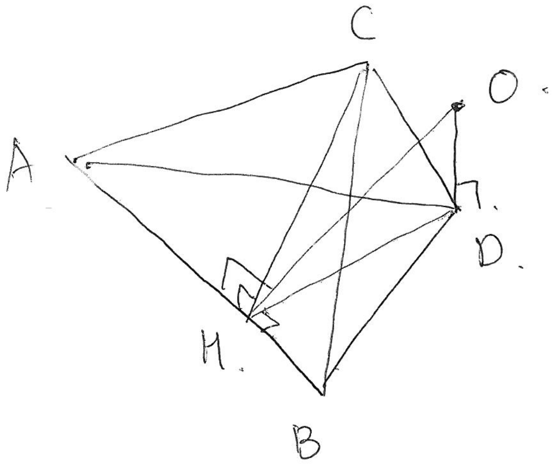
$\overrightarrow{AB}=(-5, 10, -5) \Rightarrow (1, -2, 1)$

$\therefore l: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$, $\vec{d_l}$.

원점 O에서 교선 l에 내린 수선의 발을

H라 하면, H(t) $(t+3, -2t-3, t+3)$. (t는 실수). $\therefore \overrightarrow{OH}=(t+3, -2t-3, t+3)$.

$\vec{d_l} \circ \overrightarrow{OH}=0$ 이므로 $t+3+4t+6+t+3=6t+12=0$에서 $t=-2$. $\therefore$ H(1, 1, 1).



$\overline{AB} \perp \overline{CH}$, $\overline{AB} \perp \overline{OH}$, $\overline{AB} \perp \overline{DH}$ ($\because$ 삼수선의 정리)

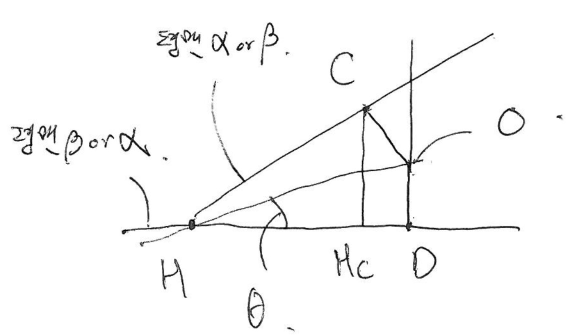
$\overline{OD}=1$ ($\because$ 구의 반지름). $\overline{AB}=\sqrt{150}$.

$\overline{OA}=\sqrt{27}$. $\therefore \overline{AD}=\sqrt{26}$. $\overline{OH}=\sqrt{3}$.

$\overline{OB}=\sqrt{57}$. $\therefore \overline{BD}=\sqrt{56}$. $\overline{DH}=\sqrt{2}$.

$\therefore \triangle ABD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DH}=\dfrac{\sqrt{300}}{2}$. 사면체의 높이를 h라 하면 $h=\overline{CH_C}$.

$\angle OHD=\theta$라 하면

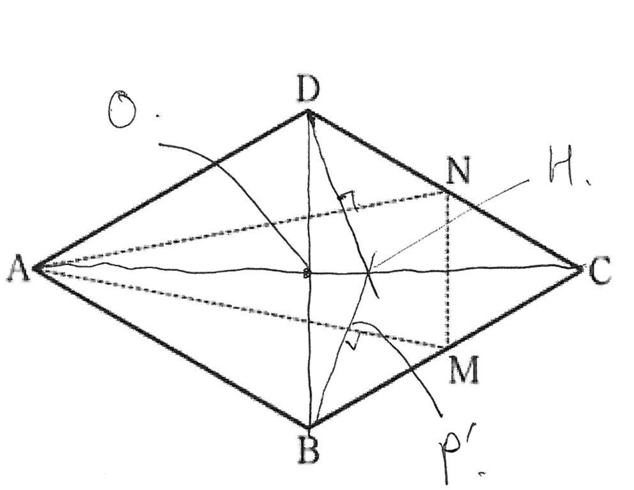


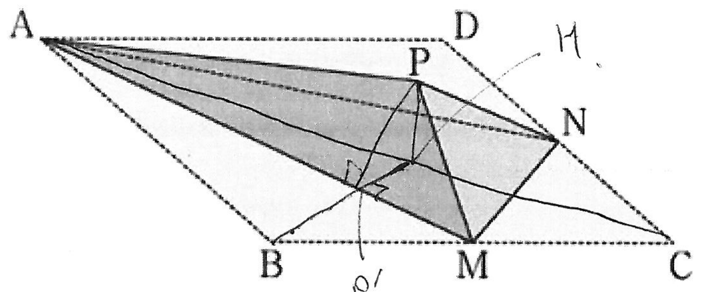
$\sin\theta=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{OH}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $\sin 2\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{CH_C}=\overline{CH}\times\sin 2\theta=\dfrac{4}{3}$ ($\because \overline{CH}=\overline{DH}$).

