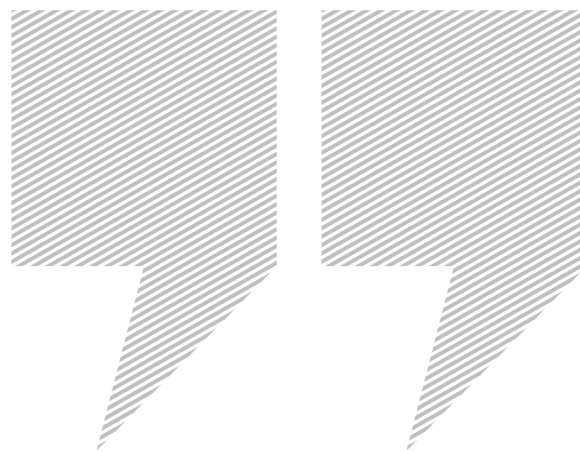




6모 깊은분석

김지석 수학 연구소

6모 4점 문항과 함께 풀어보면 좋을 문항

2026학년도 6월 모의고사 22번

1. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선

$$y = 2^x + \frac{k}{2}, \quad y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가

16일 때, $k + \log_2 k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

2026학년도 6월 모의고사 10번

2. 실수 a ($a > 1$)에 대하여 곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 과 만나는 점을 A, 곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 B, 곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, a 의 값은?

- ① $3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$ ② $3^{\frac{\sqrt{3}}{4}}$ ③ $3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
 ④ $3^{\frac{5\sqrt{3}}{12}}$ ⑤ $3^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

이번 2026학년도 6월 모의고사에서 지수로그 그래프 개형을 파악하는 문항이 많이 출제된 편이다.

아마도 다항함수에 대한 그래프 스킬과 테크닉을 의식해서 이렇게 출제한 것으로 추측하고 있다.

아직도 그냥 마구잡이로 양치기로만 공부한다면 그래프 문항들을 어떻게 풀어야 하는지 확실하게 접근법부터 정리해두는 것이 좋겠다.

이번 6월 모의고사에서 지수로그 그래프 문항들의 특징은 지수로그 그래프 위의 점들을 [22번] 넓이, 기울기 조건과 두 그래프의 교점과 함께 활용하거나 [10번] 도형의 성질을 활용하여 그래프의 길이와 함께 활용하는 것을 물어보았다.

지수로그 그래프 문항은 변주할 수 있는 포인트가 정말 많다. 두 그래프의 교점을 넓이, 기울기, 수직, 평행이동, 대칭이동, 최대최소, 도형 조건 등과 결합하여 출제할 수도 있다.

이번 자료에서 변주할 수 있는 포인트들을 함께 짚어보자.

3. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선

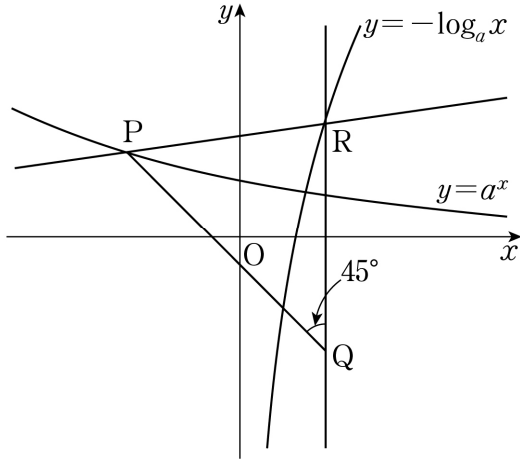
$y = a^x (0 < a < 1)$ 위의 점 P가 제2사분면에 있다.

점 P를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점

Q와 곡선 $y = -\log_a x$ 위의 점 R에 대하여

$\angle PQR = 45^\circ$ 이다. $\overline{PR} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 이고 직선 PR의

기울기가 $\frac{1}{7}$ 일 때, 상수 a 의 값은?

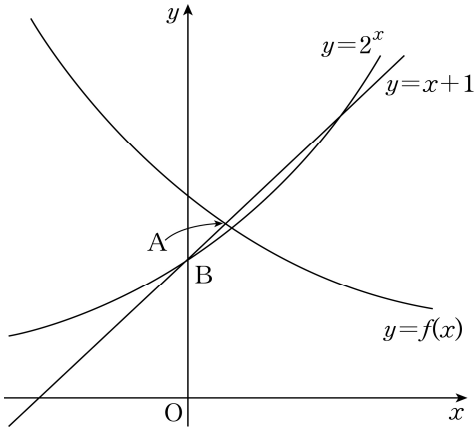


- ① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

■ 김지석T Analysis

이번 6모 22번에서 기울기를 도형적으로 접근하는 게 핵심이었다. 그런데 이런 문제는 최근 자주 출제되고 있다. 이 부분을 집중 훈련해보자.

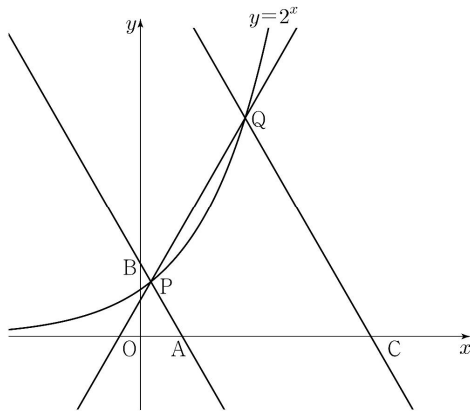
4. 그림과 같이 곡선 $y = 2^x$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행 이동한 곡선을 $y = f(x)$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 만나는 점 A와 점 B(0, 1) 사이의 거리를 k 라 할 때, $\frac{1}{k^2}$ 의 값을 구하시오.



■ 김지석T Analysis

바로 앞 문제와 이번 6모 문제와 함께 연관시켜 생각해보자. 비슷한 구조로 조금씩 다른 문제끼리 엮어서 생각할 줄 알아야 실력이 오른다.

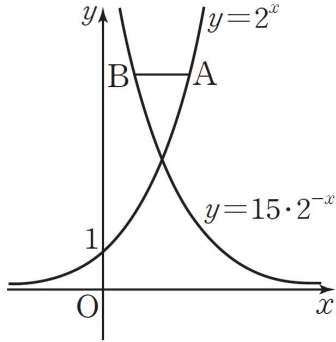
5. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a, 2^a)$, $Q(b, 2^b)$ 이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m 이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$ 인 직선이 x 축과 만나는 점을 C라 하자.
 $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{CQ}=3\overline{AB}$
 일 때, $90 \times (a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < a < b$)



■ 김지석T Analysis

최근 9월 모의고사 문제다. 이번 6모 22번 문항과 깊은 관련이 있다. 기울기를 도형적으로 접근해보는 것이 중요한 핵심!

6. 그림과 같이 함수 $y = 2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y = 15 \cdot 2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x 좌표를 a 라 할 때, $1 < \overline{AB} < 100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는?

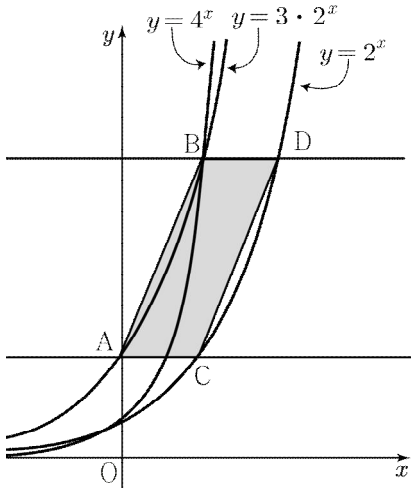


- ① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

■ 김지석T Analysis

이번 6모 지수함수 그래프에서 두 그래프의 교점을 축에 평행한 직선과의 교점으로 바꾸어 해석할 수 있다는 점에서 이 문항을 함께 풀어볼 가치가 있다.

7. 그림과 같이 함수 $y = 3 \cdot 2^x$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A, 함수 $y = 4^x$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x 축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x 축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?



- ① $3\log_2 3$ ② $4\log_2 3$ ③ $5\log_2 3$
 ④ $6\log_2 3$ ⑤ $7\log_2 3$

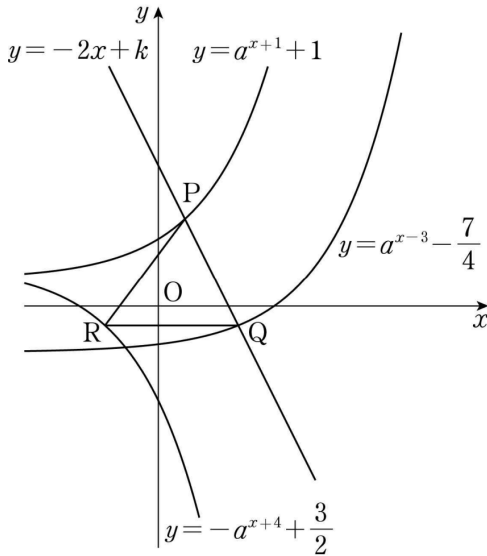
■ 김지석T Analysis

두 그래프의 교점을 클래식하게 좌표를 구하는 문제로도 공부해보자.

