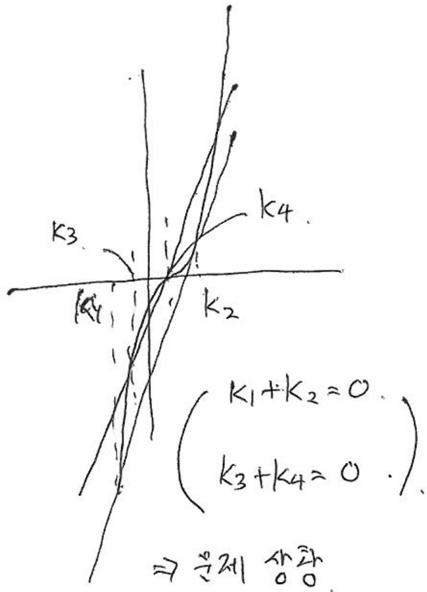
* 2020 학년도 사관학교 수학 나형 21번.



$f(x) = (x-2)^3$

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x|<a) \\ mx+n & (|x| \geq a) \end{cases} \quad (a>0).$

$\forall x \in R$, $g(x)$는 연속.

$g(x)$가 연속이므로 $(a, f(a))$, $(-a, f(-a))$를 잇는 직선이 $mx+n$ 이다.

$$\therefore m = \frac{(a-2)^3-(-a-2)^3}{a-(-a)} = \frac{(a-2)^3+(a+2)^3}{2a}$$

$$= \frac{a^3-8-6a(a-2)+a^3+8+6a(a+2)}{2a} = \frac{2a^3+12a+12a}{2a} = \frac{2a^3+24a}{2a} = a^2+12$$

ㄱ. $a=1$ 일 때 $m = a^2+12\big|_{a=1} = 13$ → True.

ㄴ. $f'(a)=m$ 일 때 $m=48$. $(f'(x)=3(x-2)^2)$.

$3(a-2)^2 = a^2+12$. $\therefore 2a^2-12a = 2a(a-6)=0$. $\therefore a=6$.

$a=6$ 일 때 $m = a^2+12\big|_{a=6} = 36+12 = 48$. → True.

ㄷ. $f(a)-2af'(a) > n-ma$

$(a, f(a)) = (a, ma+n)$ $\therefore n = f(a)-ma$.

따라서 준 식은 $f(a)-2af'(a) > f(a)-2ma$ $\therefore m > f'(a)$.

$\therefore a^2+12 > 3(a-2)^2 \rightarrow 2a^2-12a < 0$. $\therefore 0<a<6$.

a가 자연수라면 $a=1, 2, 3, 4, 5$. → True

→ 미지수 a, m, n을 연립방정식을 통해서 하나의 미지수로 설명할 수 있는가?