$\therefore$ 사면체의 부피는 $\dfrac{\sqrt{300}}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{4\sqrt{300}}{18}=\dfrac{4\cdot2\cdot\sqrt{75}}{18}=\dfrac{4\cdot2\cdot5\cdot\sqrt{3}}{18}=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$ //

* 2020학년도 대수능 수학 가형 27번.





문제를 읽고, 좌표설정으로 방향을 잡았다면, 점 P에서 평면 ABCD (바닥평면)에 수선의 발을 내리면 왼쪽 그림에서 H가 된다.

$A(0, -2\sqrt{3}, 0)$ $B(2, 0, 0)$.

$C(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $D(-2, 0, 0)$.

$M(1, \sqrt{3}, 0)$, $N(-1, \sqrt{3}, 0)$.

$\therefore \overrightarrow{AM} = (1, 3\sqrt{3}, 0)$ $\triangle AMN = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3}$

따라서 $\overrightarrow{BH} = (-3\sqrt{3}, 1, 0)$, 점 $H(0, b, 0)$이라 하면,

$\overrightarrow{BH} = t \times (-2, b, 0)$ $\therefore t = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\therefore b = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. $\therefore H\left(0, \frac{2}{3\sqrt{3}}, 0\right)$

따라서 접어올린 결과 $B \to P$ 이므로 삼각형 AMN이 포함된 평면 ABCD와 평면 PAM과의 이면각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{\overline{P'H}}{\overline{BP'}}$ 가 된다.

직선 AM : $\frac{x}{1} = \frac{y+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$, $z=0$, 직선 BH : $\frac{x-2}{-3\sqrt{3}} = \frac{y}{1}$, $z=0$

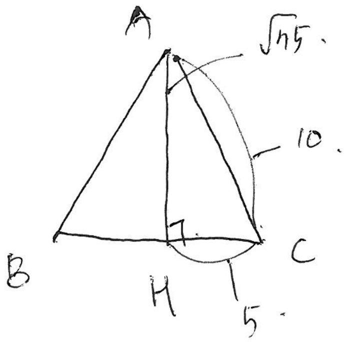
$\therefore 3\sqrt{3}x = y+2\sqrt{3} = \frac{x}{-3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$ 에서 $\left(3\sqrt{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)x = \frac{20}{3\sqrt{3}} = \frac{28}{3\sqrt{3}}x$.

$\therefore x = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$ 따라서 $P'\left(\frac{5}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}, 0\right)$ ($\because 3\sqrt{3} \times \frac{5}{7} = y + 2\sqrt{3}$ 에서 $y = -\frac{14\sqrt{3}}{7} + \frac{15\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{7}$)

$\overline{BP'} = \sqrt{\frac{81}{49} + \frac{3}{49}} = \frac{\sqrt{84}}{7}$. $\overline{P'H} = \sqrt{\frac{25}{49} + \frac{25 \times 3}{63^2}} = \sqrt{\frac{25}{49} \times \left(1 + \frac{3}{81}\right)} = \frac{5}{7} \times \sqrt{\frac{84}{81}} = \frac{5\sqrt{84}}{63}$.

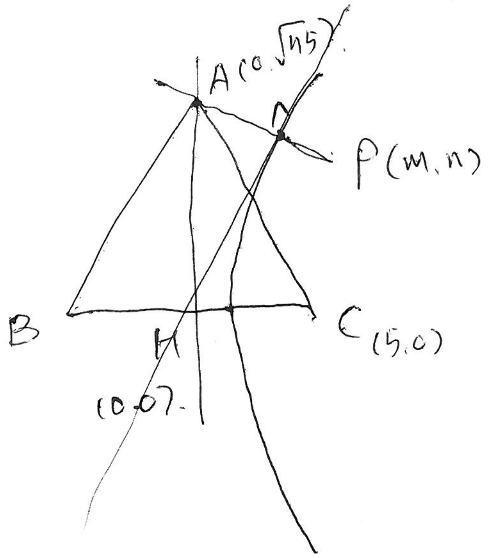
$\therefore \cos\theta = \frac{\frac{5\sqrt{84}}{63}}{\frac{\sqrt{84}}{7}} = \frac{5}{9}$. $\therefore$ 정사영의 넓이는 $\triangle AMN \times \cos\theta = 3\sqrt{3} \times \frac{5}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ //

* 2020 학년도 대수능 수학 가형 17번.