8. 그림과 같이 두 상수 a ($a > 1$), k 에 대하여 두 함수

$$y = a^{x+1} + 1, \quad y = a^{x-3} - \frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y = -2x + k$ 가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y = -a^{x+4} + \frac{3}{2}$ 의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{PR} = \overline{QR} = 5$ 일 때, $a + k$ 의 값은?



- ① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

■ 김지석T Analysis

두 그래프의 교점을

교점 사이의 거리 조건으로 변주한 문제다.

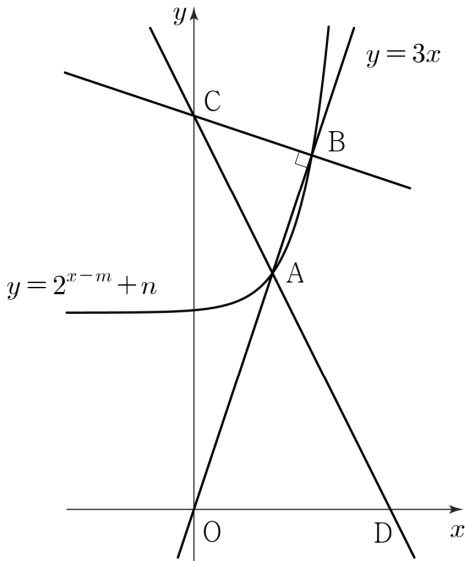
새로운 문제가 나와있을 때 내가 알고있는 것과

무엇이 같은지 공통점을 토대로

차이점을 바라봐야 실력이 는다.

9. 그림과 같이 곡선

$y = 2^{x-m} + n$ ($m > 0, n > 0$)과 직선 $y = 3x$ 가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y = 3x$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x 축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작다.)



■ 김지석T Analysis

두 그래프의 교점을
교점사이의 넓이 조건으로 제시한 문제다.

지수함수의 그래프를 해석할 때
두 그래프의 교점을
넓이 조건과 함께 해석하는 문제가
이번 6모 지수함수 그래프 문항과 결이 같다.

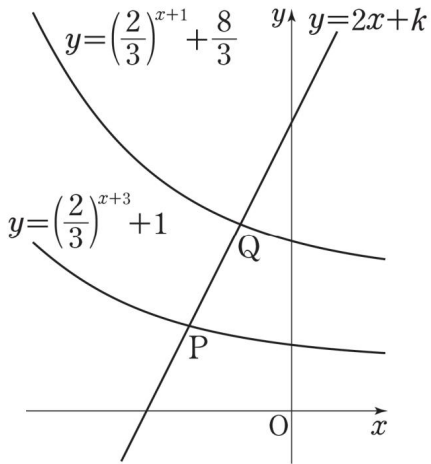
10. 직선 $y = 2x + k$ 가 두 함수

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1, \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$\overline{PQ} = \sqrt{5}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$
 ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



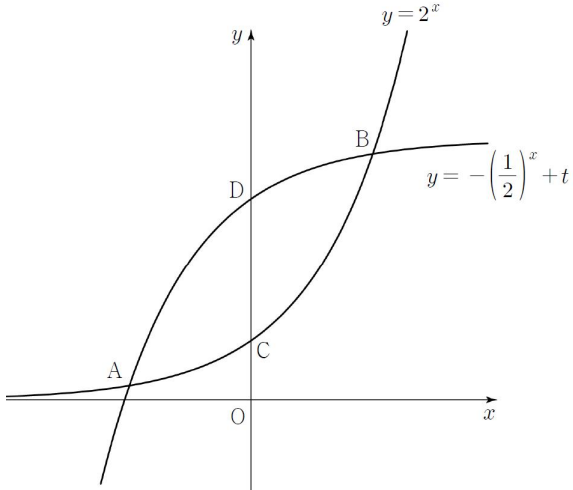
■ 김지석T Analysis

두 그래프의 교점을

직선의 기울기로 해석할 수 있는 문제다.

이번 6모 22번에서도 이 아이디어를 활용할 수 있다.

11. 그림과 같이 2보다 큰 실수 t 에 대하여 두 곡선 $y = 2^x$ 과 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y = 2^x$, $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$ 가 y 축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 원점이다.)



<보 기>

- ㉠. $\overline{CD} = t - 2$
 ㉡. $\overline{AC} = \overline{DB}$
 ㉢. 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$ 배이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
 ④ ㉠, ㉡ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

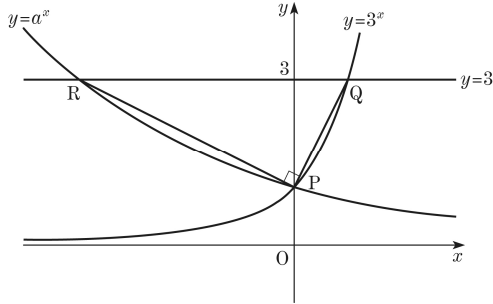
■ 김지석T Analysis

이 문항은 두 그래프의 교점의 좌표를 문자를 두어 해석해 볼 수도 있고
 지수함수의 대칭성을 활용하여 문제를 풀 수도 있다.

지수함수의 대칭성을 활용한 풀이나
 지수로그 함수의 그래프적 특성은
 그래프 테크닉 수학1에서 자세하게 설명하고 있다.
 이 문항에 대한 풀이는 교점의 좌표를 문자를 두어 해석하는 풀이만을 담았다.

과거 평가원의 습관(?)을 볼 때
 두 그래프의 교점의 단서를 다양하게 해석하는
 것을 연습해두는 것이 좋다.

12. 그림과 같이 두 곡선 $y = 3^x$ 과 $y = a^x (0 < a < 1)$ 의 교점을 P 라 하고, 직선 $y = 3$ 이 두 곡선 $y = 3^x$, $y = a^x$ 과 만나는 점을 각각 Q, R 라 하자. $\angle RPQ = 90^\circ$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^{16}$ 의 값을 구하시오.



■ 김지석T Analysis

이 문항은 두 그래프의 교점을 수직조건으로 해석하는 문제다. 지수함수의 두 그래프의 교점이라는 하나의 아이디어를 정말 여러 가지로 해석해볼 수 있지 않은가!

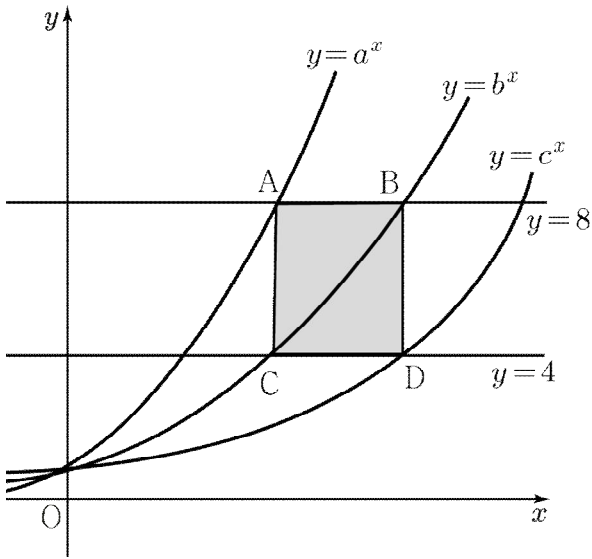
유형별로 공부하면 파편화되어 공부하는 것들이 흐름으로 느껴지기 어렵겠지만 하나의 아이디어를 다양하게 해석해 보면서 공통점과 차이점을 기준으로 해석하고 그래프에 대한 이해도를 높인다면 문제에서 차이점만 보이는 것이 아니라 공통점이 보이게 되고, 그렇게 실력이 는다.

13. 그림과 같이 $a > b > c > 1$ 인 세 상수 a, b, c 에 대하여

두 곡선 $y = a^x, y = b^x$ 과 직선 $y = 8$ 이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y = b^x, y = c^x$ 과 직선 $y = 4$ 가 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

사각형 ACDB가 정사각형일 때, $abc = 2^{\frac{q}{p}}$ 이다.
 $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)



■ 김지석T Analysis

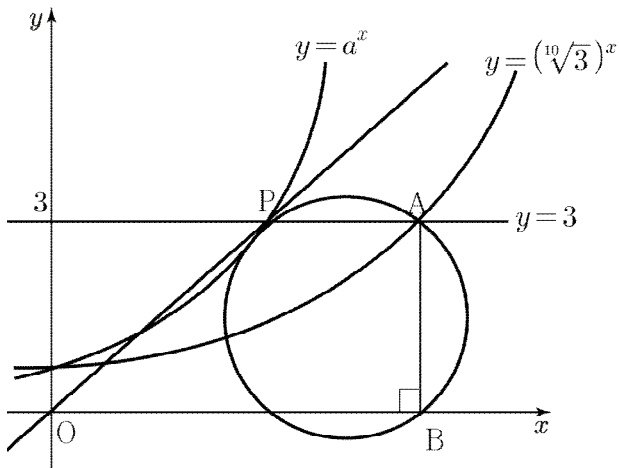
이 문항은 두 그래프의 교점 문제는 아니다.

