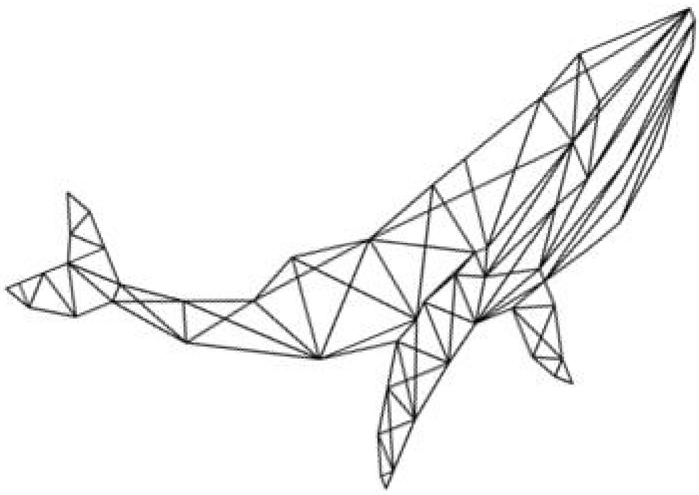
2021학년도

우주설 수학

삼각함수의 극한 (수식)



학습 전 배경지식.

다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$는 $\frac{g(x)\text{의 최저 차항의 계수}}{f(x)\text{의 최저 차항의 계수}}$로 구할 수 있는데, 0이 아닌 극한값이 나오기 위해서는 분모와 분자의 최저 차항의 차수가 같아야 한다. (수학Ⅱ) …(ㄱ)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{x}=2$$

…(ㄴ)

(ㄱ)+(ㄴ)을 이용하여 삼각함수를 마치 다항함수처럼 생각하면

$\sin x = x + f(x)$ (단, $f(x)$는 최저차항의 차수가 2차 이상인 어떤 다항함수)

$\tan x = x + g(x)$ (단, $g(x)$는 최저차항의 차수가 2차 이상인 어떤 다항함수)

$1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + h(x)$ (단, $h(x)$는 최저차항의 차수가 3차 이상인 어떤 다항함수)

$1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)= 2x + i(x)$ ($i(x)$는 최저차항의 차수가 2차 이상인 어떤 다항함수)

로 표현할 수 있습니다. …(ㄷ)

예시문항을 살펴보도록 합시다.

예제) 0이 아닌 상수 k와 자연수 n의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(1+\tan x)^2-\cos x}{x^n}=k$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(1+\tan x)^2-\cos x}{x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)+(2\tan x)+(\tan^2 x)}{x^n}$$

에 대하여

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{g(x)\text{의 최저차항의 계수}}{f(x)\text{의 최저차항의 계수}}$를 이용하자. (ㄷ)을 적용하면

분자를 $\left\{\frac{1}{2}x^2+h(x)\right\}+\{2(x+g(x))\}+\{x+g(x)\}^2$

$=\frac{1}{2}x^2+h(x)+2x+2g(x)+x^2+2xg(x)+g(x)^2$ 로 나타낼 수 있고

최저차항은 일차항이고 계수는 2임을 알 수 있다.

분모의 최저차항의 차수는 n이고 계수는 1인데, (ㄱ)에 의해 $n=1$이고,

$k=2$가 나옴을 알 수 있다.

위와 같이 그 어떤 복잡한 식이 제시되더라고 오직 분모와 분자의
최저차항만 판단하고 비교하면 극한값을 쉽게 유도할 수 있다.

따라서, (ㄷ)에 있는 최저차항이 될 수 없는 $f(x), g(x), h(x), i(x)$는
무시해도 무관하다. 단, 최저차항이 상수항은 될 수 없으므로
$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$같은 예외는 생각해야 한다.

그러므로 숙달 후 검산의 방법으로 쓰는 것을 추천한다.

한 문제만 더 다루어 보자.

