

Theme 1. 미분가능성

concept

▶미분계수의 정의

: 함수 $y = f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

▶미분가능성

① 함수 $f(x)$ 에 대하여 $x = a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 가 존재할 때,

$$\text{즉, } \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

일 때, “함수 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다.”라 한다.

->극한의 존재유무이므로 좌극한과 우극한을 비교해주면 됩니다. 교과서엔 용어로 정의되지 않지만 미분계수의 좌극한을 좌미분계수, 우극한을 우미분계수라고 통상적으로 말합니다.

② 함수 $f(x)$ 가 모든 정의역의 원소 x 에 대하여 미분가능할 때, $f(x)$ 는 미분가능한 함수라고 한다.

③ 함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이고, 역은 성립하지 않는다.

함수 $f(x)$ 가 미분가능함수이면 $f(x)$ 는 연속함수이고, 역은 성립하지 않는다.

$$\text{pf. } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{가 존재하면 } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - f(a)\} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ 이다.}$$

▶미분가능성의 일반적인 풀이법 (미분가능한 경우)

①문제가 되는 x 를 찾는다. (흔히 말하는 특이점)

②식 : 문제가 되는 지점에서 좌미분계수=우미분계수 임을 보인다.

그래프 : 문제가 되는 지점에서 부드럽게 연결되도록 한다.

Theme 1. 미분가능성

mechanism

*미분가능성에 대한 발문이 있는 경우 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

a. 미분가능하게 만든다/미분불가능한 지점을 찾는다.

#1, #2, #3, #4, #5, #6, #7, #8, #9, #10, #12

b. 결합 조건 (반드시 사용되는 조건)

#11

c. 선언적인 조건 (도함수가 필요한 경우 or 조건을 구성하는 경우)

EX) 함수 $f(x)$ 는 미분가능한 함수이다. ~ (나)조건 : $f'(x) = \sin x + \cos x + 3x^2$

-> 앞으로 미분가능성에 대한 발문이 있는 경우 위의 세가지 경우 중 어디에 속하는지 확인하는 것이 조건을 빠뜨리지 않을 수 있다.

▶미분가능성 문제의 유형

#. 절댓값 함수의 미분가능성 (1번, 2번, 4번)

-> $|f(x)|$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하다.

$$\therefore \begin{cases} f(a) \neq 0 \\ f(a) = 0, f'(a) = 0 \end{cases}$$

-> $|f(x)|$ 가 $x=a$ 에서 미분불가능하다.

$$\therefore f(a) = 0, f'(a) \neq 0$$

pf. $f(x)$ 가 $x=a$ 부근에서 부호변화가 - -> + 인 경우

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{-f(x)}{x-a} = -f'(a), \lim_{x \rightarrow a+} \frac{|f(x)| - |f(a)|}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{x-a} = f'(a)$$

이므로 $f(a) = 0$ 일 때, 미분가능하면 $f'(a) = 0$ 미분불가능하면 $f'(a) \neq 0$ 이다.

#구간에 따라 나뉜 함수 (3번)

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ k & (x = a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases} \rightarrow f(x)가 x=a 에서 미분가능할 때, g(a) = k = h(a), g'(a) = h'(a)$$

pf. $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능할 때,

$$\lim_{x \rightarrow a-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} h(x) = k \text{ 이고, } \lim_{x \rightarrow a-} \frac{g(x) - k}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{h(x) - k}{x-a} \stackrel{=}{=} \lim_{x \rightarrow a-} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{h(x) - h(a)}{x-a}$$

이므로 $g'(a) = h'(a)$ 이다.

Theme 1. 미분가능성

$f(x) \pm g(x)$ 의 미분가능성 (5번)

$f(x) + g(x)$ 나 $f(x) - g(x)$ 의 결괏값이 동일하다는 것은 직관적으로 자명하기 때문에 주로 출제빈도가 높은 $f(x) - g(x)$ 에 대해 알아보도록 하겠습니다.

① $f(x), g(x)$ 모두 $x = a$ 에서 미분가능한 경우

$\therefore f(x) - g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다.

② $f(x)$ 와 $g(x)$ 둘 중 하나가 $x = a$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore f(x) - g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분불가능하다.

pf. 미분불가능한 지점에서 좌극한, 우극한 값이 존재하는 경우 값이 다르기 때문에 $f(x) - g(x)$ 의 $x = a$ 에서 좌미분계수, 우미분계수가 같을 수 없다.

③ $f(x)$ 와 $g(x)$ 둘 다 $x = a$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore f(x) - g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분불가능 or 미분가능

pf. 미분불가능한 지점에서 좌극한, 우극한 값이 존재하는 경우 (단, $p \neq q, r \neq s$)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = q, \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = r, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = s \text{ 라 하자.}$$

$p - r$ 과 $q - s$ 의 값을 비교해야한다. $p = r, q = s$ 인 경우 같을 수도 있기 때문에 값에 따라

미분가능할 수도 불가능할 수도 있다.

$f(x) \times g(x)$ 의 미분가능성 (12번)

① $f(x), g(x)$ 모두 $x = a$ 에서 미분가능한 경우

$\therefore f(x) \times g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다.

② $f(x)$ 와 $g(x)$ 둘 중 하나가 $x = a$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore$ 미분가능한 함수가 $(x - a)$ 인수를 갖는다면 $f(x) \times g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분가능하다. 그렇지 않은 경우 미분불가능하다.

(다항함수가 아닌 경우 $x = a$ 를 대입했을 때 함숫값이 0이다.)

③ $f(x)$ 와 $g(x)$ 둘 다 $x = a$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore f(x) \times g(x)$ 는 $x = a$ 에서 미분불가능 or 미분가능

->좌미분계수와 우미분계수의 값을 비교한다.

* $\{f(x) \times g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 참고

Theme 1. 미분가능성

$f(x) \circ g(x)$ 의 미분가능성 (6번, 7번, 8번, 9번, 10번)

① $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 $f(x)$ 가 $x=g(a)$ 에서 미분가능한 경우

$\therefore f(x) \circ g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.

② $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분불가능하고 $f(x)$ 가 $x=g(a)$ 에서 미분가능한 경우

$\therefore f'(g(a))=0$ 이면 $f(x) \circ g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.

③ $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고 $f(x)$ 가 $x=g(a)$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore g'(a)=0$ 이면 $f(x) \circ g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.

④ $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 $f(x)$ 가 $x=g(a)$ 에서 미분불가능한 경우

$\therefore f(x) \circ g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능 or 미분불가능

->좌미분계수와 우미분계수의 값을 비교한다.

* $\{f(x) \circ g(x)\}' = f'(g(x))g'(x)$ 참고