이번 6모 10번에서 로그함수의 그래프 문항을 정삼각형의 도형의 성질을 활용했다는 점을 착안해 지수함수 그래프 문항 중

도형의 성질을 활용한 문항을 함께 풀어보면

좋기 때문에 골랐다.

14. 그림과 같이 지수함수 $y = (\sqrt[10]{3})^x$ 의 그래프가 직선 $y = 3$ 과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x 축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y = a^x$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 의 교점 P에서 직선 OP와 접하도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은?
(단, $a > \sqrt[10]{3}$)



- ① $3^{\frac{8}{9}}$ ② $3^{\frac{10}{9}}$ ③ $3^{\frac{13}{9}}$
④ $3^{\frac{16}{9}}$ ⑤ $3^{\frac{20}{9}}$

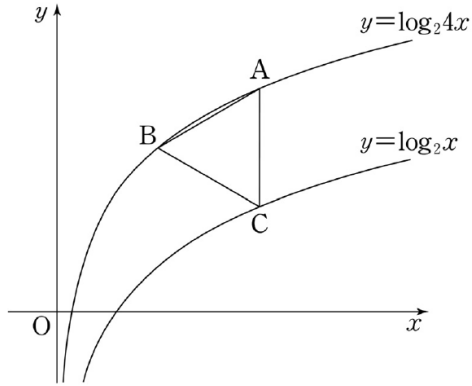
■ 김지석T Analysis

같이 풀어보면 좋을 지수함수 그래프 문항 내가 준비한 마지막 문제다.

이 문항 역시 지수함수 그래프 문항에서 도형의 성질 중 원을 활용한 문항을 골라보았다.

이처럼 도형은 그래프에도 접목이 될 수 있고 삼각함수 도형은 매번 나오는 문제고 미적분은 최대 3문제까지 도형 문제가 나올 수 있기 때문에 도형은 제대로 준비해두는 것이 좋다.

15. 함수 $y = \log_2 4x$ 의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y 축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q) 이다. $p^2 \times 2^q$ 의 값은?

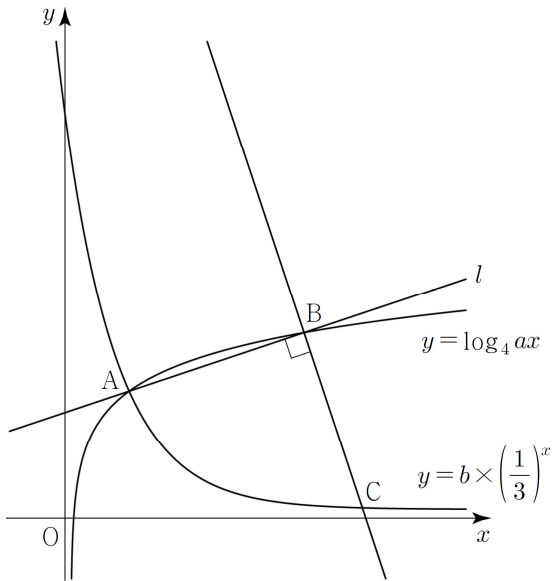


- ① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
 ④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

■ 김지석T Analysis

이번 6모와 비슷한 로그함수 그래프 문항이다.
 이번 6모 로그함수 그래프 문항처럼 정삼각형을 활용한 문제로 6모 문항과 함께 같이 풀어보자.

16. 그림과 같이 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 곡선 $y = \log_4 ax$ 와 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에서 만나고, 곡선 $y = b \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이 점 A 를 지난다. 점 B 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선이 곡선 $y = b \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 과 만나는 점을 $C(x_3, y_3)$ 이라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{10}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 양수이고 $x_1 < x_2 < x_3$ 이다.)



<보 기>

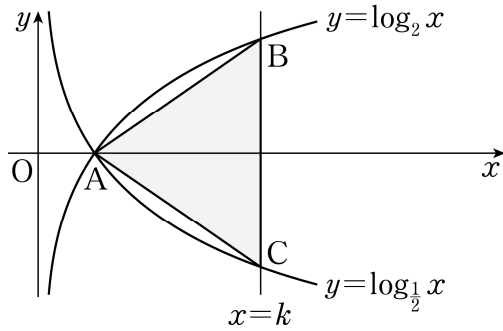
- ㉠. $x_2 - x_1 = 3$
 ㉡. $x_3 - x_1 = 2(y_1 - y_3)$
 ㉢. $a^2 = 4^b$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

■ 김지석T Analysis

이번 6모에서 로그함수의 그래프를 정삼각형을 활용하여 출제했는데 이번에는 직각삼각형을 활용해본 문제로 준비해보았다.

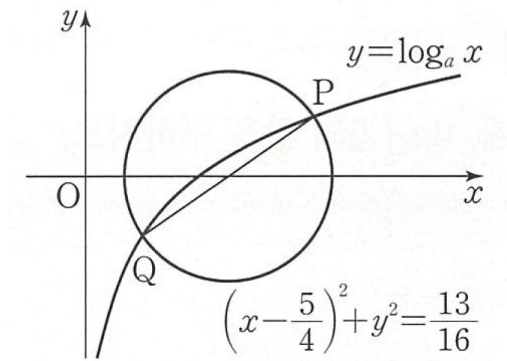
17. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x = k (k > 1)$ 이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 무게중심의 좌표가 $(3, 0)$ 일 때, 삼각형 ACB의 넓이를 구하시오.



■ 김지석T Analysis

이 문항은 로그함수 그래프와 이등변삼각형을 함께 활용해보는 문제다. 도형의 성질과 그래프는 심심치 않게 자주 엮이니 같이 공부해두면서 확실하게 정리해보자.

18. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와
 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q라
 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a 의 값은?



- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

■ 김지석T Analysis

이 문항은 로그함수 그래프와 원과 함께 활용하는
 문제다. 원이 나왔을 때 반드시 해야 하는 습관이
 있다.

문제를 보자마자! 문제에서 쓰이든 안 쓰이든
 원의 성질을 내가 바로 써먹기 위해
 무엇부터 제일 먼저 해야 할까?

19. $k > 1$ 인 실수 k 에 대하여 두 곡선

$$y = 5^x + \frac{4k}{5}, \quad y = k \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + k - 5$$

가 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고
기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = 5^{x-1} - 2$ 과
만나는 점을 B라 하자. 삼각형 AOB의 넓이가
10일 때, $k + \log_5 k$ 의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

■ 김지석T Analysis

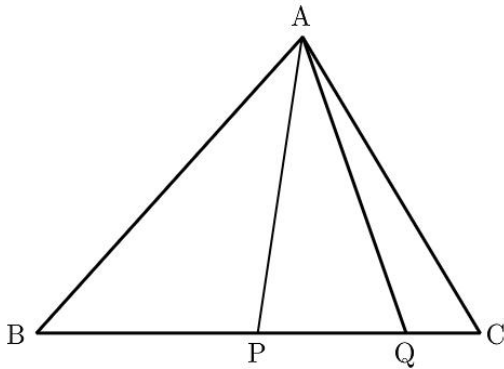
어디서 본 문항이지 않은가?
이번 6모 22번 변형문항이다.
단순하게 풀이를 외워서 풀지 말고
풀이와 풀이 사이에 행간에 집중해서
왜 이 풀이 다음에 이런 풀이가 나와야 하는지
머릿속으로 생각을 정리하면서
이 문제를 풀어보자.

2026학년도 6월 모의고사 14번

20. $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 중점을 P, 선분 BC 를 5 : 1 로 내분하는 점을 Q 라 하자.

$\overline{AQ} = 3\sqrt{2}$, $\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$ 일 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는?

- ① $\frac{85}{9}\pi$ ② $\frac{88}{9}\pi$ ③ $\frac{91}{9}\pi$
 ④ $\frac{94}{9}\pi$ ⑤ $\frac{97}{9}\pi$



■ 김지석T Analysis

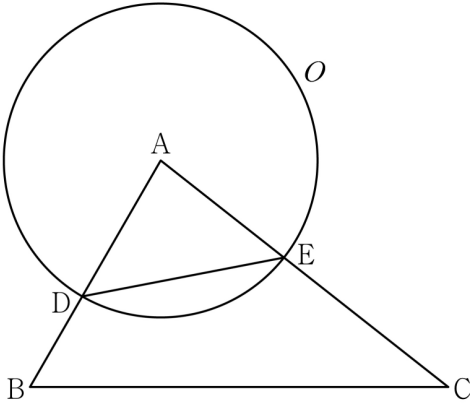
사인비는 길이비라는 것을 착안하면
 그리 어렵지 않게 풀었을 것이다.
 왜 사인비가 길이의 비가 될까?
 그 이유는 무엇일까?

도형 문제를 잘 풀기 위해서는
 도형의 개념과 접근법을 연결시키고
 접근법과 문제의 단서와 조건을 잘 테깅해서
 문제를 풀어야 빠르고 정확하게 풀 수 있다.

수학에 공식이 있듯 도형에도 접근법 공식이 있다.
 6시간 동안 혼자 공부할 수 있으니
 내가 도형이 약하다면 도움 받아보자.
 한 번 깨달으면 두고두고 써먹는다.