예제) 0이 아닌 상수 k와 자연수 n의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\tan^2 x(\sin x-\sin^2 x)^2}{x^n}=k$$

분자의 전개식에서 최저차항이 될 요소를 관찰하면 $\tan^2 x\times\sin x\times\sin x$

분자는 최저차항이 4차이고 계수가 1임을 알 수 있다. 그러므로 $n=4$가 되어야만 하고 그에 따라 $k=1$임을 알 수 있다.

예제) 0이 아닌 상수 k와 자연수 n의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)^2}{(\sin x-(1-\cos x))^2\times x^n}=k$$

분자의 최저차항을 구하면 $\frac{1}{4}x^4$이므로 분모의 최저차항도 4차식이 되야

함을 알 수 있다. 분모의 전개식에서 최저차항이 될 요소를 관찰하면

$\sin^2 x\times x^n$이므로 $n=2$가 되야 만 하고 그에 따라 $k=\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

여기까지 정리합시다.

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}f(x)=A$, $\lim_{x\to\alpha}g(x)=B$라 하면,

(1). $\lim_{x\to\alpha}f(x)\times g(x)=\lim_{x\to\alpha}f(x)\times\lim_{x\to\alpha}g(x)=AB$

(2). $\lim_{x\to\alpha}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to\alpha}g(x)}{\lim_{x\to\alpha}f(x)}=\frac{B}{A}$ (단, $A\neq 0$)

…(ㄷ)

에 대하여 다음 논제를 분석하여 보자.

예제) 0이 아닌 상수 k와 자연수 n의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^2}{\frac{(1+\sin x-\cos x)^2}{1-\tan x}\times x^n}=k$$

극한값을 구하는 문항은, 극한값이 존재하는 것이 보장된 문항이다.
그러므로 $k=\lim_{x\to 0+}k$로 생각할 수 있는데

$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^2}{\frac{(1+\sin x-\cos x)^2}{1-\tan x}\times x^n}=\lim_{x\to 0+}k$ 를 조금씩 변형해보자.

$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^2}{(1+\sin x-\cos x)^2\times x^n}\times\lim_{x\to 0+}(1-\tan x)=\lim_{x\to 0+}k$가 가능할까?

(ㄷ)의 2에 의해 양변에 $\lim_{x\to 0+}(1-\tan x)$를 나눌 수 있다. 그러면,

$\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)^2}{(1+\sin x-\cos x)^2\times x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{k}{1}$가 된다. 이것을 한번더 변형하면,

$\lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)^2}{(1+\sin x-\cos x)^2\times x^n}\times\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\cos^2 x}=\lim_{x\to 0+}k$에서

$\lim_{x\to 0+}\frac{(1-\cos x)^2}{(1+\sin x-\cos x)^2\times x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{k}{1}$

이므로 수렴이 보장된 극한값의 계산에서 중간에 0이 아닌 상수로 수렴하는 것을 처리하며 식을 간략하게 할 수 있다.

최저차항의 계수관점으로
분자는 최저차항이 4차이고
계수는 $\frac{1}{4}$임을 알 수 있으며,
분모는 $\sin^2 x\times x^n$가 최저이므로
$n=2$이고 $k=\frac{1}{4}$임을
알 수 있다.

극한값 계산 40제

이 개념에서 극한값만큼이나 θ의 차수도 중요합니다. 각 문항의 n과 k를 모두 구하세요. (k는 0이 아닌 실수, n은 자연수)

1. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{2-2\cos\theta}+\sin^2\theta}{\theta^n}=k$

2. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta(1-\sqrt{\cos\theta})}{\theta^n}=k$

3. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{(\sqrt{\cos\theta}-\sqrt{1-\sin\theta})}{\theta^n}=k$

4. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{(\tan^2\theta-\sin^2\theta)}{\theta^n}=k$

5. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1+\tan\theta}-\sqrt{1-\tan\theta}}{\theta^n}=k$

6. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\cos^2\theta-(1-\sin\theta)^2}{\theta^n}=k$

7. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{(1+\tan\theta)^2-\cos\theta}{\theta^n}=k$

8. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{1+\tan^2\theta-\cos\theta}{\theta^n}=k$

9. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^n}=k$

10. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\theta}{(1+\sin\theta)^2}\right\}^2}{\theta^n\left(\sec\theta-\frac{1}{1+\sin\theta}\right)}=k$

11. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2\times(\sin\theta)}{\theta^n(\sin\theta+\cos\theta)}=k$

12. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sqrt{3}(1-\cos\theta)+2\sin\theta}{\theta^n(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)}=k$

13. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\times 2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{\theta^n}=k$

14. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^n}=k$

15. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(\frac{2\tan^2\theta}{\tan\theta+\tan 2\theta}\right)^3}{\theta^n}=k$

16. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^n}=k$

17. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\left(\tan\theta - \tan\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - 1\right)}{\theta^n} = k$

18. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\tan^2\theta(\sin\theta - \sin^2\theta)^2}{\theta^n} = k$

19. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{(1-\cos\theta)^2}{\dfrac{(\sin\theta - (1-\cos\theta))^2}{2+2\tan\theta} \times \theta^n} = k$

20. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\left(-\cos 2\theta + \sqrt{2-\cos^2 2\theta}\right)^2}{\theta^n} = k$

21. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin 2\theta\left(1 - \cos 2\theta + \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{3} \times \theta^n} = k$

22. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin\theta\cos\theta - \left(\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2(\pi - 2\theta)}{\theta^n} = k$

23. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{\sqrt{4-\sin^2\theta} - \cos\theta - 1}{\theta^n} = k$

24. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \cos\theta + 2\sin\theta}{\theta^n} = k$

25. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{1-\sqrt{1-\sin\theta}}{\theta^n} = k$

26. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{1+\tan 2\theta}-\sqrt{\cos\theta}}{\theta^n} = k$

27. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{1-\sqrt{\cos^2\theta-\sin\theta}}{\theta^n} = k$

28. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{1-\sqrt{\cos\theta-\tan^2\theta}}{\theta^n} = k$

29. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{\cos^2\theta+\cos\theta}}{\theta^n} = k$

30. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{\tan\theta}-\sqrt{1-\cos\theta}}{(\sqrt{\theta})^n} = k$

31. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{2-\cos\theta}-1}{\theta^n} = k$

32. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{\cos\theta+\sin\theta}-1}{\theta^n} = k$

33. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{\cos\theta+2\sin^2\theta}-1}{\theta^n}=k$

34. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos\theta-2\sin\theta}}{\theta^n}=k$

35. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin2\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-1+\frac{\sin2\theta}{\sqrt{3}}\right)}{\theta^n}=k$

36. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{4+\sin\theta}-2\cos\theta}{\theta^n}=k$

37. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)^2}{\frac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2}{1-\tan\theta}\times\theta^n}=k$

38. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-\cos\theta+\sin\theta)^2}{(2-\cos^2\theta)\theta^n}=k$

39. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{2-\cos\theta-\cos^2\theta}}{\theta^n}=k$

40. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sin\theta}-\cos\theta\sqrt{1-\sin\theta}}{\theta^n}=k$

빠른정답

문항번호	n	k
1	1	1
2	3	$\frac{1}{4}$
3	1	$\frac{1}{2}$
4	4	1
5	1	1
6	1	2
7	1	2
8	2	$\frac{3}{2}$
9	3	$\frac{1}{2}$
10	1	$\frac{1}{4}$
11	3	1
12	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
13	4	$\frac{1}{2}$
14	1	4
15	3	$\frac{8}{27}$
16	1	$\sqrt{2}$
17	3	$\frac{1}{4}$
18	4	1
19	2	$\frac{1}{2}$
20	4	16

문항번호	n	k
21	2	$\frac{2}{3}$
22	1	1
23	2	$\frac{1}{4}$
24	1	4
25	1	$\frac{1}{2}$
26	1	1
27	1	$\frac{1}{2}$
28	2	$\frac{3}{4}$
29	2	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$
30	1	1
31	2	$\frac{1}{4}$
32	1	$\frac{1}{2}$
33	2	$\frac{3}{4}$
34	1	1
35	2	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$
36	1	$\frac{1}{4}$
37	2	$\frac{1}{4}$
38	2	1
39	1	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
40	1	1