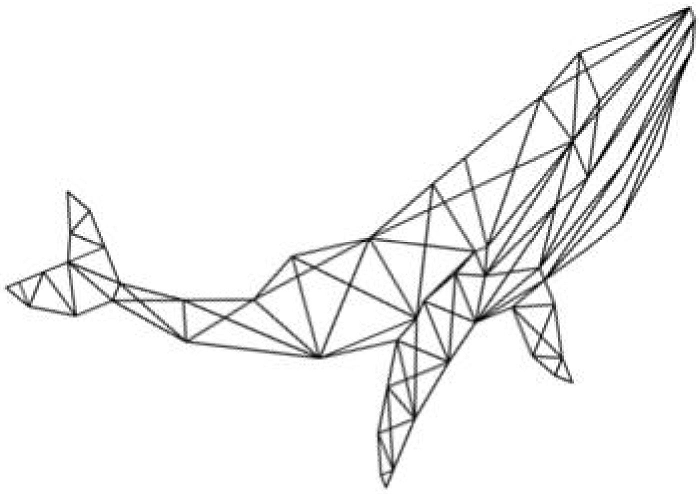
우주설 수학

3월 모의평가 대비 수학Ⅰ

우주설T



수학 I

(1) 지수와 로그

1. 지수와 로그의 연산

(변별력부여 : 연산을 위한 식 변형을 요구하는 유형)

1. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점][2019년 9월 나28]

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

2. 두 양수 a, b $(a>b)$에 대하여

$$9^a = 2^{\frac{1}{b}},\ (a+b)^2 = \log_3 64$$

일 때, $\dfrac{a-b}{a+b}$의 값은? [4점][2020년 사관학교 나15]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

3. 세 실수 a, b, c가 $\underline{abc \neq 0}$, $ab+bc+ca=abc$ 를 만족시킨다. $\log_2 x=a$, $log_3 x=b$, $log_5 x=c$일 때, 양수 x의 값은? [2010년 경찰대 02]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

4. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값을 구하시오.

(가) $2^a=3^b=k^c$
(나) $\log a+\log b-\log(a+b)=\log 2c$

5. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬때, k의 값은? [4점]

(가) $2^a=3^b=k^c$
(나) $ab+bc=2ac$

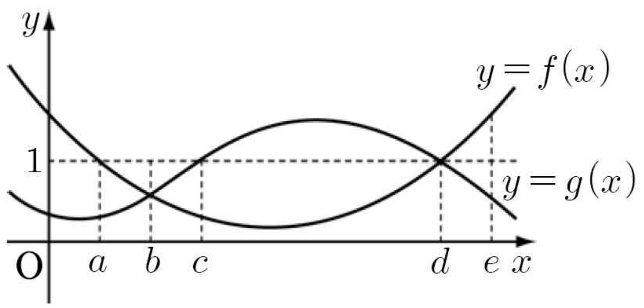
① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

2. 지수로그의 부등식

(풀이원칙 : 지수의 밑수, 로그의 밑을 통일한 뒤 정의역 비교를 통해 치역비교를 할 수 있는가?)

지수의 밑수 또는 로그의 밑 a에 대하여 $a>1$일 때, $x_1>x_2$이면, $f(x_1)>f(x_2)$는 필요 충분 조건입니다. $f(x_1)>f(x_2)$를 $x_1>x_2$로 대체할 수 있습니다.

6. 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. $0<x<e$에서 로그부등식 $\log_{f(x)} g(x)>1$를 만족하는 x 값의 범위는?[4점][2008년 5월 가나11]



① $0<x<a$ ② $a<x<b$ ③ $b<x<c$
④ $c<x<d$ ⑤ $d<x<e$

풀이핵심:
$\log_{f(x)} g(x)>1$를 $\log_{f(x)} g(x)>\log_{f(x)} f(x)$로 밑을 통일하고 시작하는가? **통일의 일관성**

7. 두 부등식 $\begin{cases} \log_y (1-x^2) \leqq 2 \\ 2^y \leqq 2\cdot 4^x \end{cases}$ 을 동시에 만족시키는 영역의 넓이는? [4점][2006년 사관학교 가12나16] (영역의 넓이가 교과 외라 풀기 싫으면 실근의 범위라도 표현합시다.)

① $\frac{1}{4}(\pi+1)$ ② $\frac{1}{4}(\pi+3)$ ③ $\frac{1}{4}(\pi+5)$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

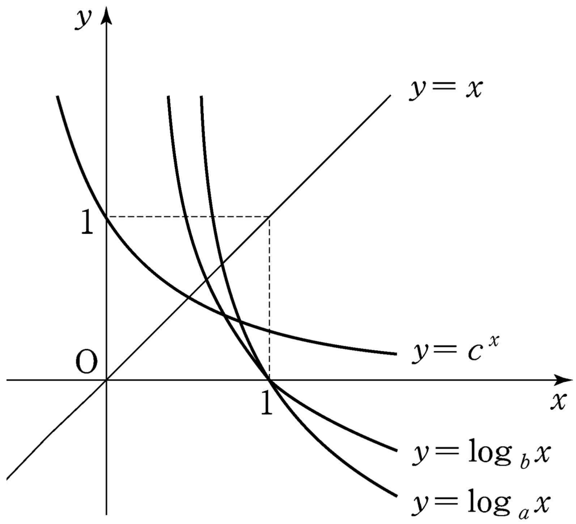
풀이핵심:
1. $\log_y (1-x^2) \leqq 2$ 에서 $2=\log_y y^2$로 보고,
$2^y \leqq 2\cdot 4^x$ 를 $2^y \leqq 2^{2x+1}$ 로 보고 비교
2. $y, (1-x^2)>0$을 놓치지 않는가?

그래프를 이용한 대소비교

8. 다음은 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 세 함수

$$y=\log_a x,\quad y=\log_b x,\quad y=c^x$$

의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 a, b, c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [3점] [2007년 9월 나08]



① $a>b>c$ ② $a>c>b$ ③ $b>a>c$
④ $b>c>a$ ⑤ $c>b>a$

9. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 a, b, c가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a}=2a,\qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b,\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$$

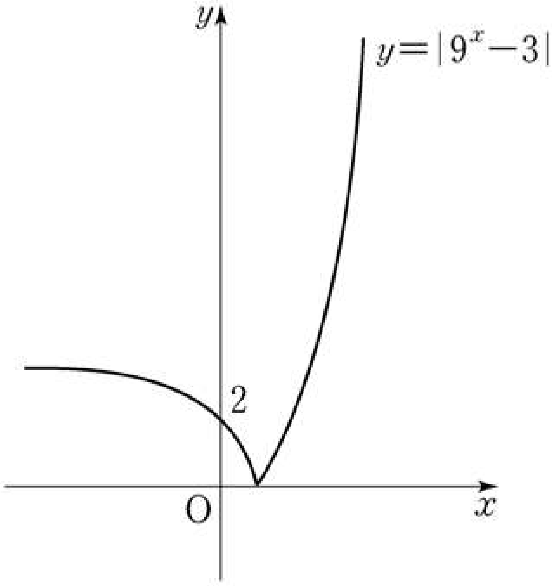
이때, 세 실수 a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? [4점][2010년 사관학교 가나24]

① $a<b<c$ ② $a<c<b$ ③ $b<a<c$
④ $b<c<a$ ⑤ $c<a<b$

대소비교를 판단하는 문제에서 값을 직접 구하려 하면 안 됩니다. 그래프 상에서 관찰되는 대소 관계로 풀어나가야 합니다.