매번 도형이 나오는데
 그 때마다 도형의 신이 강림하길 바란다면 문제가
 있다!

21. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
 $\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9 : 35$ 이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은?
 (단, $\overline{AB} < \overline{AC}$) [4점]



- ① $18 + 15\sqrt{3}$ ② $24 + 20\sqrt{3}$ ③ $30 + 25\sqrt{3}$
 ④ $36 + 30\sqrt{3}$ ⑤ $42 + 35\sqrt{3}$

■ 김지석T Analysis

바로 작년 수능 14번이다.

이 문제 풀이에 사용하는 접근법이

이번 6월 모의고사 14번과 매우 유사하다.

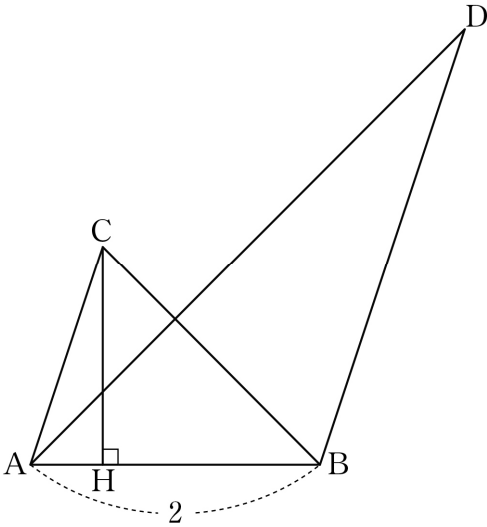
사인값의 비, 변 길이의 비, 외접원의 반지름을
 활용해야 하는 것까지.

22. $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π 일 때, 선분 CA의 길이를 구하시오.

■ 김지석T Analysis

6모 문항은 사인비(=길이비)를 통해
외접원의 넓이를 구하는 문제였다면
이 문항은 길이의 비와 외접원의 넓이를 통해
선분 길이를 구하는 문제다.
이 문항의 해설은 [도형의 필연성] 해설로 준비해
봤다.

23. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$,
 $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC , ABD 가 있다.
 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 H 는 선분
 AB 를 $1:3$ 으로 내분한다. 두 삼각형 ABC ,
 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , R 라
 할 때,
 $4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이다. $\overline{AC}^2$ 의
 값을 구하시오. (단, $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$)



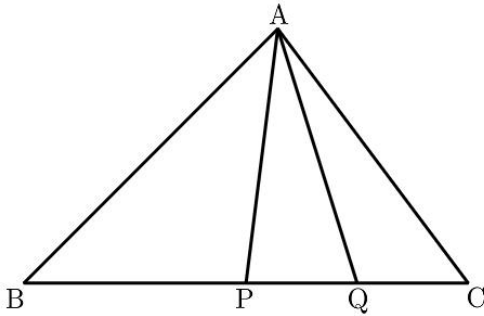
■ 김지석T Analysis

이 문항은 6모 문항보다 길이비가 보다
 직관적으로 제시되어 있고 외접원에 대한 반지름이
 나와 있는 문제다.
 거기에 평행 조건이 추가되었는데
 과연 우리는 이 많은 정보에서 어떻게
 차근차근 해석할 수 있을까?
 꼭 문제를 먼저 풀어보고 해설을 보자.

24. $\overline{AB} = \sqrt{14}$ 인 삼각형 ABC 에서 선분 BC 의 중점을 P, 선분 BC 를 3 : 1로 내분하는 점을 Q 라 하자.

$\overline{AQ} = \sqrt{5}$, $\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = 1 : \sqrt{5}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는?

- ① $\frac{18}{5}\pi$ ② $\frac{19}{5}\pi$ ③ 4π
 ④ $\frac{21}{5}\pi$ ⑤ $\frac{22}{5}\pi$



■ 김지석T Analysis

이번 6모 문항에 대한 변형 문항이다.

이 문항 또한 풀이를 외워서 푸는 것이 아니라 나의 풀이가 논리적 필연성을 만족시키는지 풀이와 풀이의 행간을 생각하면서 문제를 풀어보자.

2026학년도 6월 모의고사 20번

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$0 \leq x < 4$ 일 때 $f(x) = -x^2 + 4x$ 이고,
모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이다.

방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 0 이상인 모든 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n 번째 수를 a_n 이라 하자.

다음은 $a_{20} + a_{21} + a_{22}$ 의 값을 구하는 과정이다.

방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이 0, 3이므로
방정식 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근을 구하는 것은
방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.
 $0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의
모든 실근은 0, $\boxed{\text{(가)}}$, 3이므로
 $a_1 = 0$, $a_2 = \boxed{\text{(가)}}$, $a_3 = 3$
이다. 또한 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x+4) = f(x)$ 이므로
세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은
첫째항이 각각 0, $\boxed{\text{(가)}}$, 3이고
공차가 모두 $\boxed{\text{(나)}}$ 인 등차수열이다.
따라서 $a_{20} + a_{21} + a_{22} = \boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p , q , r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값을 구하시오.

■ 김지석T Analysis

이 문항은 굉장히 실험적인 문제다.

수열 빈칸 문제가 나온다면

그 파트의 명제나 정리를 짚 적어주고

빈칸을 주는 게 보통인데

주기함수의 근을 구하는 과정에서 소스처럼

등차수열을 사용하면서 등차수열 문제로

분류되었다.

굉장히 신선했고 어렵지 않았지만 좋은 문제라고 본다.

빈칸 문제가 부활했다는 것도 신선했지만

내용적인 면에서 더 신선했다고 평할 수 있다.

등차수열과 그래프의 결합은 종종 있는 일이다.

등차수열과 그래프를 잘 결합을 못시키겠다면

큰일이니 꼭 정리해두도록 하자.

수열이 함수고 함수가 수열이 되는 일은 대학가서 더 흔하게 볼 수 있다.

26. 이차함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(4+x) = f(4-x)$$

를 만족시킨다.

자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 이 공차가 3인 어떤 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합과 같을 때, $|f(n)| > |f(n+1)|$ 이 성립하도록 하는 n 의 최댓값은?

- ① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

■ 김지석T Analysis

6모 문항과 마찬가지로 등차수열의 함수적 해석과 추론에서 함수를 해석하며 추론하는 문항을 준비해봤다.

2026학년도 6월 모의고사 12번

27. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_4 의 최댓값은?

- (가) $a_1 = a_3$
 (나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$(a_{n+1} - a_n + 3)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$$

 이다.

- ① 9 ② 12 ③ 15
 ④ 18 ⑤ 21

■ 김지석T Analysis

이번에는 굉장히 쉽게 출제해서 놀랐다.
 문제의 실제 난이도보다
 시간을 많이 잡아먹는 탓에
 체감 난이도가 높은 파트가 바로 이 파트인데
 이번에는 비교적 싱겁게(?) 끝났다.

귀납적 정의를 잘 풀기 위해서 어떻게 하면
 좋을지에 대한 질문을 많이 받는다.
 학생 경우 별로 조금씩 다르지만
 가장 대중적인 방법은
 바로 수열의 본질에 집중하는 것이다.
 수열의 본질은 '나열'하고 '규칙'을 찾는 것이다.
 그리고 그 규칙들을 모아 실전적인 접근법을
 정리하는 것이 가장 빠른 방법이다.

많이들 점화식 문제를 대비하느라
 유형 문제집을 풀기도 하는데
 이런 유형분류 보다 중요한 것은
 점화식을 관통하는 핵심적인 접근법을
 정리하는 것이 중요하다.

이 6모 문항과 비슷한 형태의 문제가
 바로 작년 9월 22번으로 출제되었다.
 작년 9월 22번 문항이 이번 문항보다 훨씬 더
 어렵다. 꼭 같이 풀어보자.

28. 양수 k 에 대하여 $a_1 = k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0 \text{ 이다.}$$

$a_5 = 0$ 이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합을 구하시오.

■ 김지석T Analysis

이번 6모보다 어렵게 출제된 작년 9월 모의고사다.
이번 6모에서 난이도가 꽤 줄어든 수열파트가
이대로 같지 아니면 수능에서 바뀔지는
아무도 모른다.

수험생의 본분은 항상 최악의 상황을
가정하고 공부하는 것이므로
절대 방심하지 말자.

29. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 0$ 이고

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, a_{50} 의 값은?

- ① - 50 ② - 25 ③ 0
④ 25 ⑤ 50

■ 김지석T Analysis

만약 이번 6모에서 점화식 기초를 그대로 이어간다면

이번 6모의 테마 중 하나가 단원간 융합을 보여준 만큼

다음에 출제될 가능성이 높은 건 삼각함수와 결합한

점화식이 출제될 가능성도 있다. 그렇게 어렵지 않으니 꼭 같이 풀어보도록 하자.

2026학년도 6월 모의고사 21번

30. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)$ 와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\text{모든 실수 } a \text{에 대하여 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} \text{의 값과}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} \text{의 값이 모두 존재한다.}$$

$g(-1)$ 의 값을 구하시오.

2026학년도 6월 모의고사 15번

31. 상수 k 와 $f'(0)=6$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+k & (|x|>1) \\ -f(x) & (|x|\leq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $k+f\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

(가) 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 의 값이 존재하고 그 값은 0 이하이다.