$\overline{PB}-\overline{PC}=2$를 만족시키는 점 P의 자취는 (5,0), (−5,0)을 초점으로 하고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선의 일부분이다.

(H를 원점으로, 직선 AH를 y축이라 하면, $(x>0)$에서만 점 P의 자취가 나타난다)



점 P의 자취를 $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{24}=1$ $(x>0)$이라 하면,

점 P에서의 접선과 직선 AP가 수직이 될 때 선분 PA의 길이가 최소이고, 그 때의 점 P의 y좌표값을 삼각형 PBC의 높이로 볼 수 있다.

① $m^2-\frac{n^2}{24}=1 \quad (m>0)$

② $2xdx-\frac{2ydy}{24}=0$ 에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{24x}{y}=\frac{24m}{n}$.

③ $\overline{AP}$의 기울기 $=\frac{n-\sqrt{75}}{m-0}=\frac{n-\sqrt{75}}{m}$.

②×③ $=-1$. $\therefore \frac{24m}{n}\times\frac{n-\sqrt{75}}{m}=-1$ $\therefore 24n-24\sqrt{75}=-n$

따라서 $n=\frac{24\sqrt{75}}{25}$. $\therefore \triangle PBC=\frac{1}{2}\times10\times\frac{24\sqrt{75}}{25}=\frac{5\times24\times5\sqrt{3}}{25}=24\sqrt{3}$ //

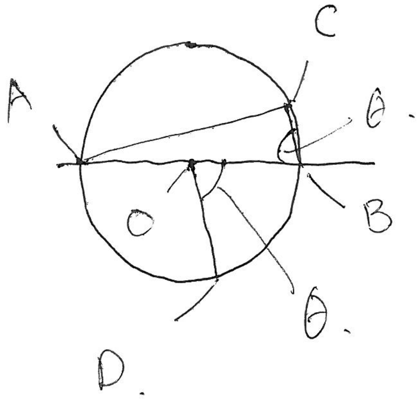
* 2020학년도 대수능 수학 가형 19번.

한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D

(가) $|\overrightarrow{AB}| = 8$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ → 지름이 선분 AB 이고, $r = 4$.

(나) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$.

→ 중심을 O라 할 때 $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{CB}$, $\therefore |\overrightarrow{CB}| = 2$.



$\overline{AB} = 2r = 8$, $\overline{CB} = 2$. $\therefore \overline{AC} = \sqrt{60}$.

$\cos\theta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$\therefore |\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{AO}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD}$

$= 16 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos\theta = 16 + 16 + 8 = 40$.

* 내적계산할 때, $\overrightarrow{AO}$와 $\overrightarrow{OD}$ 사잇각은 $\angle AOD$가 아니고 $\angle BOD$이다.

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ 이므로 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ 으로 생각할 수 있다.

* 이와 같은 생각이 떠오르지 않을 경우, 실제 $\overrightarrow{AO}$와 $\overrightarrow{OD}$의 내적은 $\overline{AO}$의 길이와 선분 OD의 직선 AB 위로의 정사영의 길이를 곱한 것이므로 (+)의 값이 나온다.

* 정사영으로 생각해서도 풀어볼 것.

→ 점 D의 직선 AB 위로의 정사영을 H_1이라 할 때 $|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{AH_1}|^2 + |\overrightarrow{H_1D}|^2$

(∵ 피타고라스 정리).

* 2020학년도 대수능 수학 가형 26번.

$f(x) = (x^2+2)e^{-x}$. $g(x)$는 미분가능.

$g\left(\frac{x+8}{10}\right) = f^{-1}(x)$. $g(1) = 0$.

$g\left(\frac{x+8}{10}\right)$ 과 같이 변수부분이 단순하지가 않은 경우,

{ $g\left(\frac{x+8}{10}\right) = h(x)$로 치환해서 문제를 접근하는 것이 실수를 줄이는 방법이 될 수 있다. }.

$\therefore$ $g\left(\frac{x+8}{10}\right) = h(x)$ 라면 $\begin{cases} h(f(x)) = x, & h'(f(x))\cdot f'(x) = 1. \\ f(h(x)) = x, & f'(h(x))\cdot h'(x) = 1 \end{cases}$.

$g(1) = g\left(\frac{2+8}{10}\right) = h(2) = 0$. $f(0) = 2$.