10. 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점] [2015년 6월 가18]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

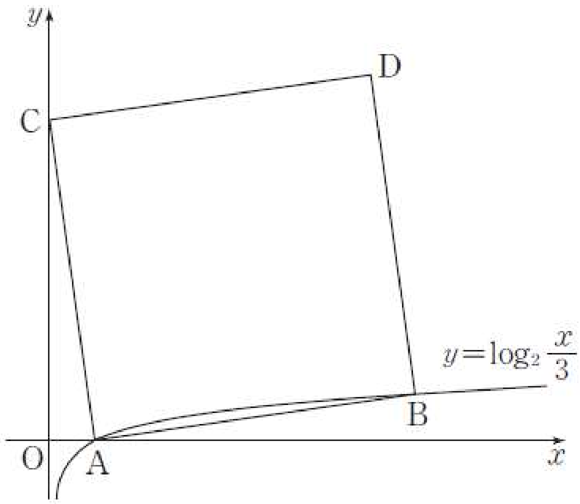


3. 지수로그함수 및 방정식

11. 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^{-x}+4$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=2$가 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<4$) [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

12. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=\log_2\frac{x}{3}$ 위의 제1사분면에 있는 점 B와 y축 위의 점 C에 대하여 사각형 $ABDC$가 정사각형일 때, 점 D의 y좌표는? [4점][2017년 전북10월 가14]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

13. 방정식

$$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점][2012년 6월 나29]

14. 방정식

$$4^x+4^{-x}-a(2^x+2^{-x})+a^2-26=0$$

의 실근의 개수가 3개이기 위한 a의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

출제의도: 대소비교에서 비교대상이 가지는 의미해석

15. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)=a^{2x}$, $g(x)=a^{x+1}-2$가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점][2012년 사관학교 가나24]

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a=4$일 때 $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

지수와 로그 기출분석 알고리즘 총 정리

출제 의도에
따른 구분

지수/로그 연산법칙을
이용할 수 있는가?

변별력을 부여?

교과서 개념을 사용하기 위한
식 변형을 요구하자.

1. 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.
2. 어떠한 방법으로 밑수/밑을 통일한다.
등 연산법칙을 사용하기 위함

지수/로그 방‘부등식 및
함수해석을 할 수 있는가?

1. 일대일 대응성질 이용
2. 밑/밑수의 값 인지 및 통일
3. 지수 및 진수 값 비교

(2) 삼각함수

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

혼동하지 말 것

16. $0 \leqq x \leqq \pi$일 때, x에 관한 방정식

$\left[\cos x + \dfrac{1}{2}\right] = x - k$의 정수해가 존재하도록 하는 k의

값의 합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)
[2009년 경찰대 16]

① 1 ② 2 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

17. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 모든 실수 x에 대하여

$$(\sin\theta)x^2 - 2(\cos\theta)x + 3\sin\theta \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha \le \theta \le \beta$이다. $\alpha + 3\beta$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}\pi$ ② 2π ③ $\frac{7}{3}\pi$ ④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ 3π

18. $0 < \alpha < \beta < \frac{3}{2}\pi$인 α, β에 대하여

$$\sin\alpha : \cos\alpha : \tan\beta = 4 : 3 : 5$$

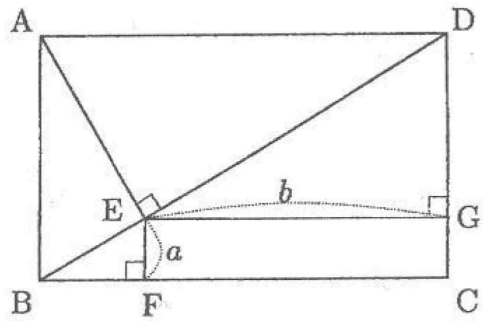
를 만족시킬 때, $\cos\beta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. 폐구간 $[0, \pi]$ 에서 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\cos x-3}$ 의 최댓값은? [2003년 경찰대 20]

20. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n=(2n)^\circ$ 라 하고, 한 변의 길이가 $\sin a_n$ 인 정사각형의 면적을 A_n으로 정의한다. 이 때, $\sum_{n=1}^{45} A_n$의 값을 구하시오. [4점][2003년 사관학교 가나29]

21. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 두 변 BC와 CD에 내린 수선의 발을 각각 F와 G라 하자. $\overline{\mathrm{EF}}=a$이고 $\overline{\mathrm{EG}}=b$ 일 때, 대각선 BD의 길이는? [2011년 경찰대 12]



① $\sqrt{2}(a+b)$ ② $2\sqrt{a^2+b^2}$ ③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

④ $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ⑤ $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

22. 원 $x^2+y^2=1$에 내접하는 정96각형의 각 꼭짓점의 좌표를 $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,\ (a_{96},\ b_{96})$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{96} a_n^2$ 의 값을 구하시오. [4점][2015년 경찰대 22]

23. 자연수 a와 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ 인 a에 대하여, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서

$$\sin(ax+b) = \frac{1}{2}$$

의 실근이 9개일 때, $\frac{60ab}{\pi}$ 의 값을 구하시오. [4점]

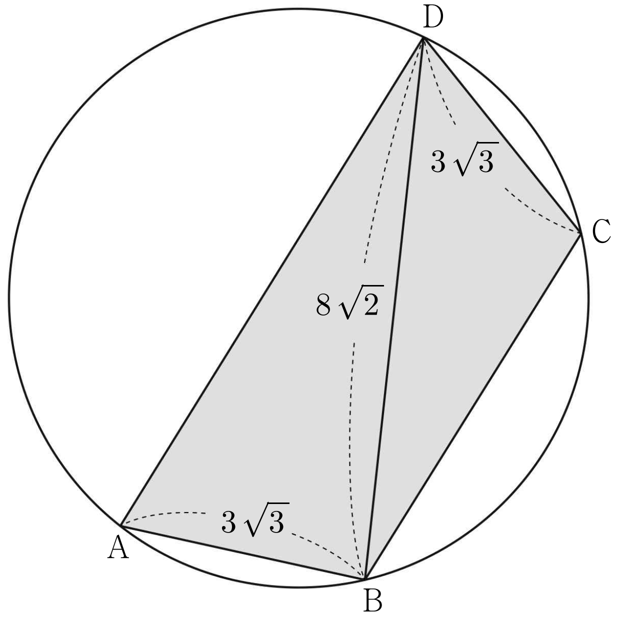
24. $0 \le x$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < \pi$에서 $f(x) = -\cos(ax) + b$ (단, $0 < a < 2$, $b < 2$) (나) 어떤 상수 c에 대하여 $f(x) = f(x+\pi) + c$ 이다.