(나) x 에 대한 방정식 $g(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t 의 최댓값은 13이다.

- ① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ $\frac{39}{4}$
- ④ $\frac{51}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$

■ 김지석T Analysis

이번 6모 21번은 절댓값과 함수의 극한에 대한 활용에 관한 고난도 계산 문제다.

극한값의 존재성, 극한식의 해석, 차수결정 등 함수의 극한을 활용한 계산 문제는 자주 나오니까 계산력도 소홀하게 생각하면 안 된다.

이쪽 파트가 약하면 고난도정신 -함수의 극한 파트만 따로 꼭 공부해보도록 하자.

하고나면 훨씬 쉬워지고 빨라진다.

■ 김지석T Analysis

이번 6모 15번은 오개념 함정 문제다.

좌미분계수와 도함수의 좌극한은 무엇이 다른가?

라는 것을 확실하게 물어본 문제로

학생들이 그냥 대충 넘기는 부분을

날카롭게 물어본 문제다.

노베 학생들을 위한 노베 스피드 강좌에서

학생들이 갖고 있는 이 오개념에 관해

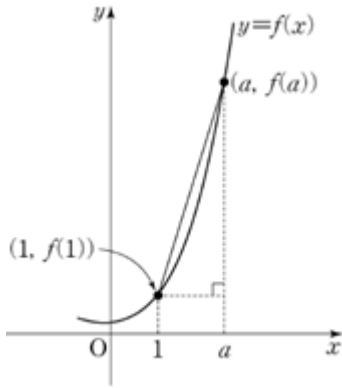
정말 길게 설명하고 예제를 들어 정리했었다.

그와 비슷한 문제가 고난도 문제로 나온 것을 보면

출제자들이 제일 좋아하는 것은

학생들이 흔히 갖고 있는 오개념이다.

32. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a 에 대하여 점 $(1, f(1))$ 과 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 $a^2 - 1$ 일 때, $f'(1)$ 의 값은?



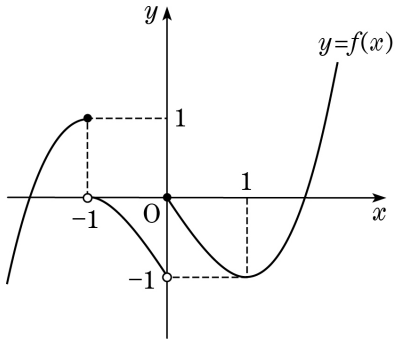
- ① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

■ 김지석T Analysis

이번 6모 15번 문항과 함께 같이 생각해보자.
미분계수의 정의를 단순 계산을 넘어서 그래프
형태로 인식할 수 있어야 한다.

33. 함수 $f(x)$ 가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^3 - 3x) & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ \frac{1}{2}(x^3 - 3x) - 1 & (-1 < x < 0) \end{cases}$$



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고르시오.

— < 보 기 > —

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{3}{2}$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(f'(x)) = 0$

■ 김지석T Analysis

6모 15번과 함께 생각해보자.

도함수의 좌극한과 좌미분계수는 뭐가 다른가?

도함수의 우극한과 우미분계수는 뭐가 다른가?

이를 헛갈리는 학생들의 오개념을 교정하기 좋은 문제

34. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

■ 김지석T Analysis

바로 작년 수능 21번에서도 함수의 극한 고난도 계산 문제가 나왔다. 작년 수능에서도 이번 6모에서도 둘 다 21번 문항으로 나온 만큼 앞으로 수능의 중요 경향으로 자리 잡을 수도 있으니 확실히 익혀두자.

35. 두 양수 $a, b(b > 3)$ 과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$ 의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2} \text{의 값이}$$

존재하지 않는 실수 t 의 값은 -3 과 6 뿐이다.

■ 김지석T Analysis

함수의 극한 고난도 계산의 끝판왕 문제
문제가 많이 어려울 수 있다. 고난도 정신에
함수의 극한 고난도만 모아서 훈련하고 있으니
혼자서 공부하기 막막하다면 도움을 받아보자.

36. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$$

(나) 1이 아닌 상수 α 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha \text{이다.}$$

$\alpha \times f(4)$ 의 값을 구하시오.

■ 김지석T Analysis

이번 6모 21번이 극한값의 존재성을 물어보았다면
극한식의 해석도 함께 정리해두자.

37. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = |f(x) - t|$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x) - g(k)}{|x - k|}$$

의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k 의 개수를 $h(t)$ 라 하자. 함수 $h(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t) = 5$

(나) 함수 $h(t)$ 는 $t = -60$ 과 $t = 4$ 에서만 불연속이다.

$f(2) = 4$ 이고 $f'(2) > 0$ 일 때, $f(4) + h(4)$ 의 값을 구하시오.

■ 김지석T Analysis

이번 6모 21번처럼 극한식을 해석하는 문제 중 고난도 문제다. 극한식을 해석하는 것과 더불어 함수로 새로운 함수를 규정하는 것을 추가한 문제라고 볼 수 있다.

함수로 새로운 함수를 규정하는 문제에 대한 접근 방법이 잘 정리가 안 되어 있다면 이번에 꼭 정리해두도록 하자.

38. 최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $f(x)$ 와 상수 a 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ a - f(-x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -4$$

(나) 함수 $g(x)$ 의 극솟값은 0 이다.

$g(-a)$ 의 값은?

- ① -40 ② -36 ③ -32
 ④ -28 ⑤ -24

■ 김지석T Analysis

이번 6모 15번과 함께 풀어보면 좋을 문항이다.

2026학년도 6월 모의고사 11번

39. 시각 $t=0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각이 t ($t \geq 0$) 일 때 점 P의 위치 x 가

$$x = t^3 - t^2 - t + 1$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

— <보 기> —

- ㄱ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 위치는 1이다.
 ㄴ. 시각 $t=1$ 일 때 점 P의 속도는 0이다.
 ㄷ. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에 점 P의 가속도는 4이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

■ 김지석T Analysis

직선 위의 운동을
 미분법에서 한 번, 적분법에서 한 번
 이렇게 배워서
 많은 학생들이 개념을 헛갈려 하거나
 혹은 잘 까먹거나 한다.

이 직선위의 운동 파트는 통합해서 정리하고
 이해해야 한다.

이번 6모 문제 자체는 그렇게 어렵지 않으나
 조금만 어려워지면 많은 수험생들이 틀리는 부분!

40. 원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t 분 후의 좌표를 각각 x_1 , x_2 라 하면

$$x_1 = 2t^3 - 9t^2, \quad x_2 = t^2 + 8t$$

이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 a , b , c 라고 하자. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

■ 김지석T Analysis

이번 6모에서 출제된 문항 중 선지 ㄷ. 운동 방향이 바뀌는 것이 그 문항에 핵심이었다. 운동 방향이 바뀌는 부분을 집중하여 이 문항도 함께 풀어보자. 문제 자체는 개념이 잘 정리되어 있다면 크게 어렵지 않다.

41. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가

$$x = t^3 - 5t^2 + at + 5$$

이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않도록 하는 자연수 a 의 최솟값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

■ 김지석T Analysis

직선 위의 운동에서 물체가 움직이는 방향을 바꾸는 것에 주목했다면 이번에는 바뀌지 않도록 하는 것에 주목하는 것으로 변주해볼 수 있다. 물체가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 어떤 조건을 만족해야 할까?

2026학년도 6월 모의고사 9번

42. 함수 $f(x)=x^2+ax$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x)dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x)dx$$

일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

■ 김지석T Analysis

우함수와 기함수를 활용한 전형적인 적분 계산 문제다.

43. 실수 a, b, c, d 에 대하여 삼차함수

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$

$$(나) \int_{-1}^1 xf(x)dx = 0$$

함수 $f(x)$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을
<보기>에서 있는 대로 고른 것은?

— <보 기> —

$$ㄱ. abcd \geq 0$$

ㄴ. $ab < 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간
 $(-1, 0)$ 에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $ab > 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간
 $(0, 1)$ 에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

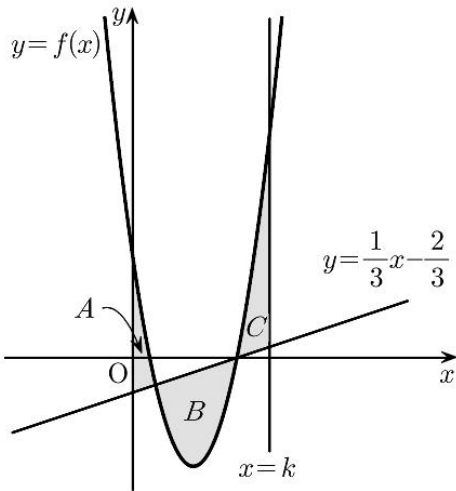
■ 김지석T Analysis

6모 9번 문항인 우함수와 기함수+정적분 관계식
문항에 그래프 더하여 활용해보는 문제

2026학년도 6월 모의고사 13번

44. 그림과 같이 함수 $f(x)=3x^2-7x+2$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 및 y 축으로 둘러싸인 영역을 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$ 로 둘러싸인 영역을 B , 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$, $x=k$ ($k>2$)로 둘러싸인 영역을 C 라 하자.