$h'(x) = \frac{1}{10}\cdot g'\left(\frac{x+8}{10}\right)$ 이므로 $g'(1) = 10\cdot h'(2)$.

$f'(h(2)) \times h'(2) = f'(0)\times h'(2) = 1$.

$f'(x) = (2x - x^2 - 2)e^{-x}$ 이므로 $f'(0) = -2$. $\therefore h'(2) = -\frac{1}{2}$.

$\therefore$ $g'(1) = 10\times h'(2) = -5$. 따라서 $|g'(1)| = 5$ //

---

* 2013학년도 평가원 6월 수리 가형 26번 연습.

$f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때 ⇒. $f(2x) = h(x)$, $h(g(x)) = g(h(x)) = x$.

* 2020학년도 대수능 수학 가형 28번 / 나형 19번.

(1, 2, 3, 4, 5, 6) → 중복을 허락하여 5개 택 + 5개 일렬로 나열

(가) 각각의 홀수 → 선택 X or 한 번만 선택.

∴ 1, 2, 3, 4, 5 → OK, 1, 1, 2, 3, 4 → NO.

(나) 각각의 짝수 → 선택 X or 두 번만 선택.

∴ 12345 → NO, 22222 → NO, 12244 → OK.

따라서 조건에 부합하는 경우는 홀수 1개, 짝수 4개 (case 1) 이거나, 홀수 3개, 짝수 2개 (case 2) 인 경우뿐이다. 그 외의 경우 (예를 들어 홀수 0개, 짝수 5개 등) 는 조건에 위배된다.

* (case 1) 홀수 1개, 짝수 4개 ⇒ 홀수 1, 3, 5 중 택 1, 짝수 2, 4, 6 중 택 2.

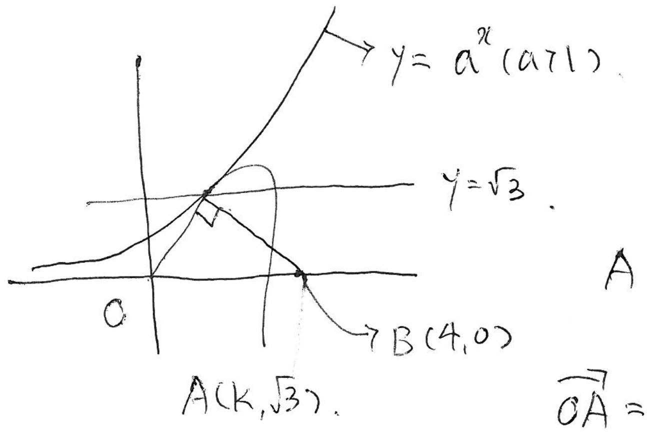
$$\therefore {}_3C_1 \times {}_3C_2 \times \frac{5!}{2!2!} = 3 \times 3 \times 30 = 270.$$

* (case 2) 홀수 3개, 짝수 2개 ⇒ 홀수 1, 3, 5 중 택 3, 짝수 2, 4, 6 중 택 1.

$$\therefore {}_3C_3 \times {}_3C_1 \times \frac{5!}{2!} = 3 \times 60 = 180.$$

따라서 270 + 180 = 450//

* 2020 학년도 대수능 수학 가형 15번.



지수함수의 밑이 a로 설정되어 있으므로 점A의 x좌표를 a로 놓는 실수를 범하지 말자.

$A(k, \sqrt{3})$, $B(4, 0)$ 이라 하면

$\overrightarrow{OA}=(k, \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB}=(4-k, -\sqrt{3})$

$\therefore\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ 이므로 $4k-k^2-3=0$ 에서 $k^2-4k+3=0$. $\therefore\ k=1$ or 3.

기울기로 접근하면 $\overline{OA}$의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{k}$, $\overline{AB}$의 기울기는 $\frac{-\sqrt{3}}{4-k}$.

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{k}\times\frac{-\sqrt{3}}{4-k}=-1$ 에서 $3=4k-k^2$, $\therefore\ k^2-4k+3=0$. $\therefore\ k=1$ or 3.

$k=1$일 때 $a^1=\sqrt{3}$ 에서 $a=3^{\frac{1}{2}}$.

$k=3$일 때 $a^3=\sqrt{3}$ 에서 $a=3^{\frac{1}{6}}$.

$\therefore\ 3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$.