함수 $g(t)$를 $t \ge 0$에서 $f(x) = t$의 실근의 개수를 로 정의할 때, $g(t)$는 $t = 1$에서만 불연속이다. $a+b+c$의 값은? [4점]

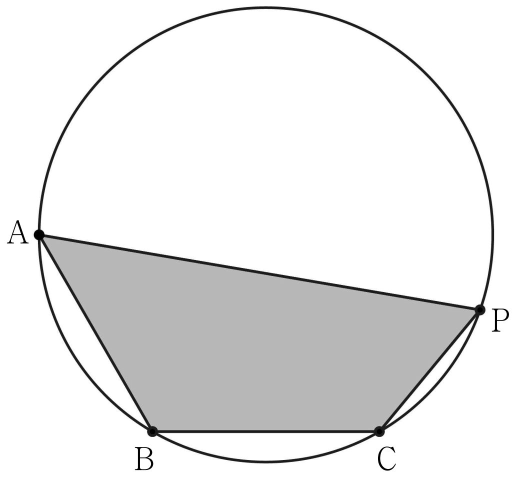
① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

25. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}=8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\dfrac{S^2}{13}$의 값을 구하시오. [4점] [2019년 고2 11월 모의평가]



26. 반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{CP}}=8$이다. 사각형 ABCP의 넓이는? [4점] [2019년 고2 9월 모의평가]

① $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$　③ $\dfrac{19\sqrt{3}}{3}$　④ $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}$



(3) 수열

1. 등차/등비수열

27. 일반항이 $a_n = 2^{1-n}$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점][2004년 9월 가나14]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{\log a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{S_n + a_n\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $S_n = \frac{1}{2}a_{n+1} + 2$가 성립한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = b_1 = 6$
(나) 수열 $\{a_n\}$은 공차가 p인 등차수열이고,
수열 $\{b_n\}$은 공비가 p인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되도록 하는 1보다 큰 모든 자연수 p의 합을 구하시오. [4점][2013년 10월 나30]

29. 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 T_n을

$T_n = \{S_k \mid k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$

이라 하자. 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점][2019년 7월 나29]

(빠른 풀이 발견해볼 것)

2. 여러 가지 수열

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=2}^{12} k^2 + \sum_{k=3}^{12} k^2 + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k^2$의 값은? [4점][2009년 4월 나27]

① 3376 ② 4356 ③ 5324 ④ 5840 ⑤ 6084

31. $a > 1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 $2^n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \log_5 a_k$의 값은? [4점][2014년 7월 나17]

① 185 ② 190 ③ 195 ④ 200 ⑤ 205

32. 집합 $U=\{x|x$는 30 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ ,\ a_{15}\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A의 임의의 두 원소 $a_i,\ a_j(i \neq j)$에 대하여

$$a_i+a_j \neq 31$$

(나) $\sum_{i=1}^{15} a_i = 264$

$\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2$의 값을 구하시오. [4점][2015년 3월 나30]

33. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_{n+1}=n(-1)^n-3a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ )$$

으로 정의한다. $a_1=a_{2012}+2$일 때, $\sum_{n=1}^{2011} a_n$의 값은?

[2012년 경찰대 14]

① 501 ② 351 ③ 251 ④ -251 ⑤ -501

34. $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$의 값은? [2013년 경찰대 16]

① 250　② 254　③ 258　④ 262　⑤ 266

35. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정사각형의 개수를 a_n이라 하자.

(가) 한 변의 길이가 n이고 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다. (나) 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{16}x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

a_3+a_4의 값은? [4점][2018년 사관학교 가18]

① 21　② 23　③ 25　④ 27　⑤ 29

매우 위험한 문항

36. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_n = n^2 + n + 1$$

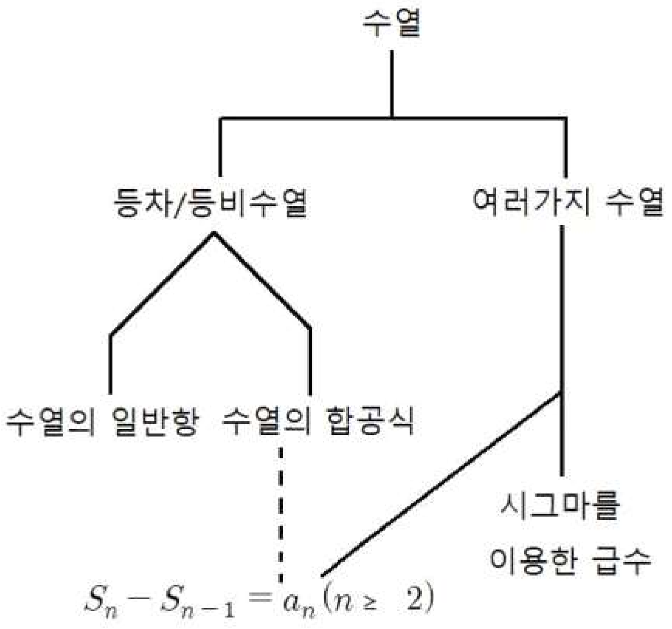
일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}$의 값을 구하시오. [3점]

37. 수열 $\{a_n\}$이 50이하의 모든 자연수 n과, 모든 양의 홀수 m에 대하여

$$a_n + a_{100-n} = \frac{n^2}{101}\ ,\quad a_m + a_{m+1} = \frac{9(m+1)}{50}$$

를 만족시킨다. $a_{100} - a_{50}$의 값을 구하시오. [4점]

수열 출제의도 알고리즘



$S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$**같은 경우**

등차/등비수열은 일반항의 형식이 있는 수열인 만큼

출제되기 어렵다. 개인적으로 출제하면 안 된다는 입장.

그러나 아예 출제될 수 없는 것은 아니기 때문에 점선표시.

특히 여러 가지수열 고난이도 문항은 저 알고리즘만 잘

소화해주면 무리 없이 풀 수 있다.

알고리즘 적용연습

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$ (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은? [4점]

① 704 ② 712 ③ 720 ④ 728 ⑤ 736

2020학년도 수능 수학 (나)형 21번 문항입니다.

노가다로 풀어낸 학생이 꽤 많았습니다.

그런데 과연 이 문제의 출제의도가 노가다일까요?

그리고 그렇게 풀어낸다고 실력이 늘까요?

(가) $a_{2n}=a_n-1$ (나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은?

알고리즘에 따라 위 문항은 여러 가지 수열에서

출제되었고 출제 의도는 시그마를 이용한 급수입니다.

따라서 이 문항은 제시된 식의 양변에 시그마를

취하거나, $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{k(k+1)}{2}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

등을 쓰면 문제가 풀리도록 설계가 되어 있을 겁니다.

(가)의 식에 양변에 $\sum$를 취하면 수열의 짝수 항이

(나)의 식에 양변에 $\sum$를 취하면 수열의 홀수 항이

나오는 것을 알 수 있습니다.

단, (나)식은 a_3부터 나올 수 있습니다.

알고리즘을 작성하고 훈련하면 여기까지의 사고가

3초안에 이루어집니다.

한번 출제의도대로 다시 풀어보도록 합시다.

