

Theme 1. 힘과 운동

1. 뉴턴의 제2법칙

물리를 하신 분이라면 모를 수 없는 법칙이 바로 뉴턴의 제2법칙!

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ 입니다.}$$

$\vec{F}$ 는 물체가 받는 알짜 힘

m 은 물체의 질량

$\vec{a}$ 는 물체의 가속도를 의미합니다.

※ 먼저 가속도, 속도, 위치에 대해 짚고 넘어가 봅시다.

입자의 위치벡터를 $\vec{r}$ 라 합니다.

위치벡터의 변화량인 변위 벡터는 $\Delta\vec{r}$ 로 표현할 수 있습니다.

평균속도는 변위 벡터 $\Delta\vec{r}$ 를 걸린 시간 Δt 로 나눈 비로 정의하고,

$$\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \text{로 나타냅니다.}$$

순간속도는 평균속도의 극한으로, $\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}$ 로 나타냅니다.

평균가속도는 순간속도 벡터의 변화 $\Delta\vec{v}$ 를 걸린 시간 Δt 로 나눈 비로 정의하고,

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{로 나타냅니다.}$$

가속도는 평균가속도의 극한으로, $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ 로 나타냅니다.

가속도 정의를 이용하여 뉴턴의 제2법칙을 다시 쓰면,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{입니다.}$$

또한, 변수 분리를 이용하면, $\vec{F} = m \frac{dx}{dt} \frac{d\vec{v}}{dx} = m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dx}$ 입니다.

위를 이용하면, F 에 관한 식이 주어졌을 때, 물체의 운동을 분석할 수 있습니다.

1) F 가 t 에 관한 식으로 주어지는 경우

만약, 질량이 2kg인 물체가 $t = 0$ 일 때, 원점(2.0,0)에 정지해 있다 하자.

이때, $\vec{F} = (24t^2)\hat{i} + (12t)\hat{j} + (2)\hat{k}$ 이 작용하는 경우

$t = 2$ 에서 물체의 위치와 속도를 구해보자.

힘을 물체의 질량인 2kg으로 나누면,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (12t^2)\hat{i} + (6t)\hat{j} + (1)\hat{k} \text{ 이다.}$$

위 식을 t 에 대해 적분하면,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = (4t^3)\hat{i} + (3t^2)\hat{j} + (t)\hat{k} + C \text{ 이고,}$$

$t = 0$ 일 때 $v = 0$ 이니 $C = 0$ 이다.

위 식을 다시 t 에 대해 적분하면,

$$\vec{x} = (t^4)\hat{i} + (t^3)\hat{j} + \left(\frac{1}{2}t^2\right)\hat{k} + C \text{ 이고,}$$

$t = 0$ 일 때 물체가 (2,0,0)에 위치하니 $C = 2\hat{i}$ 이다.

$t = 2$ 를 대입하면, $\vec{v} = 32\hat{i} + 12\hat{j} + 2\hat{k}$ 이고, $\vec{x} = 18\hat{i} + 8\hat{j} + 2\hat{k}$ 이다.

2) F가 v에 관한 식으로 주어지는 경우

① 질량이 m인 물체가 매끄러운 수평면에서 원점에서 v_0 의 속력으로 밀쳐지고, 운동 방향 반대로 $F(v) = -cv$ 에 해당하는 공기저항을 받는다. 이때, 시간에 따른 속도와 위치를 구해보자.

$$F = m \frac{dv}{dt} = -cv, \quad -\frac{m}{c} \frac{dv}{v} = dt \text{로 나타낼 수 있으며, 이를 적분하면}$$

$$\left(-\frac{m}{c}\right) [\ln v]_{v_0}^v = t \text{이며, } v = v_0 e^{-\frac{ct}{m}} \text{를 얻을 수 있다.}$$

$$\text{위 식을 적분하면, } x = \frac{mv_0}{c} \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) \text{이다.}$$

② 저항이 있는 유체 속에서 질량이 m인 물체가 속도에 비례하는 공기저항을 받으며 v_0 의 속력으로 떨어지는 경우를 생각해보자. 시간에 따른 속도를 구해보자.

아래 방향을 (+)로 설정하고, 비례상수를 c라 하여 식을 세워보자.

$$F = mg - cv = m \frac{dv}{dt} \text{이고, } \frac{m dv}{mg - cv} = dt \text{이다.}$$

$$\text{이를 적분하면, } \left(-\frac{m}{c}\right) \left[\ln \left(g - \frac{c}{m}v\right) \right]_{v_0}^v = t \text{이다.}$$

$$\text{이 식을 } v \text{에 대해 정리하면, } v = \frac{mg}{c} - \left(\frac{mg}{c} - v_0\right) e^{-\frac{c}{m}t} \text{를 얻을 수 있다.}$$

$$\text{이때, 충분한 시간이 지나서 } t \gg \frac{m}{c} \text{가 되면, 속도 } v = \frac{mg}{c} \text{에 수렴하게 되며,}$$

이를 종단속도 v_t 라 한다.

