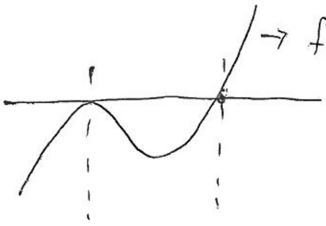
* 2019년 10월 시행 교육청 고3 수학 나형 21번.

$f(x) = x^3 + \cdots$

(가) 방정식 $f(x)=0$, $\{\alpha, \beta\}$, $(\alpha<\beta)$

(나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4

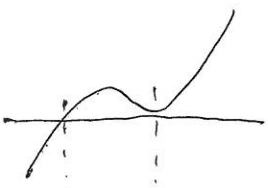


$x=\alpha$, $x=\beta$.

$\rightarrow f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$

방정식 $f(x)=0$의 해는 α, α, β 이다.

$\rightarrow$ α, β, β라면



$x=\alpha$ $x=\beta$

$\Rightarrow$ 극솟값이 0이 된다. 따라서

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$$

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 = (x-\alpha)(2x-2\beta+x-\alpha)$$

$$= 3(x-\alpha)\left(x-\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = -4 = \left(\frac{2\beta-2\alpha}{3}\right)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) = \frac{-4(\beta-\alpha)^3}{27}$$

$\therefore \beta-\alpha = 3$.

ㄱ. $f'(\alpha)=0$ $\rightarrow$ True.

ㄴ. $\beta=\alpha+3$ $\rightarrow$ True.

ㄷ. $f(0)=16$이면 $f(0) = \alpha^2 \times (-\beta) = \alpha^2 \times (-\alpha-3) = -\alpha^3-3\alpha^2 = 16$

$\therefore$ $\alpha^3+3\alpha^2+16=0$ 에서 $\alpha=-4$일 때 성립하므로 $\alpha=-4$, $\beta=-1$.

$\therefore \alpha^2+\beta^2=17$. $\rightarrow$ False.