지금까지의 사고와 구하는 것이 $\sum_{n=1}^{63} a_n$라는 것을 통해

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{63} a_n &= a_1+(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{63}) \\
&\quad +(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{62}) \\
&= a_1+\left(\sum_{n=1}^{31}(\text{나})\text{식}\right)+\left(\sum_{n=1}^{31}(\text{가})\text{식}\right) \\
&= a_1+\left(\sum_{n=1}^{31}2a_n+1\right)+\left(\sum_{n=1}^{31}a_n-1\right) \\
&= a_1+3a_1+3\left(\sum_{n=2}^{31}a_n\right) \\
&= a_1+3a_1+3\left\{\left(\sum_{n=1}^{15}(\text{나})\text{식}\right)+\left(\sum_{n=1}^{15}(\text{가})\text{식}\right)\right\} \\
&= a_1+3a_1+3\left\{\left(\sum_{n=1}^{15}2a_n+1\right)+\left(\sum_{n=1}^{15}a_n-1\right)\right\} \\
&= a_1+3a_1+3^2\left\{\sum_{n=1}^{15}a_n\right\} \\
&= a_1+3a_1+3^2a_1+3^2\left\{\left(\sum_{n=1}^{7}(\text{나})\text{식}\right)+\left(\sum_{n=1}^{7}(\text{가})\text{식}\right)\right\} \\
&= a_1+3a_1+3^2a_1+3^3\left\{\sum_{n=1}^{7}a_n\right\} \\
&\ \ \vdots \\
&= a_1+3a_1+3^2a_1+3^3a_1+3^4a_1+3^5a_1 \\
&= 364a_1
\end{aligned}$$

$a_{20}=1$에 대하여 a_{20} 또한 마찬가지로

(가), (나)식을 활용하면

$a_{10}=2,\ a_5=3,\ a_2=1,\ a_1=2$가 유도됩니다.

따라서 답은 728이 됩니다.

처음부터 (가),(나)식을 더해서 생각할 수 도 있으나

좀 더 모두가 생각할 수 있는 방향으로 분석했습니다.

'기출분석은 문제풀이의 시작을 완성시켜주는 도구'

정답과 해설

3월 모의평가 대비 수학1				본문			1~20 쪽		
1	75	2	④	3	③	4	36	5	⑤
6	②	7	③	8	①	9	①	10	②
11	①	12	⑤	13	36	14	⑤	15	③
16	⑤	17	④	18	②	19	$\frac{1}{2}$	20	23
21	⑤	22	48	23	20	24	⑤	25	192
26	②	27	③	28	③	29	273	30	⑤
31	⑤	32	184	33	④	34	①	35	①
36	201	37	34						

1) 75

$3^a = 5^b = k^c = X$라고 하면 $3 = X^{\frac{1}{a}}, 5 = X^{\frac{1}{b}}, k = X^{\frac{1}{c}}$이다.

한편 주어진 조건에서 $\frac{1}{c} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$ 이므로

$X^{\frac{1}{c}} = X^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}} = X^{\frac{1}{2a}}X^{\frac{1}{b}}$ 이다.

즉, $k = \sqrt{3} \times 5$이다.

따라서 $k^2 = 75$

2) ④

사고과정.

1. 출제 의도는 지수/로그의 연산이구나.

$\Downarrow$

2. 지수와 로그 값이 각각 하나씩만 제시 되어 있다.

$\Downarrow$

3. 둘 다 지수이거나 둘 다 로그여야 연산이 가능하므로 연산이 가능하도록 $9^a = 2^{\frac{1}{b}}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취해 식을 변형할 생각을 한다.

(실전개념에서 식 변형에 대한 학습을 했다면 사고 가능)

$\log_3 9^a = \log_3 2^{\frac{1}{b}}$, $a\log_3 9 = \frac{1}{b}\log_3 2$

$2a = \frac{1}{b}\log_3 2$, $2ab = \log_3 2$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+b)^2 - 2\times 2ab\\ &= \log_3 64 - 2\times\log_3 2\\ &= \log_3 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a+b} &= \sqrt{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}} \ (\because a > b > 0)\\ &= \sqrt{\frac{\log_3 16}{\log_3 64}}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

3) ③

1. 방/부등식, 함수는 아니니 역시 연산이 출제의도.

그 중에서도 로그연산이 출제의도일 가능성이 매우 높다.

2. 따라서 $\underline{abc \neq 0}$, $ab+bc+ca = abc$ 도 로그연산에 사용될 가능성이 매우 높다. 우리가 연산해야할 로그는?

3. $\log_2 x = a, \log_3 x = b, \log_5 x = c$ 이것이다. 이 들은 로그연산법칙을 사용하기에는 밑이 통일되어 있지 않다.

4. 식 변형은 목적에 맞게 밑을 통일하는 방향으로 한다. 역수를 취해 밑을 x로 통일하는 생각을 할 수 있다.

$\log_x 2 = \frac{1}{a}$, $\log_x 3 = \frac{1}{b}$, $\log_x 5 = \frac{1}{c}$를 얻고

나머지 단서들을 사용하면 풀이가 끝난다.

주어진 식에서 양변을 abc로 나누면

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$,

답은 3번입니다.

4) 36

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2c}$에서 로그의 연산하면 쉽게 알 수 있다.

5) ⑤

생략.

6) ②

(i) $0<f(x)<1$ 일 때, $f(x)>g(x)$ 의 해는 $a<x<b$ 이다.
(ii) $f(x)>1$ 일 때, $f(x)<g(x)$ 의 해는 $0<x<e$ 에서 없다.
∴ (i), (ii) 에 의하여 해는 $a<x<b$

7) ③

문제를 제대로 풀기 전 밑/진수 조건에 따라
(i) $0<y<1$ 일 때, (ii) $y>1$ 일 때로 케이스 분류를 해야 한다는 것과 $-1<x<1$부터 얻고 이에 경각심을 품은 상태로 풀이를 이어가야 합니다.

출제의도가 지수 로그 부등식이기 때문에
1.밑수/밑 통일 2.지수/진수 비교 (일대일대응성질이용)의 과정으로 푸는 게 교과서 개념에 적합하다.
그렇게 하면 $\log_y(1-x^2) \leqq 2$ 에서 $2=\log_y y^2$로 보고, $2^y \leqq 2\cdot 4^x$ 를 $2^y \leqq 2^{2x+1}$ 로 보고 비교하면 된다.