(A 의 넓이)+(C 의 넓이)=(B 의 넓이)일 때, 상수 k 의 값은?

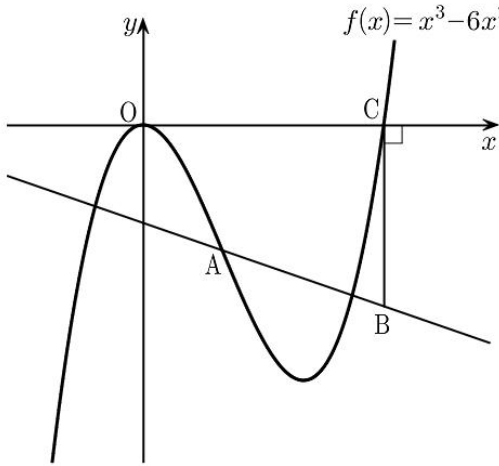


- ① $\frac{29}{12}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{31}{12}$
 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

■ 김지석T Analysis

이 문제는 틀리면 안 된다! 틀렸다면 반성하자!
 기출에서 굉장히 자주 출제된 문항이고
 풀이 방법이 굉장히 전형적인 문제이기도 하다.
 틀렸다면 반성하고 꼼꼼하게 복습하자.

45. 그림과 같이 임의로 그은 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 A, 점 $C(6, 0)$ 을 지나고 y 축과 평행하게 그은 직선과의 교점을 B라 하자. 사다리꼴 $OABC$ 의 넓이가 곡선 $f(x) = x^3 - 6x^2$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 임의의 직선 l 은 항상 일정한 점 D 를 지난다. 이때, $\triangle ODC$ 의 넓이를 구하시오. (단, $\overline{AB}$ 는 $\overline{OC}$ 아래에 있다.)



■ 김지석T Analysis

적분법 그래프 밑넓이 쉬운 문항들의 특징은
이러이러한데 넓이가 같아.

혹은 이 넓이는 이 넓이의 몇 배야.

혹은 A 넓이랑 B 넓이가 같아.

이렇게 주어지는 경우가 많다.

왜냐하면 적분이 그래프의 밑넓이와
밀접한 관계이기 때문!

46. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 6 & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + 6 & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q 라 하고, 상수 k ($k > 4$)에 대하여 직선 $x = k$ 가 x 축과 만나는 점을 R 이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $x = k$ 및 선분 QR 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 하자. $A = 2B$ 일 때, k 의 값은? (단, 점 P 의 x 좌표는 음수이다.)

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$
 ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

■ 김지석T Analysis

작년 9월 모평 13번 문제다. 문제에서 그래프가 따로 제시되어 있지 않고 내가 직접 그래프를 그리게 만들었다는 점, 그리고 여러 가지 선대칭함수가 있다는 점에서 살짝 까다롭게 느껴지게 만든 부분이 있다.
 문제 자체는 어렵지 않지만
 같이 풀어보면 좋을 문제!

김지석T 6모 깊은 분석

정답과 해설

*프리즘 해설은

수능한권에서 확인하실 수 있습니다.

1. 38

두 곡선 $y = 2^x + \frac{k}{2}$, $y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$ 의
교점을 A 라 하면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$2^x = t$ 라 하면

$$t + \frac{k}{2} = \frac{k}{t} + k - 2,$$

$$t^2 + (2 - k)t + \frac{k}{2}t - k = 0$$

$$(2t - k)(t + 2) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로} \quad t = \frac{k}{2}$$

$$2^x = t \text{이므로} \quad 2^x = \frac{k}{2}$$

$$\therefore x = \log_2 k - 1 \quad \therefore A(\log_2 k - 1, k)$$

점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y &= -(x - \log_2 k + 1) + k \\ &= -x + \log_2 k + k - 1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

한편 $\textcircled{7}$ 에서 양변에 2를 곱하면

$$2^{x+1} + k = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2(k-2)$$

$$2^{x+1} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 4$$

점 A의 x 좌표는 두 곡선 $y = 2^{x+1}$,

$y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 4$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 은 $y = 2^{x+1}$ 을 x 축의 방향으로
3만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한
것이다. 따라서 이 두 곡선의 교점을 x 축의
방향으로 3만큼 평행이동한 것이 점 B의 x 좌표와
같다.

$$\log_2 k - 1 + 3 = \log_2 k + 2$$

에서 점 B의 x 좌표는 $\log_2 k + 2$ 이고 이 점이
직선 $\textcircled{8}$ 위의 점이므로

$$\therefore B(\log_2 k + 2, k - 3)$$

직선 $y = -x + \log_2 k + k - 1$ 의 y 절편이

$\log_2 k + k - 1$ 이므로 삼각형 AOB의 넓이를
구하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \times \{\log_2 k + 2 - (\log_2 k - 1)\} \\ = \frac{3}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \end{aligned}$$

에서

$$\frac{3}{2}(\log_2 k + k - 1) = 16$$

$$\log_2 k + k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore p = 3, q = 35$$

$$\therefore p + q = 38$$

[다른 풀이]

두 곡선 $y = 2^x + \frac{k}{2}$, $y = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2$ 의
교점을 A라 하면

$$2^x + \frac{k}{2} = k \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$2^x = t$ 라 하면

$$t + \frac{k}{2} = \frac{k}{t} + k - 2,$$

$$t^2 + (2 - k)t + \frac{k}{2}t - k = 0$$

$$(2t - k)(t + 2) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로} \quad t = \frac{k}{2}$$

$$2^x = t \text{이므로} \quad 2^x = \frac{k}{2}$$

$$\therefore x = \log_2 k - 1 \quad \therefore A(\log_2 k - 1, k)$$

점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -(x - \log_2 k + 1) + k = -x + \log_2 k + k - 1$$

이 직선과 곡선 $y = 2^{x-2} - 3$ 의 교점의 x 좌표를
 m 이라 하면

$$2^{m-2} - 3 = -m + \log_2 k + k - 1$$

$$\frac{2^{m-2} - \log_2 k}{(m-2) - k} = -1$$

두 점 $(m-2, 2^{m-2})$, $(k, \log_2 k)$ 를 지나는 직선의 기울기가 -1 이다. 점 $(m-2, 2^{m-2})$ 는 곡선 $y = 2^x$ 위의 점이고 $(k, \log_2 k)$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 위의 점이므로 두 점은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$m-2 = \log_2 k \quad \therefore m = \log_2 k + 2$
따라서 점 B의 좌표는 $(\log_2 k + 2, k-3)$
삼각형 AOB의 넓이를 구하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \times \{\log_2 k + 2 - (\log_2 k - 1)\} \\ &= \frac{3}{2} \times (\log_2 k + k - 1) \end{aligned}$$

에서

$$\frac{3}{2}(\log_2 k + k - 1) = 16$$

$$\log_2 k + k = \frac{35}{3}$$

$$\therefore p = 3, q = 35$$

$$\therefore p + q = 38$$

2. ①

두 곡선 $y = \log_a(x+3)$, $y = \log_a(-x+3)$ 이 만나는 점을 A라 하면

$$\log_a(x+3) = \log_a(-x+3),$$

$$x+3 = -x+3$$

$$\therefore x = 0$$

$$x = 0 \text{ 일 때 } y = \log_a 3 \quad \therefore A(0, \log_a 3)$$

곡선 $y = \log_a(x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 B라 하면 $x = -2$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $B(-2, 0)$

곡선 $y = \log_a(-x+3)$ 이 x 축과 만나는 점을 C라 하면 $x = 2$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $C(2, 0)$

$\overline{BC} = 4$ 이고, 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$4 \times \sin \frac{\pi}{3} = \log_a 3, \quad 2\sqrt{3} = \log_a 3, \quad a^{2\sqrt{3}} = 3$$

$$\therefore a = 3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

3. ⑤

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P의 좌표를 $P(t, a^t) (t < 0)$ 이라 하면 점 P를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점 Q의 좌표는 (a^t, t) 이다. $\angle PQR = 45^\circ$ 이고 직선 PQ의 기울기가 -1 이므로 두 점 Q, R의 x 좌표는 같다. 즉 점 R의 좌표는 $(a^t, -t)$ 이다.

직선 PR의 기울기는 $\frac{1}{7}$ 이므로 $\frac{a^t + t}{t - a^t} = \frac{1}{7}$ 에서

$$a^t = -\frac{3}{4}t \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{PR} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로 } \sqrt{(t - a^t)^2 + (a^t + t)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$a^{2t} + t^2 = \frac{25}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $t^2 = 4$ 이고 $t < 0$ 이므로 $t = -2$

⑦에 대입하면 $\frac{1}{a^2} = \frac{3}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$

4. 8

곡선 $y = 2^x$ 을 y 축에 대하여 대칭 이동한 곡선은 $y = 2^{-x}$ 이고 곡선 $y = 2^{-x}$ 은 직선 $y = x+1$ 과 점 $(0, 1)$ 에서 만난다.

곡선 $y = 2^{-x}$ 을 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의

방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 곡선 $y = f(x)$ 는

곡선 $y = 2^{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$ 과 일치한다.