3) F가 v, x에 관한 식으로 주어지는 경우

질량에 m인 입자에 작용하는 힘이 $F = kvx$ 으로 주어진다. k는 양의 상수이고, $t = 0$ 일 때 입자는 원점을 v_0 의 속력으로 지난다. 시간에 따른 물체의 위치를 구해보자.

$$F = mv \frac{dv}{dx} = kvx, \quad m dv = kx dx \text{로 나타낼 수 있다.}$$

위 식을 적분하면, $mv - mv_0 = \frac{1}{2} kx^2$ 을 얻을 수 있다.

$$m \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} kx^2 + mv_0, \quad \frac{b dx}{x^2 + bv_0} = dt \text{이다.}$$

편의를 위해 $\frac{2m}{k} = b$ 라 두었다

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \text{를 이용하여 위의 식을 적분하자.}$$

$$\sqrt{\frac{b}{v_0}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{bv_0}} \right) = t \text{이다. } (\because t = 0 \text{ 일 때, } x = 0)$$

$$x = \sqrt{bv_0} \tan \left(\sqrt{\frac{v_0}{b}} t \right) \text{이고, } b \text{를 대입하면}$$

$$x = \sqrt{\frac{2mv_0}{k}} \tan \left(\sqrt{\frac{kv_0}{2m}} t \right) \text{를 구할 수 있다.}$$

지금까지 대표적인 경우들을 분석해 보았습니다.

이제 연습문제를 통해 다른 상황을 살펴봅시다.

연습 문제

- 어떤 입자의 운동이 $x = A \sin(2t - t^2)$ 로 주어진다. 처음으로 $v = 0$ 이 되는 시간과 그때의 위치와 가속도는?
- x축 위에서 운동하는 어떤 입자의 가속도가 $a = 5x(1 + kx^2)$ 로 주어진다. k는 양의 상수이다. $x = 0$ 일 때 처음 속력이 3m/s이고, $x = 0.1$ 에서 속력이 4m/s이다. k는?
- 질량이 m인 물체가 매끄러운 수평면에서 원점에서 v_0 의 속도로 밀쳐지고, 운동 방향 반대로 $F(v) = -cv^2$ 에 해당하는 공기저항을 받는다. 이때, 시간에 따른 속도와 위치는?
- 질량이 m인 금속 토막이 수평면을 따라서 미끄러진다. 이때, 끈끈한 기름에 의해 점성 저항이 $F(v) = -cv^{\frac{3}{2}}$ 로 주어진다. $x = 0$ 에서 초기 속도가 v_0 일 때, 물체가 이동할 수 있는 최대 변위는?
- 입자를 끌어당기는 힘이 역 제곱 법칙을 따라 $F(x) = -kx^{-2}$ 로 주어진다. 힘의 중심에서 a만큼 떨어진 지점에서 정지상태인 질량 m인 입자가 운동을 시작할 때, 원점에 도달하는 시간은?
- 질량이 m인 보트가 호수를 건넌다. 이때, 물에 의한 저항이 $F = -ae^{\beta v}$ 로 주어진다. $t = 0$ 일 때 초기 속도가 v_0 일 때, 물체가 정지할 때까지 걸린 시간과 이동한 거리는?
- 질량 m인 입자가 작용하는 힘이 $F = \frac{kx}{v}$ 와 같다. $t = 0$ 일 때 원점 $x = 0$ 을

속력 v_0 로 지나간다. 속력 v 를 거리 x 의 함수로 구하시오.

8. 어떤 입자의 속도가 위치에 따라 $v(x) = Ax^{-n}$ 과 같이 주어진다. A 와 n 은 양의 상수이다. $x = 0$ 에서 $x = x_0, v = v_0$ 이다. $x(t), v(t)$ 를 구하고, $v = \frac{1}{2}v_0$

일 때 시간을 $C \frac{x_0}{v_0}$ 의 형태로 표현하여라.

(단, C 는 n 만으로 표현된다.)

9. x 축에서 운동하는 어떤 입자의 가속도가 $a = -2k\sqrt{k^2 - v^2}$ 으로 주어진다. k 는 양의 상수이다. $t = 0$ 일 때, $x = 2m, v = 0$ 인 상태에서 운동을 시작한다.

$t = \frac{\pi}{3}$ 에서 $x = 1m$ 일 때, k 의 최솟값은? $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a})$ 을

이용하여라.

10. 물체를 수직 상방으로 v_0 의 속력으로 쏘아 올릴 때, 물체에 대한 공기저항이 속력의 제곱에 비례한다고 하자. 물체는 x_0 까지 올라가고 다시 내려온다.

수직 위 방향으로 올라갈 땐, $v^2 = Ae^{-2kx} - \frac{g}{k}$ 로 표현되고,

수직 아래 방향으로 내려올 땐, $v^2 = \frac{g}{k} - Be^{2kx}$ 로 표현된다.

A, B 는? ($k = \frac{c}{m}$ 이고, x 는 수직 위 방향을 양의 방향으로 택했다.)

11. 물체를 수직 위 방향으로 쏘아 올린 속도를 v_0 , 종단속도를 v_t 라 할 때, 10번을

이용하여 총알이 내려오면서 땅과 닿을 때의 속력을 $\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$ 과 같음을 보여라.