---

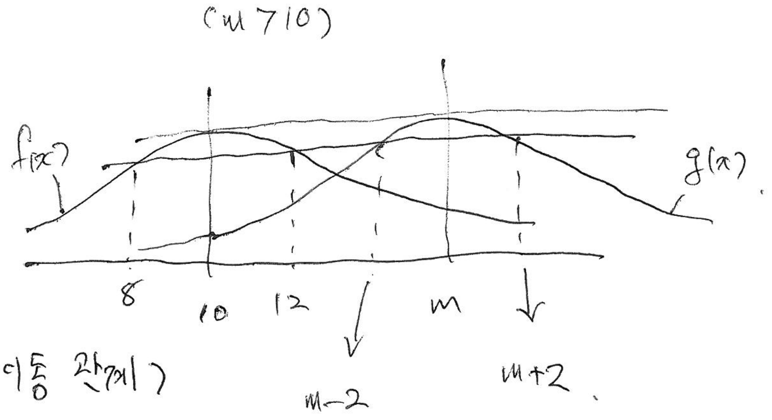
* 길이나 좌표등을 미지수로 설정할 때, 문제에서 주어진 미지수와 중복(or 충돌)이 되지 않도록 설정해야 한다.

* 2020학년도 대수능 수학 가형 18번.

확률변수 X, Y.

$X \sim N(10, 2^2) \rightarrow pdf = f(x)$

$Y \sim N(m, 2^2) \rightarrow pdf = g(x)$

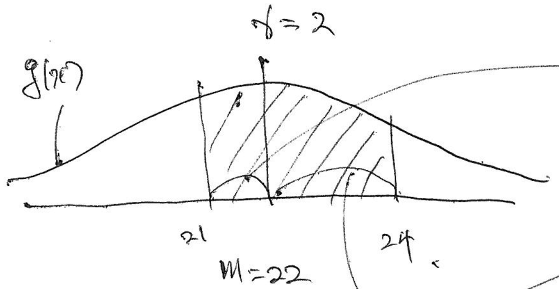


($\sigma = 2$로 동일하므로 f(x)와 g(x)는 평행이동 관계)

$\therefore f(12) \le g(20)$ 이면 $m-2 \le 20 \le m+2$. 따라서 $18 \le m \le 22$.

$P(21 \le Y \le 24)$의 최댓값은 m이 $\frac{21+24}{2}$ (확률계산 시작과 끝의 중점)에

가까울수록 커지므로 $m = 22$일 때가 최댓값이다.



$\frac{거리=1}{\sigma=2} = Z(=0.5)$

$\frac{거리=2}{\sigma=2} = Z(=1.0)$

$\therefore Z(0.5) + Z(1.0) = 0.1915 + 0.3413 = 0.5328$ //

* 2020학년도 대수능 수학 가형 16번.

음이 아닌 정수 a, b, c, d

(가) $a+b+c-d=9 \rightarrow a+b+c=9+d.$

(나) $d \le 4$ 이고 $c \ge d.$

1. case1) $d=4,\ c \ge 4.$

$a+b+c=13$

$0+(0+13)$ ⋯ $(9+4)$ } 10개

} ${}_{10}H_2.$

2. case2) $d=3,\ c \ge 3.$

$a+b+c=12$

$0+(0+12)$ ⋯ $(9+3)$ } 10개

} ${}_{10}H_2.$

3. case3) $d=2,\ c \ge 2.$

$a+b+c=11.$

$0+(0+11)$ ⋯ $(9+2)$ } 10개

} ${}_{10}H_2.$

4. case4) $d=1,\ c \ge 1$

$a+b+c=10$

$0+(0+10)$ ⋯ $(9+1)$ } 10개

} ${}_{10}H_2.$

5. case5) $d=0,\ c \ge 0.$

$a+b+c=10-1=9.$

$0+(0+9)$ ⋯ $(9+0)$ } 10개.

} ${}_{10}H_2.$

$\therefore\ {}_{10}H_2 \times 5$

$= {}_{11}C_2 \times 5 = 55 \times 5$

$= 275.$

위의 계산들은 H확장으로 계산한 것임.

예를 들어서 case5)에서 ${}_{3}H_{9}$로 계산하는 것이 H중복조합이고,

${}_{10}H_2$로 계산하는 것이 H확장임.

* 2020학년도 대수능 수학 가형 14번 / 나형 16번.

주머니 속에 1 → 10개, 2 → 20개, 3 → 30개 } 60개 → 1개 확인 후 복원. → 10번 반복 후 확인한 수 (10개)의 합 = 확률변수 Y,

$E(Y) = ?$ $V(Y) = ?$

→ Y는 10부터 300까지 가능 (정의역) → 현실적으로 290개 정도의 함숫값(확률) 일일이 확인하기 힘듦

∴ 반복시행이므로 1번의 시행을 기준으로 생각.