직선 $y = x+1$ 은 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의

방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행 이동하여도 직선

$y = x+1$ 이 된다.

그러므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x+1$ 이

만나는 점A는 $y = 2^{-x}$ 과 직선 $y = x+1$ 이

만나는 점인 $(0, 1)$ 이 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼,

y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼 평행이동한 점

$\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 이다.

따라서 $k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{k^2} = 8$$

[다른 풀이]

곡선 $y = 2^x$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 후,

x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 만큼

평행 이동한 곡선은 $y = f(x)$ 이므로

$$f(x) = 2^{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \text{이다.}$$

그러므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x + 1$ 이
만나는 점의 x 좌표는

$$x + 1 = 2^{-x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}$$

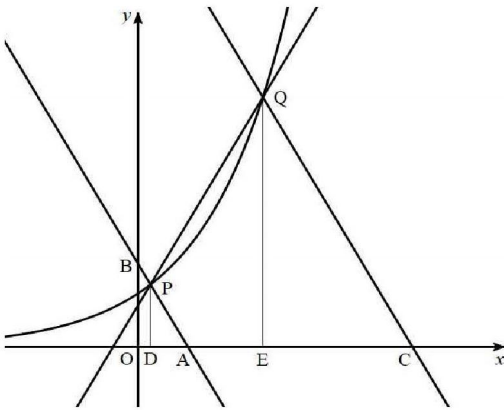
$$2^{-x + \frac{1}{4}} = x + \frac{3}{4} \text{에서 } x = \frac{1}{4}$$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$ 이다.

$$\text{따라서 } k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{이므로 } \frac{1}{k^2} = 8$$

5. 220

지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는
점의 좌표를 구할 수 있는지가 중요하다.



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x 축에 내린
수선의 발을

각각 D, E라 하자.

$\overline{PB} = k$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} = 4\overline{PB} - \overline{PB} = 3\overline{PB} = 3k$$

이고,

$$\overline{CQ} = 3\overline{AB} = 3 \times 4\overline{PB} = 12\overline{PB} = 12k$$

이므로

$$\overline{AP} : \overline{CQ} = 3k : 12k = 1 : 4$$

이때 $\triangle PDA \sim \triangle QEC$ 이므로

$$\overline{PD} : \overline{QE} = \overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 4$$

즉, $2^a : 2^b = 1 : 4$ 이므로

$$2^b = 4 \times 2^a = 2^{a+2}$$

에서

$$b = a + 2$$

즉,

$$m = \frac{2^b - 2^a}{b - a} = \frac{2^{a+2} - 2^a}{(a+2) - a} = \frac{3 \times 2^a}{2} = 3 \times 2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$$y - 2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a) \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$-2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a)$$

$$x - a = \frac{2}{3}$$

$$x = a + \frac{2}{3}$$

즉, 점 A의 x 좌표가 $a + \frac{2}{3}$ 이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD \sim \triangle ABO$

이므로

$$\overline{AO} : \overline{DO} = \overline{AB} : \overline{PB} = 4 : 1$$

$$\text{즉, } a + \frac{2}{3} : a = 4 : 1$$

$$a + \frac{2}{3} = 4a$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$

$$b = a + 2 = \frac{2}{9} + 2 = \frac{20}{9}$$

따라서

$$90 \times (a + b) = 90 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{20}{9}\right) = 90 \times \frac{22}{9} = 220$$

6. ④

점 A($a, 2^a$)와 점 B의 y 좌표가 같으므로

$$15 \cdot 2^{-x} = 2^a$$

양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 15 + (-x) = a$$

$$\therefore x = \log_2 15 - a$$

그러므로

$$\overline{AB} = a - (\log_2 15 - a) = 2a - \log_2 15$$

$$1 < \overline{AB} < 100 \text{에서}$$

$$1 < 2a - \log_2 15 < 100$$

$$1 + \log_2 15 < 2a < 100 + \log_2 15$$

$$\text{한편 } \log_2 2^3 < \log_2 15 < \log_2 2^4 \text{이므로}$$

$$4 \cdot \times \times \times < 2a < 103 \cdot \times \times \times$$

따라서, 자연수 a 는 3 이상 51 이하이므로 구하는 개수는 49개다.

7. ④

$$3 \cdot 2^x = 4^x, 2^x(2^x - 3) = 0, x = \log_2 3 (\because 2^x > 0)$$

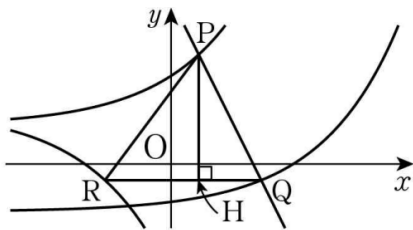
이므로 점 B의 좌표는 $(\log_2 3, 9)$ 이다. 세 점 A, C, D의 좌표는 각각

$$(0, 3), (\log_2 3, 3), (2\log_2 3, 9)$$

이다. 그러므로 사각형 ACDB는 밑변의 길이가 $\log_2 3$ 이고 높이가 6인 평행사변형이다.

따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $6\log_2 3$

8. ②



점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{HQ} = t$ ($t > 0$)이라 하면 직선 PQ의 기울기가 -2 이므로 $\overline{PH} = 2t$ 이고 $\overline{HR} = 5 - t$ 이다.

직각삼각형 PRH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(5 - t)^2 + (2t)^2 = 5^2, t(t - 2) = 0, t = 2$$

따라서 $\overline{PH} = 4$, $\overline{HR} = 3$

점 R의 x 좌표를 m 이라 하면 점 P의 x 좌표는 $m + 3$, 점 Q의 x 좌표는 $m + 5$ 이므로

$$P(m + 3, a^{m+4} + 1), Q\left(m + 5, a^{m+2} - \frac{7}{4}\right),$$

$$R\left(m, -a^{m+4} + \frac{3}{2}\right)$$

점 P의 y 좌표는 점 R의 y 좌표보다 4만큼 크므로

$$a^{m+4} + 1 = \left(-a^{m+4} + \frac{3}{2}\right) + 4$$

$$a^{m+4} = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 Q의 y 좌표와 점 R의 y 좌표가 같으므로

$$a^{m+2} - \frac{7}{4} = -a^{m+4} + \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{7} \text{을 대입하여 정리하면 } a^{m+2} = 1$$

$$a > 1 \text{에서 } m + 2 = 0 \text{이므로 } m = -2$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } a^2 = \frac{9}{4}, a > 1 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

점 P $\left(1, \frac{13}{4}\right)$ 이 직선 $y = -2x + k$ 위의 점이므로

$$\frac{13}{4} = -2 \times 1 + k, k = \frac{21}{4}$$

$$\text{따라서 } a + k = \frac{3}{2} + \frac{21}{4} = \frac{27}{4}$$

9. 13

점 D의 좌표를 $(t, 0)$ ($t > 0$)이라 하자.

점 D는 선분 CA를 5:3으로 외분하는

점이므로 $\overline{CA} : \overline{AD} = 2 : 3$

$$\text{점 A의 } x\text{좌표는 } \frac{2}{5}t, A\left(\frac{2}{5}t, \frac{6}{5}t\right)$$

$$\text{점 C의 } y\text{좌표는 } 2t, C(0, 2t)$$

$$\text{직선 BC의 방정식은 } y = -\frac{1}{3}x + 2t$$

$$\text{점 B는 두 직선 } y = 3x, y = -\frac{1}{3}x + 2t \text{의}$$

$$\text{교점이므로 } B\left(\frac{3}{5}t, \frac{9}{5}t\right)$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}t$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2 = \frac{t^2}{5} = 20$$

$$t^2 = 100 \text{이므로 } t = 10$$

A(4, 12), B(6, 18)이므로

$$12 = 2^{4-m} + n, 18 = 2^{6-m} + n$$

$$18 - 2^{6-m} = 12 - 2^{4-m}$$

$$2^{6-m} - 2^{4-m} = 6$$

$$64 \times 2^{-m} - 16 \times 2^{-m} = 6$$

$$48 \times 2^{-m} = 6, 2^{-m} = \frac{1}{8}$$

$$m = 3, n = 10$$

$$\text{따라서 } m + n = 13$$

10. ④

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q ($p < q$)라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y = 2x + k$ 위의 점이므로

$P(p, 2p + k)$, $Q(q, 2q + k)$ 로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{PQ} = \sqrt{5}$, 즉 $\overline{PQ}^2 = 5$ 이므로

$$(q - p)^2 + (2q - 2p)^2 = 5, (q - p)^2 = 1$$

$q - p > 0$ 이므로 $q - p = 1$, 즉 $q = p + 1$

한편, 점 P는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} + 1$ 의 그래프 위의

점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 1 = 2p + k \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 점 Q는 함수 $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \frac{8}{3}$ 의 그래프 위의

점이므로

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = 2p + k + 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②에서

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} + \frac{8}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+3} + 3, \left(\frac{2}{3}\right)^{p+2} = 1$$