$\log_y(1-x^2) \leqq 2$ 에서 y는 로그의 밑이므로 $y>0$, $y \neq 1$이고
$1-x^2>0$ (∵ 로그의 진수) $\Leftrightarrow -1<x<1$

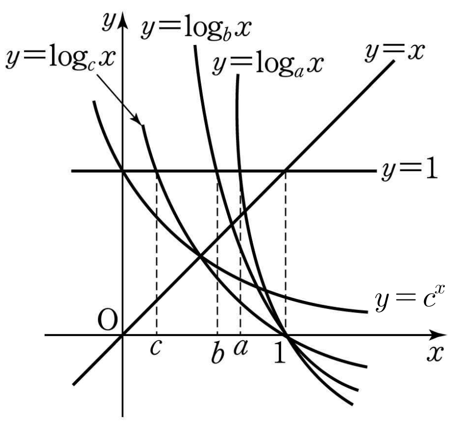
(i) $0<y<1$ 일 때, $\begin{cases} 1-x^2 \geqq y^2 \\ y \leqq 2x+1 \end{cases}$, $-1<x<1$

(ii) $y>1$ 일 때, $\begin{cases} 1-x^2 \leqq y^2 \\ y \leqq 2x+1 \end{cases}$, $-1<x<1$

이므로 영역의 넓이는 $\dfrac{\pi+5}{4}$

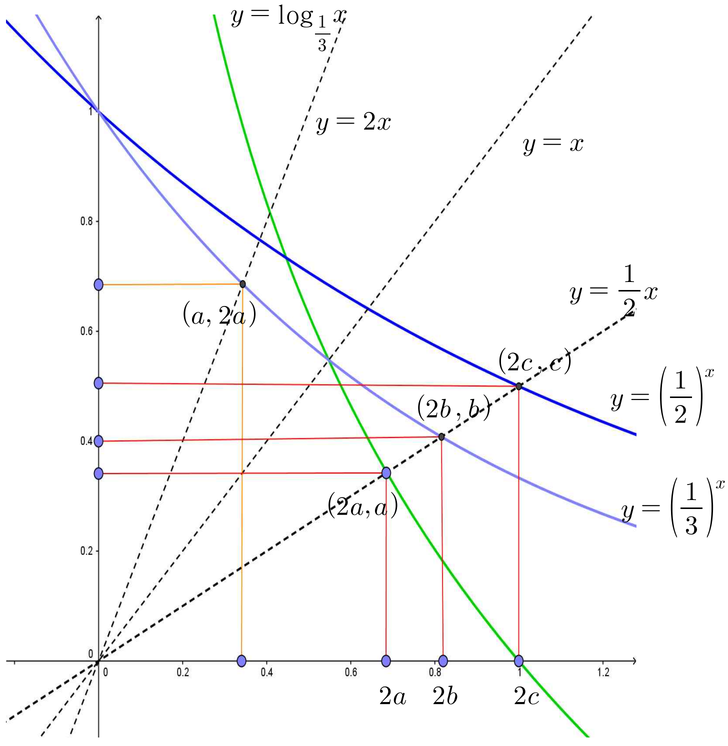
8) ①

$y=c^x$의 역함수 $y=\log_c x$를 나타내어 직선 $y=1$과의 교점의 x좌표를 구한다.



∴ $a>b>c$

9) ①



∴ $a<b<c$

10) ②

$f(x)=\left|9^x-3\right|$ 라 하고 $g(x)=2^{x+k}$라 하면
$x<0$에서 근을 갖기 위해서 $f(0)<g(0)$이어야 하므로
$2<2^k$이고,
$0<x<2$에서 근을 갖기 위해서 $f(2)>g(2)$이어야 하므로
$78>2^{2+k}$이다.
따라서
$\therefore 2<2^k<\dfrac{78}{4}=\dfrac{39}{2}=19.5$
만족하는 k는 2, 3, 4이다.
∴ 모든 자연수의 합은 9이다.

11) ①

$y=k$와 두 곡선을 연립하면,
$\mathrm{A}(\log_2 k, k)$, $\mathrm{B}(-\log_2(4-k), k)$를 얻는다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\left|\log_2 k(4-k)\right|=2$에 대하여

$k(4-k)=4$ 또는 $k(4-k)=\dfrac{1}{4}$이면 된다.

중근 $k=2$에 유의하여 근과 계수와의 관계를 쓰면
모든 k의 값의 곱이 $\dfrac{1}{2}$인 것을 알 수 있다.

12) ⑤

점 A 는 곡선 $y=\log_2 \dfrac{x}{3}$ 가 x 축과 만나는 점이므로

$\log_2 \dfrac{x}{3}=0$, $x=3$ 에서 $A(3, 0)$

곡선 $y=\log_2 \dfrac{x}{3}$ 위의 점 B 의 좌표를

$B\left(a, \log_x \dfrac{a}{3}\right)$ 라 하고, 점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$\overline{AH}=a-3$, $\overline{BH}=\log_2 \dfrac{a}{3}$

$\overline{AC}=\overline{AB}$, $\angle COA=\angle AHB=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle CAO=\angle ABH$

이므로

삼각형 ACO 와 삼각형 BAH 는 합동이다.

$\overline{BH}=\overline{OA}$ 이므로 $\log_2 \dfrac{x}{3}=3$, $\dfrac{a}{3}=8$

따라서 $a=24$

$\overline{AH}=\overline{OC}$ 이므로 $\overline{OC}=24-3=21$

점 D 의 y 좌표를 b 라 하면

선분 AD 의 중점과 선분 BC 의 중점이 같으므로

$\dfrac{0+b}{2}=\dfrac{3+21}{2}$

즉, $b=24$

따라서 점 D 의 y 좌표는 24이다.

13) 36

$2^x-2^{-x}=t$ 라 하면

(x 가 실수일 때, t 도 범위의 제한이 없는 실수이다.)

$4^x+4^{-x}=t^2+2$ 이다.

주어진 지수방정식이 실근을 갖으려면

$t^2+at+9=0$ 의 근도 실근이어야 한다.

따라서 $D=a^2-36 \geqq 0$

양수 a 의 범위는 $a \geqq 6$, 최솟값은 $m=6$

$\therefore m^2=36$

14) ⑤

$2^x+2^{-x}=f(x)$라 하면,

$f(x)^2-af(x)+a^2-28=0$에 대하여

$f(x)$에 관한 이차방정식이기 때문에

$f(x)=\alpha, \beta$로 $f(x)$는 최대 2개의 실근 을 갖는다.

한편 $f(x)=f(-x)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 2를 갖고 대칭인 이차함수와 비슷한 형태의 그래프가 그려진다.

이 상황에서 $y=\alpha, y=\beta$와의 교점이 총 3개이려면

$\alpha=2$, $\beta>2$이어야 한다.

$f(x)=2$일 때 방정식이 성립 하는 것을 알아내었으므로,

$f(x)^2-af(x)+a^2-28=0$에 대입하면

$a^2-2a-24=(a-6)(a+4)=0$

$a=-4$ 또는 6인데

$a=-4$이면,

$f(x)^2+4f(x)-12=(f(x)-2)(f(x)+6)=0$

이므로 $f(x)=2$ 또는 -6인데, $f(x)\geq 2$이므로 $f(x)=-6$의 실근이 존재하지 않아 실근의 개수가 3개가 될 수 없다.

$a=6$이면,

$f(x)^2-6f(x)+8=(f(x)-2)(f(x)-4)=0$

이므로 $f(x)=2$ 또는 4인데, $f(x)=4$의 실근이 2개

$f(x)=2$의 실근이 1개 이므로 실근의 개수가 3개가 될 수 있다.