한번 확인했을 때, 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하고,

10번 반복했을 때, 평균적으로 나오는 수를 확률변수 $\bar{X}$ or K 라 하고, (추출로 생각할 수 있다).

(보통 bar는 상수일 때 본다. 실제 내용도 변수가 아니고 상수가 맞다)

10개를 합했을 때 ($10\bar{X}$ or $10K$) = Y이므로 여기서 계산한다.

X	1	2	3	Σ
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

$$\therefore E(X) = \frac{1+4+9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

$$E(X^2) = \frac{1+8+27}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

$$\therefore V(X) = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9} = p.$$

$$E(\bar{X}) = E(K) = \frac{7}{3}. \quad V(\bar{X}) = V(K) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{18} = q$$

$$\therefore E(10\bar{X}) = E(10K) = E(Y) = \frac{70}{3}, \quad V(10\bar{X}) = V(10K) = V(Y) = 10^2 \cdot V(\bar{X}) = \frac{100}{18} = \frac{50}{9} = r.$$

* 확통 빈칸 문제 (조합공식 활용 / 경우의 수 및 확률)는 그냥 경우의 수나 확률 구하라는 문제로 풀 수 있어야 한다. (즉, 시험장과 달리 연습할 때는 box가 없다고 생각하고 푸는 연습을 해야 한다)

* 2020학년도 대수능 수학 나형 29번.

→ 3명의 학생 A, B, C에게 / 같은 종류의 사탕 6개 / 같은 종류의 초콜릿 5개 / 남김 없이.

(가) A가 받는 사탕 → 1개 이상
(나) B가 받는 초콜릿 → 1개 이상.
(다) C가 받는 (사탕+초콜릿) → 1개 이상.

(가), (나) 조건은 단순, 명료.
(다) 조건은 추가 조건 포함
→ (가), (나) 기준으로 생각.

* 주의: 일반적인 경우라면 같은 행동을 시간차를 두고 계산하면, 조합으로 계산해야 할 경우들을 순열로 계산하게 되는 오류가 발생할 위험성이 있지만, 앞에 취하는 행동 또는 뒤에 취하는 행동이 확률값 1의 행동인 경우에는 상관없다. 그러므로 A에게 사탕 1개, B에게 초콜릿 1개를 준 다음의 상황을 살펴봐도 된다.

case 1) A 사탕 1개, B 초콜릿 1개, C 사탕 1개 먼저 주고, 나머지 분배.

$_3H_4 \times {}_3H_4 = 15 \times 15 = 225$ (사탕 4개, 초콜릿 4개).

case 2) A 사탕 1개, B 초콜릿 1개, C 초콜릿 1개 인 경우.

$_3H_5 \times {}_3H_3 = 21 \times 10 = 210$ (사탕 5개, 초콜릿 3개).

case 3) A 사탕 1개, B 초콜릿 1개, C 사탕 1개, 초콜릿 1개 인 경우.

$_3H_4 \times {}_3H_3 = 15 \times 10 = 150$ (사탕 4개, 초콜릿 3개).

∴ (case 1) + (case 2) − (case 3) = 225 + 210 − 150 = 285.

* (가), (나) 조건을 먼저 충족시키고, (다) 조건을 충족시키는 형태의 접근이다.
(가), (나) 조건을 충족시키고, (다) 조건을 충족시키지 못하는 경우를 빼는 형태도 가능.

$_3H_5 \times {}_3H_4 - {}_2H_5 \times {}_2H_4$.

* 2020학년도 대수능 수학 나형 28번.

다항함수 $f(x)$, $x \in R$, $\begin{cases} (가)\ \int_1^x f(t)\,dt = \dfrac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\} \\ (나)\ \int_0^2 f(x)\,dx = 5 \cdot \int_{-1}^1 xf(x)\,dx. \end{cases}$

$f(0)=1$, $f(4)=?$

* 정적분으로 정의된 함수 (적분구간에 변수가 포함된 함수)

→ primary : 밑끝과 윗끝을 같게 하는 값을 찾아서 정리.

secondary : 정의된 구간에 한해서 양변을 미분한 뒤에 정리.

(가)에서 $x=1$일 때는 항등식이므로 양변을 미분하면

$$f(x) = \frac{f(x)+f(1)}{2} + \frac{(x-1)\cdot f'(x)}{2}, \quad \therefore f(x) = xf'(x) - f'(x) + f(1) \quad \cdots\cdots ①$$

$f(x) = ax^n + \cdots$, ($a \neq 0$, n은 음이 아닌 정수). ← 상수함수는 다항함수의 특이형임.