따라서 $a=6$

15) ③

$f(x)-g(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2$

따라서 $a^x=t$라 하면

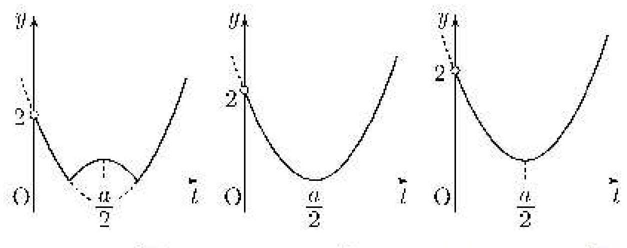
$f(x)-g(x)=t^2-at+2$

이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8=0$에서 $a=2\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

$y=t^2-at+2$는 대칭축이 $t=\dfrac{a}{2}$이고 y절편이 2인 이차함수이므로

a의 크기에 따라서 $y=|t^2-at+2|$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$a>2\sqrt{2}$ $\qquad$ $a=2\sqrt{2}$ $\qquad$ $1<a<2\sqrt{2}$

이때, $t=a^x$는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일대응이고

$x_1<x_2$에 대하여 $t_1<t_2$를 만족한다. …… ㉠

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$ 일 때, $y=|t^2-at+2|$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 (접하므로)

$y=h(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만난다. ($\because$ ㉠) (참)

ㄴ. $a=4$일 때,

$t^2-4t+2=0$에서 $t=2\pm\sqrt{2}$ 이므로

$y=|t^2-at+2|$의 그래프는 $0<t<2-\sqrt{2}$ 에서 감소하고

$2-\sqrt{2}<t<2$에서 감소한다. …… ㉡

$x<\frac{1}{2}$일 때, $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로 ㉠, ㉡에 의해서 $h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $y=t^2-at+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다.

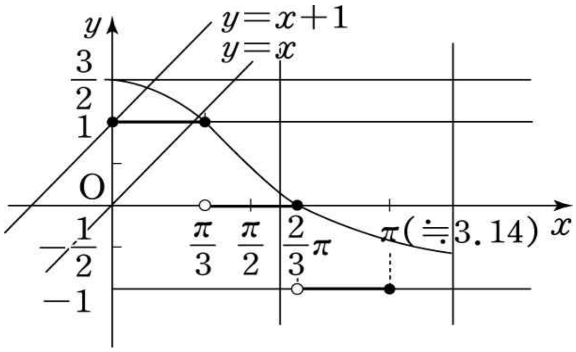
$t^2-at+2=1$에서 $t^2-at+1=0$

위의 방정식은 $a=2$일 때 중근을 가지므로 $a=2$일 때, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16) ⑤

다음의 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$ 그래프에서



i) $x=0$인 경우

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=1=-k \quad \therefore\ k=-1$

ii) $0<x\leq\frac{\pi}{3}(≒1.05)$인 경우

정수 $x=1$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=1=1-k \quad \therefore\ k=0$

iii) $\frac{\pi}{3}(≒1.05)<x\leq\frac{2}{3}\pi(≒2.11)$인 경우 정수

$x=2$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=0=2-k \quad \therefore\ k=2$

iv) $\frac{2}{3}\pi(≒2.11)<x\leq\pi(≒3.14)$인 경우 정수

$x=3$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=-1=3-k \quad \therefore k=4$

따라서 주어진 방정식의 정수해가 존재하도록 하는 k의 값의 합은 $-1+0+2+4=5$이다.

17) ④

최고차항의 계수가 양수가 돼서 이차함수가 되어야 하는 조건도 만족했는지 묻는 문항

18) ②

$\cos\alpha=3k$, $\sin\alpha=4k$, $\tan\beta=5k$라 하면,

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$에 의해, $k=\frac{1}{5}$ 또는 $-\frac{1}{5}$에서

$k=-\frac{1}{5}$일 경우

$0<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$를

만족시키는 α,β는 존재하지 않는다.

$k=\frac{1}{5}$일 경우

$\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\tan\beta=1$

에서 α는 제 1사분면에 존재하는 점에 대한 동경인데

$\tan\alpha=\frac{4}{3}>\tan\beta=1$이므로 β가 제 1사분면에 존재하는 점에 대한 동경이라면 $\alpha>\beta$이므로 조건 불만족

$0<\alpha<\beta<\frac{3}{2}\pi$를 만족시키려면

β는 제3 사분면에 존재하는 $\frac{5}{4}\pi$임을 알 수있다.

따라서 $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

19) $\frac{1}{2}$

$\cos x = X$, $\sin x = Y$라 하면

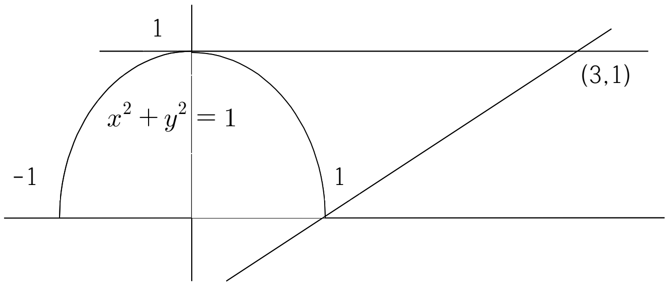
$-1 \le X \le 1$, $0 \le Y \le 1$ 이고,

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 이므로

$X^2 + Y^2 = 1\ (-1 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$ ⋯ (ㄴ)

주어진 함수는 $y = \dfrac{Y-1}{X-3}$ 이므로

y는 원 위의 점 $(X,\ Y)$와 $(3,\ 1)$을 잇는 직선의 기울기이다.



그래프에서 y의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

20) 23

$A_n = \sin^2 a_n$ 이므로

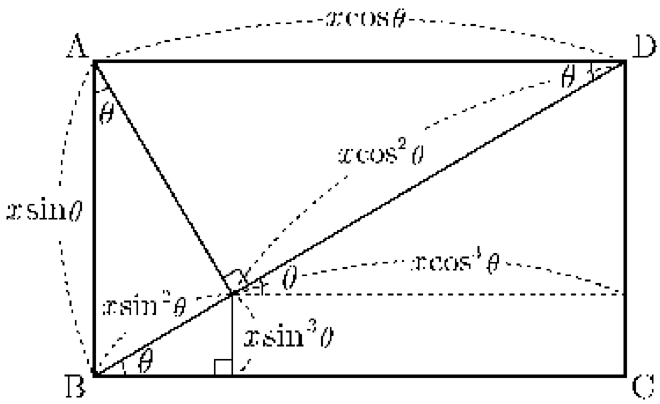
$$\sum_{n=1}^{45} A_n = \sin^2 a_1 + \sin^2 a_2 + \cdots + \sin^2 a_{45}$$

$= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \cdots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 90^\circ$

$= 22 + 1 = 23$

$(\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2(90^\circ - A) = 1)$

21) ⑤



$\angle ADB = \angle DBC = \angle BAE = \angle DEG$이므로 이 각을 θ라 하고 $\overline{BD} = x$라 하면

$\overline{AB} = x\sin\theta$,

$\overline{BE} = \overline{AB}\sin\theta = x\sin^2\theta$, $\overline{EF} = \overline{BE}\sin\theta = x\sin^3\theta$

$\overline{AD} = x\cos\theta$,

$\overline{DE} = \overline{AD}\cos\theta = x\cos^2\theta$, $\overline{EG} = \overline{DE}\cos\theta = x\cos^3\theta$

$\therefore\ a = x\sin^3\theta$, $b = x\cos^3\theta$

$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}\sin^2\theta + x^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta = x^{\frac{2}{3}}$ $(\because$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$ 이므로

$$x = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

22) 48

$P_n(a_n,\ b_n)(n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 96)$이라 하면

$\angle P_nOP_{n+1} = \dfrac{\pi}{48}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 95)$이다.

동경 OP_n이 x축 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하면

점 P_n이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $a_n = \cos\theta_n$이다.

그런데 $\angle P_nOP_{n+48} = \dfrac{\pi}{48} \times 48 = \pi$이므로

$(a_{n+48})^2 = \cos^2(\theta_n + \pi) = \cos^2\theta_n = (a_n)^2$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{96} a_n^2 = 2\sum_{n=1}^{48} a_n^2$이다.

또한, $\angle P_nOP_{n+24} = \dfrac{\pi}{48} \times 24 = \dfrac{\pi}{2}$이므로

$(a_n)^2 + (a_{n+24})^2 = \cos^2\theta_n + \cos^2\left(\theta_n + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$= \cos^2\theta_n + \sin^2\theta_n = 1$

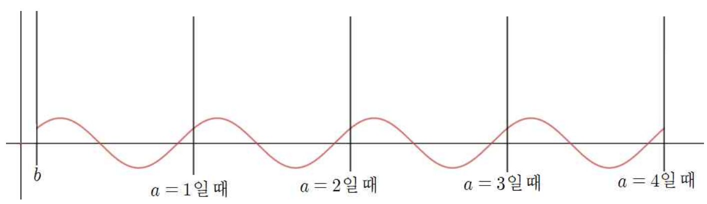
이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{48} a_n^2 = \sum_{n=1}^{24}\left\{(a_n)^2 + (a_{n+24})^2\right\} = \sum_{n=1}^{24} 1 = 24$이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{96} a_n^2 = 2\sum_{n=1}^{48} a_n^2 = 2 \times 24 = 48$

23) 20

$ax + b = T$라고 하면 $b \le T \le 2a\pi + b$에서 $\sin x$의 그래프를 그려보자.



a값에 따라 그래프가 그려지는 정도가 달라지는데

$a = 4$이고 $\sin b = \dfrac{1}{2}$이면 $\sin(ax + b) = \dfrac{1}{2}$의 실근이9개가 될 수 있다. $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $b = \dfrac{\pi}{6}$

따라서 답은 20

24) ⑤

$a=\frac{3}{2}$, $b=1$, $c=1$일 때, 성립합니다.

$0<a<1$이여서 그래가 증가만 할 때 안되는 것을 발견

$1<a<2$일 때 무한히 발생하는 극값들에 대해

불연속점이 아니게 하기 위한 대책을 생각하여

$a=\frac{3}{2}$을 추론, 연속함수 조건을 통해 $c=1$을 추론

$t=1$에서만 불연속을 통해 $b=1$을 추론

이해되지 않는다면 현 시점에서 이해할 필요는 없음

수2, 미적분에서 실근의 개수유형 학습필요.

25) 192

삼각형 ABD에서 $\angle \mathrm{ADB}=\alpha$라 할 때,

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\alpha}=12$

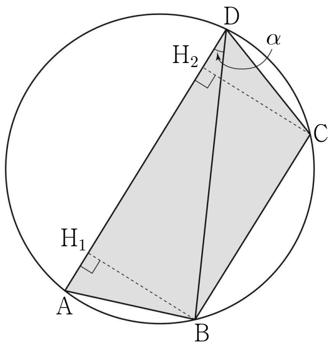
$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로 $\angle \mathrm{ADB}=\angle \mathrm{CBD}$

선분 AD와 선분 BC는 평행하므로

사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 할 때,

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\cos\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}=2\sqrt{26}$

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{BD}}\sin\alpha=8\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{6}$

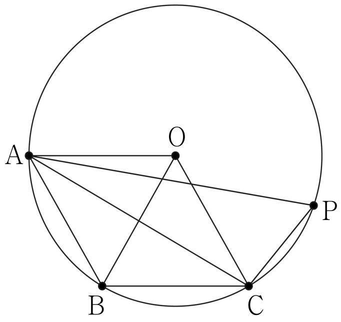
$\overline{\mathrm{AH_1}}=\overline{\mathrm{DH_2}}$ 이므로 사각형 ABCD의 넓이

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BC}})\times\overline{\mathrm{BH_1}}\\&=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\overline{\mathrm{DH_1}}+\overline{\mathrm{AH_1}}\right)+\left(\overline{\mathrm{DH_1}}-\overline{\mathrm{DH_2}}\right)\right\}\times\overline{\mathrm{BH_1}}\\&=\overline{\mathrm{DH_1}}\times\overline{\mathrm{BH_1}}\\&=2\sqrt{26}\times2\sqrt{6}=8\sqrt{39}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{S^2}{13}=192$

26) ②

[출제의도] 코사인법칙을 활용하여
문제 해결하기



원의 중심을 O라 하자.
두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=3$

삼각형 ABC에서 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{2\pi}{3}$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\frac{2\pi}{3}=27$

$\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{3}$

사각형 ABCP가 원에 내접하므로

$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{APC}=\pi$ 즉, $\angle\mathrm{APC}=\frac{\pi}{3}$

$\overline{\mathrm{AP}}=x$, $\overline{\mathrm{CP}}=y$라 하면

삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2=x^2+y^2-2xy\cos\frac{\pi}{3}$

$27=(x+y)^2-3xy$

$x+y=8$이므로 $xy=\frac{37}{3}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ACP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{37\sqrt{3}}{12}$

따라서 사각형 ABCP의 넓이는

$\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{37\sqrt{3}}{12}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

27) ③

$a_n=2^{1-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ㄱ. $\log a_n=\log\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(n-1)\log\frac{1}{2}$ 이므로

수열 $\{\log a_n\}$은 첫째항이 0 공차가 $\log\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

∴ 참

ㄴ. $S_n+a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2$ 이므로

수열 $\{S_n+a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 1인 등비수열이다. ∴ 참

ㄷ. $\frac{1}{2}a_{n+1}+2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\neq2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=S_n$

이므로 $S_n\neq\frac{1}{2}a_{n+1}+2$ ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

28) ③

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+p(m-1)$인 자연수 m이 존재한다.

$p(m-1)=6p^{n-1}-6$

$m-1=\dfrac{6p^{n-1}-6}{p}=6p^{n-2}-\dfrac{6}{p}$

$\dfrac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$

p^{n-2} $(n\geq 2)$과 m은 모두 자연수이므로 $\dfrac{6}{p}$도 자연수이다.

따라서 p는 6의 약수이다.

$\therefore$ $p=2,\ 3,\ 6$ ($\because$ $p>1$)

그러므로 모든 자연수 p의 합은 $2+3+6=11$이다.