$f'(x) = nax^{n-1} + \cdots$, ($n$은 자연수).

∴ ①에서 양변의 최고차항만 비교하면 $ax^n = nax^n$. $\therefore n=1$ ·····②

따라서 $f(x) = ax+1$ ($\because f(0)=1$).

$$\int_0^2 (ax+1)\,dx = 5 \cdot \int_{-1}^1 (ax^2+x)\,dx = 10 \cdot \int_0^1 ax^2\,dx$$

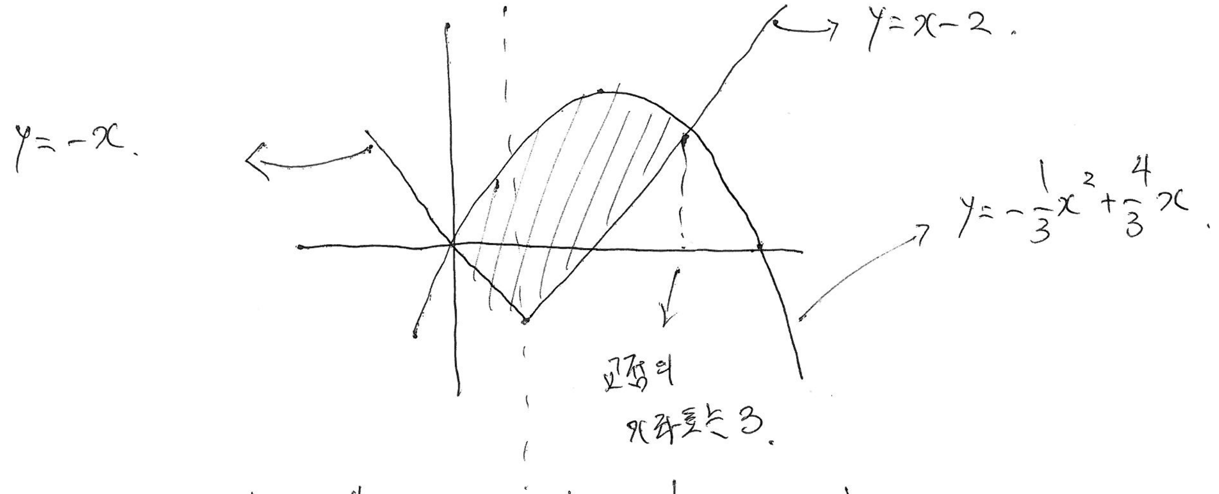
$$\therefore \left[\frac{ax^2}{2}+x\right]_0^2 = 2a+2 = 10 \cdot \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = \frac{10a}{3}.$$

$\therefore \dfrac{4a}{3} = 2$에서 $a = \dfrac{3}{2}$, $f(x) = \dfrac{3}{2}x+1$, $\therefore f(4) = 6+1 = 7$ //

* 2020 학년도 대수능 수학 나형 26번.

$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x)=-\frac{1}{3}x(x-4)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$.

$g(x)=|x-1|-1$.



$\therefore\ x-2=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ 에서 $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x-2=\frac{1}{3}(x^2-x-6)=0$.

$\therefore$ 교점의 x좌표는 3.

$\int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$

$=\left(-\cancel{\frac{1}{9}}+\frac{7}{6}\right)-0+\left(-\frac{27}{9}+\frac{9}{6}+6\right)-\left(-\cancel{\frac{1}{9}}+\cancel{\frac{1}{6}}+2\right)=\frac{13}{6}$.

$=-1+3+\frac{3}{2}=S=\frac{7}{2}$. $\quad\therefore\ 4S=14$//.

* 2020학년도 대수능 수학 나형 14번.

(가) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\cdot g(x)}{x^3} = 2 \Rightarrow f(x)g(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c는 정수)

(나) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4 \Rightarrow f(x)g(x) = x^2 \cdot (2x-4) = 2x^2(x-2)$.

$\therefore f(x) = \quad 2 \ / \ 2x \ / \ 2(x-2) \ / \ 2x^2 \ / \ 2x^2(x-2)$

$f(2) = \quad 2 \ / \ 4 \ / \ 0 \ / \ 8 \ / \ 0$.

$\therefore$ $f(2)$의 최댓값은 $f(x) = 2x^2$일 때 8 //

* 2020학년도 대수능 수학 나형 27번.

$t \geq 0$, 점 P의 위치 $P_P = P_{x_1} = t^3 - 2t^2 + 3t$, (P_P = position of P).

점 P의 속도 $V_P = V_{x_1} = 3t^2 - 4t + 3$.

점 Q의 위치 $P_Q = P_{x_2} = t^2 + 12t$.

점 Q의 속도 $V_Q = V_{x_2} = 2t + 12$.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $V_{x_1} = V_{x_2}$인 t에서 이므로

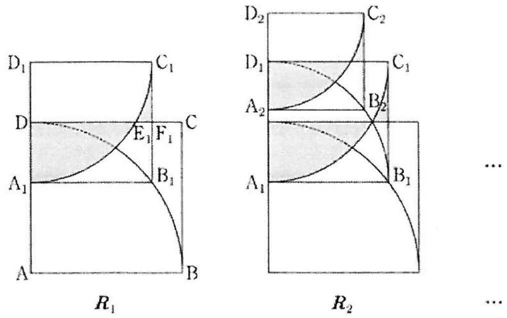
$3t^2 - 6t - 9 = 3(t^2 - 2t - 3) = 3(t-3)(t+1) = 0$ 에서 $t = 3$.

그 때 ($t=3$일 때)의 위치는 $P_{x_1}\big|_{t=3} = 27 - 18 + 9 = 18$

$P_{x_2}\big|_{t=3} = 9 + 36 = 45$.

$\therefore$ 두 점 P, Q 사이의 거리는 $|18 - 45| = 45 - 18 = 27$ //

* 2020학년도 대수능 수학 나형 18번.



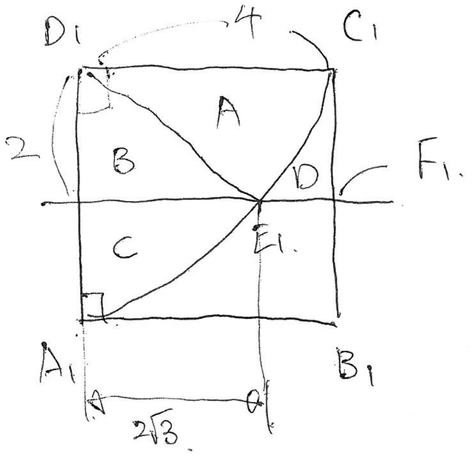
n: 2 (R_1) → 2 (R_2에서 추가된 부분).

∴ n=1.

l_r: 한 변의 길이가 5인 정사각형

→ 한 변의 길이가 4인 정사각형 (∵ $\overline{A_1B_1}=4$).

$\therefore l_r = \frac{4}{5}$, $S_r = \frac{16}{25}$.



a = C+D.

(A+B+C)와 A는 부채꼴 형태.

$\angle E_1D_1A_1 = 60^\circ$. $\therefore \angle C_1D_1E_1 = 30^\circ$.

$\therefore A = \frac{1}{2}\times 4^2 \times \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{2}r^2\theta\right) = 16\pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{4}{3}\pi$.

$B = \frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$A+B+D = 4\times 2 = 8$.

$A+B+C = 16\pi \times \frac{1}{4}$

$\therefore C+D = (A+B+D)+(A+B+C) - 2\times(A+B)$

$= a(\text{초항}) = 8+4\pi - \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}$.

$$\therefore \frac{8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{16}{25}\times 1} = \frac{25}{9}\times 4\times\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right) //$$

* 2020학년도 대수능 수학 나형 15번.

첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열 $\Rightarrow -4n+54$.

제 n 항까지의 합 $S_n = -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 54n = -2n^2 + 52n$.

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k \Rightarrow (m+2)$를 중심으로 5개항의 합 (median $= S_{m+2}$)

$\therefore -2n^2+52n = -2(n^2-26n) = -2(n-13)^2+338$.

따라서 $n = m+2 = 13$일 때가 최대이다. $\therefore$ $m=11$ //

* 2020학년도 대수능 수학 나형 17번.

자연수 n의 양의 약수의 개수 $= f(n)$.

36의 양의 약수 : $a_n = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

$f(a_k) = 1, 2, 2, 3, 4, 3, 6, 6, 9$

$\rightarrow f(a_1), f(a_4), f(a_6), f(a_9)$ 가 홀수.

$\therefore \sum_{k=1}^{9} \{ (-1)^{f(a_k)} \times \log a_k \}$

$= \log 2 + \log 3 + \log 6 + \log 12 + \log 18 - 0 - \log 4 - \log 9 - \log 36$

$= \log\left(\frac{2\times3\times6\times12\times18}{4\times9\times36}\right) = \log\left(\frac{2^5\times3^5}{2^4\times3^4}\right) = \log(2\times3)$

$= \log 6$ // $\therefore$ $\log 2 + \log 3$.