[다른 풀이]

$a_m=b_2$인 자연수 m이 존재하므로 $6+(m-1)p=6p$에서

$m-1=\dfrac{6(p-1)}{p}=6-\dfrac{6}{p}$

$\dfrac{6}{p}$이 자연수이어야 하므로 p는 6의 약수이다.

(i) $p=2$일 때

$a_m=4+2m,\ b_n=6\cdot 2^{n-1}$

(ii) $p=3$일 때

$a_m=3+3m,\ b_n=6\cdot 3^{n-1}$

(iii) $p=6$일 때

$a_m=6m,\ b_n=6^n$

(i), (ii), (iii)의 모든 경우 임의의 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 m이 존재하므로 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$의 항이 된다.

$\therefore$ $p=2,\ 3,\ 6$이고 모든 자연수 p의 합은 11이다.

29) 273

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a\neq 0)$, 공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$이므로

$\dfrac{9(2a+8d)}{2}=\dfrac{18(2a+17d)}{2}$

$a=-13d$

$S_n=\dfrac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\dfrac{d}{2}n(n-27)$

$S_1=S_{26}=-13d$,

$S_2=S_{25}=-25d$,

$S_3=S_{24}=-36d$,

$\vdots$

$S_{13}=S_{14}=-91d$,

$S_{27}=0,\ S_{28}=14d,\ S_{29}=29d,\ \cdots$

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은

$13,\ 14,\ \cdots,\ 26$

따라서 모두 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=273$

30) ⑤

(준식)$=1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3=\sum_{k=1}^{12}k^3=6084$

31) ⑤

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$이므로

$2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \cdots$

$a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서

$\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{40}{4}$

$=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{40(40+1)}{2}=205$

32) 184

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i\,(1 \le i \le 15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15} a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{30} i^2$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + \sum_{i=1}^{15} 31^2 - 62\sum_{i=1}^{15} a_i + \sum_{i=1}^{15} a_i^2 = \frac{30\times31\times61}{6}$$

조건 (나)에 의해

$$2\sum_{i=1}^{15} a_i^2 + 15\times31^2 - 62\times264 = 5\times31\times61$$

$$\sum_{i=1}^{15} a_i^2 = \frac{1}{2}\left(5\times31\times61 - 15\times31^2 + 62\times264\right)$$

$$= \frac{31}{2}(5\times61 - 15\times31 + 2\times264)$$

$$= \frac{31}{2}(-5\times32 + 2\times264)$$

$$= 31\times184$$

따라서 $\frac{1}{31}\sum_{i=1}^{15} a_i^2 = 184$

33) ④

$a_{n+1}+3a_n = n(-1)^n$에서

$$\sum_{n=1}^{2011}(a_{n+1}+3a_n) = \sum_{n=1}^{2011} a_{n+1} + 3\sum_{n=1}^{2011} a_n$$

$$= \sum_{n=2}^{2012} a_n + 3\sum_{n=1}^{2011} a_n$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{2011} a_n - a_1 + a_{2012}\right) + 3\sum_{n=1}^{2011} a_n$$

$$= 4\sum_{n=1}^{2011} a_n + (a_{2012} - a_1)$$

$= 4\sum_{n=1}^{2011} a_n - 2$ ($\because$ $a_1 = a_{2012}+2$)이고

$$\sum_{n=1}^{2011} n(-1)^n = -1+2-3+4-\cdots-2011$$

$$= -1+(2-3)+(4-5)+\cdots+(2010-2011)$$

$$= (-1)\times1006$$

$$= -1006$$

$4\sum_{n=1}^{2011} a_n - 2 = -1006$에서 $\sum_{n=1}^{2011} a_n = \frac{-1004}{4} = -251$

34) ①

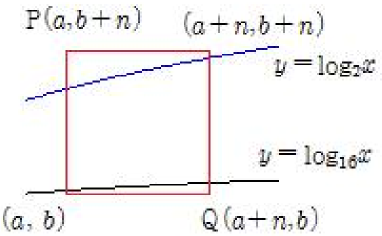
$$\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ \cdots\ +\frac{1}{20}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{1}(2k+1)\left(\frac{1}{1}\right) + \sum_{k=1}^{2}(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=1}^{3}(2k+1)\left(\frac{1}{3}\right) +$$

$$\cdots + \sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{20} n(n+2)\times\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{20}(n+2) = 250$$

35) ①



한 변의 길이가 3이거나 4인 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 정사각형의 변은 그림과 같이 좌표축에 평행인 것뿐이다.

네 꼭짓점의 좌표를 그림과 같이 두면,

P는 $y=\log_2 x$ 위에, Q는 $y=\log_{16} x$아래에 있을 때 조건 (나)를 만족한다.

따라서 $\log_2 a < b+n$, $b < \log_{16}(a+n)$

즉, $a < 2^{b+n}$, $a+n > 2^{4b}$ 이므로 $2^{4b}-n < a < 2^{b+n}$이다.

i) $n=3$이면 $2^{4b}-3 < a < 2^{b+3}$ 에서

$b=1$이면 $16-3 < a < 16$ -- $a=14,\ 15$

$b \ge 2$이면 $2^{4b}-3 > 2^{b+3}$이므로 불가능, $\therefore\ a_3 = 2$

ii) $n=4$이면 $2^{4b}-4 < a < 2^{b+4}$ 에서

$b=1$ 이면 $16-4 < a < 32$ -- $a=13,\ \cdots\ ,\ 31$

$b \ge 2$이면 $2^{4b}-4 > 2^{b+4}$이므로 불가능, $\therefore\ a_4 = 19$

i),ii)에서

$\therefore\ a_3 + a_4 = 2+19 = 21$

36) 201

$S_n = n^2 + n + 1$ 에 의해
$= n(n+1) + 1$

$$a_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2}$$
$$= (2n-1)2n - (2n-2)(2n-1)$$
$$= 4n - 2$$

(단, $n \geq 2$)

$$\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1} = S_1 + \sum_{n=2}^{10} 4n - 2 = 201$$

37) 34

출제의도는 여러 가지수열

그것을 알아냈는가?

$a_n + a_{100-n} = \dfrac{n^2}{101}$ 에 양변에 $\displaystyle\sum_{n=1}^{50}$ 을 하면,

$$a_{50} + \sum_{n=1}^{99} a_n = \frac{1}{101} \times \frac{50 \times 51 \times 101}{6}$$
$$= 425 \ \cdots (\text{ㄱ})$$

$a_m + a_{m+1} = \dfrac{9(m+1)}{50}$ 에 $m = 2M-1$ 을 대입

M이 자연수가 되면, m은 양의 홀수가 된다.

$a_{2M-1} + a_{2M} = \dfrac{9}{25}M$ 에 대하여

양변에 $\displaystyle\sum_{M=1}^{50}$ 을 하면,

$$a_{100} + \sum_{M=1}^{99} a_M = \frac{9}{25} \times \frac{50 \times 51}{2}$$
$$= 459 \ \cdots (\text{ㄴ})$$

(ㄴ)-(ㄱ)을 하면,

$$a_{100} - a_{50} = 34$$