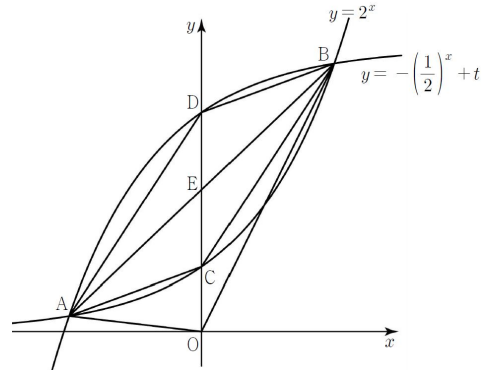
즉, $p + 2 = 0$ 에서 $p = -2$ 이고, 이 값을 ①에

대입하면

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2+3} + 1 = 2 \times (-2) + k$$

$$\text{따라서 } k = \frac{17}{3}$$

11. ⑤



점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha < 0 < \beta$)라 하면

α, β 는 방정식 $(2^x)^2 - t \times 2^x + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$2^\alpha + 2^\beta = t, 2^\alpha \times 2^\beta = 1$$

따라서 $\alpha + \beta = 0, \beta = -\alpha$

네 점 $A(\alpha, 2^\alpha), B(\beta, 2^\beta), C(0, 1), D(0, t-1)$ 에 대하여

$$\text{ㄱ. } \overline{CD} = t - 2 \quad (\text{참})$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \overline{AC} &= \sqrt{(-\alpha)^2 + (-2^\alpha + 1)^2} \\ &= \sqrt{\beta^2 + (2^\beta - t + 1)^2} = \overline{BD} \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \overline{AD} &= \sqrt{\alpha^2 + (2^\alpha - t + 1)^2} \\ &= \sqrt{(-\beta)^2 + (-2^\beta + 1)^2} = \overline{CB} \end{aligned}$$

$\overline{AC} = \overline{DB}, \overline{AD} = \overline{CB}$ 이므로 사각형 ACBD는
평행사변형이고 두 대각선의 교점을 E라
하면

$$\overline{CE} = \overline{DE} \text{이므로 점 E의 좌표는 } \left(0, \frac{t}{2}\right)$$

($\triangle ABD$ 의 넓이)

$= (\triangle AED \text{의 넓이}) + (\triangle BDE \text{의 넓이})$

$$= \frac{1}{2} \times (-\alpha) \times \overline{DE} + \frac{1}{2} \times \beta \times \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{t-2}{2} \right) (-\alpha + \beta)$$

$$= \frac{(t-2)(-\alpha + \beta)}{4} = \frac{\beta(t-2)}{2}$$

($\triangle AOB$ 의 넓이)

$= (\triangle OEA \text{의 넓이}) + (\triangle OBE \text{의 넓이})$

$$= \frac{1}{2} \times (-\alpha) \times \overline{OE} + \frac{1}{2} \times \beta \times \overline{OE}$$

$$= \frac{t(-\alpha + \beta)}{4} = \frac{\beta t}{2}$$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형

AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$ 배이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12. 81

점 P의 좌표는 (0, 1)이다. 곡선 $y = 3^x$ 위의

점 Q의 좌표를 Q(t, 3)이라 하면 $3^t = 3$,

$t = 1 \therefore Q(1, 3)$

직선 PQ의 기울기는 2이고 $\angle RPQ = 90^\circ$ 이므로

직선 PR의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

두 점 P, R를 지나는 직선의 방정식은

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ 점 R의 y좌표가 3이므로 점 R의

좌표는 (-4, 3) 또, 점 R는 곡선 $y = a^x$ 위의
점이므로

$$3 = a^{-4}, \left(\frac{1}{a}\right)^4 = 3 \therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{16} = 3^4 = 81$$

<다른 풀이>

두 점 P, Q의 좌표는 P(0, 1), Q(1, 3)이다.

이때, $\overline{PQ} = \sqrt{(1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$ 곡선

$y = a^x$ 위의 점 R의 좌표를 R(b, 3)이라 하면

$a^b = 3 \cdots (*)$ 이때, $\overline{RQ} = 1 - b$ 이고

$\overline{RP} = \sqrt{(b-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{b^2 + 4}$ 이다.

삼각형 PQR는 직각삼각형이므로 피타고라스의
정리에 의해

$$\overline{RQ}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{RP}^2 \Leftrightarrow (1-b)^2 = 5 + (b^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2b + b^2 = b^2 + 9 \Leftrightarrow 2b = -8 \therefore b = -4$$

$b = -4$ 를 (*)에 대입하면

$$a^{-4} = 3 \therefore \left(\frac{1}{a}\right)^{16} = 81$$

13. 43

정사각형 ACDB의 한 변의 길이가 4이므로

두 점 A, C의 x좌표를 t라 하면 두 점 B, D의
x좌표는 t+4이다.

네 점 A, B, C, D의 y좌표가 각각

$a^t, b^{t+4}, b^t, c^{t+4}$ 이므로

$a^t = 8, b^{t+4} = 8, b^t = 4, c^{t+4} = 4$ 이다.

$$b^{t+4} = 8, b^t = 4 \text{에서 } 4b^4 = 8 \therefore b = 2^{\frac{1}{4}}$$

$$b^t = 4 \text{에서 } \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^t = 4 \therefore t = 8$$

$$a^t = 8 \text{에서 } a^8 = 8 \therefore a = 2^{\frac{3}{8}}$$

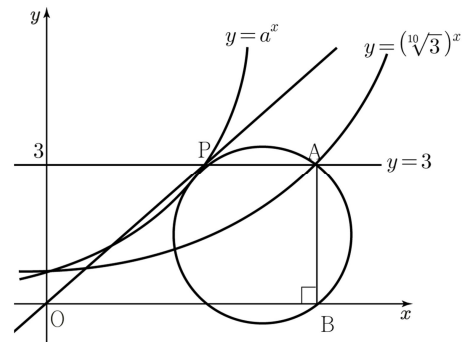
$$c^{t+4} = 4 \text{에서 } c^{12} = 4 \therefore c = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$abc = 2^{\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}$$

따라서 $p = 24, q = 19$ 이고

$$p + q = 43$$

14. ②



점 A의 y좌표가 3이므로 x좌표는 10, A(10, 3)

점 A에서 x축에 내린 수선의 발 B(10, 0)

점 P는 $y = a^x$ 과 $y = 3$ 의 교점이므로

P($\log_a 3, 3$)

삼각형 BAP는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

선분 BP는 원의 지름이다. 직선 OP와 직선

BP는 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

$$\frac{3}{\log_a 3} \times \frac{3}{\log_a 3 - 10} = -1$$

$$(\log_a 3)^2 - 10 \log_a 3 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_a 3 = 1 \text{ 또는 } \log_a 3 = 9$$

$$a = 3 \text{ 또는 } a = 3^{\frac{1}{9}}$$

$$\therefore \text{모든 실수 } a \text{의 값의 곱은 } 3^{\frac{10}{9}}$$

15. ③

선분 AC가 y축에 평행하므로 두 점 A, C의
좌표를 각각

A(t, $\log_2 4t$), C(t, $\log_2 t$) ($t > 1$)라고 하면

$$\overline{AC} = \log_2 4t - \log_2 t = \log_2 \frac{4t}{t} = 2$$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

따라서 점 B의 좌표는

$$B(t - \sqrt{3}, \log_2 4(t - \sqrt{3})) \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(t - \sqrt{3} - t)^2 + \{\log_2 4(t - \sqrt{3}) - \log_2 4t\}^2} \\ &= \sqrt{3 + \left\{ \log_2 \frac{(t - \sqrt{3})}{t} \right\}^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \log_2 \frac{(t - \sqrt{3})}{t} = \pm 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{그런데 } t > 1 \text{ 이므로 } \frac{t - \sqrt{3}}{t} < 1$$

$$\text{따라서 } \log_2 \frac{(t - \sqrt{3})}{t} = -1 \text{ 이고}$$

$$\frac{(t - \sqrt{3})}{t} = \frac{1}{2}, \quad 2(t - \sqrt{3}) = t \quad \therefore t = 2\sqrt{3}$$

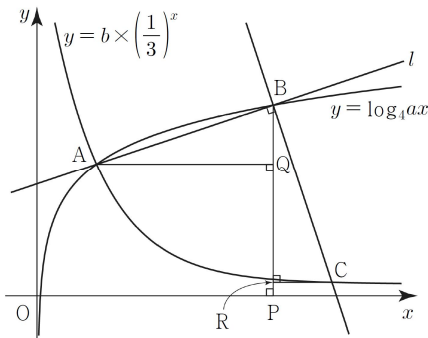
이 때 점 B의 좌표는 $B(\sqrt{3}, \log_2 4\sqrt{3})$ 이므로

$$p = \sqrt{3}, \quad q = \log_2 4\sqrt{3}$$

$$\therefore p^2 \times 2^q = (\sqrt{3})^2 \times 2^{\log_2 4\sqrt{3}} = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

16. ②

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 P, 점 A에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 Q, 점 C에서 선분 BP에 내린 수선의 발을 R라 하자.



ㄱ. 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{AQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{3}, \quad y_2 - y_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{10}{9}(x_2 - x_1)^2 = 10, \quad (x_2 - x_1)^2 = 9$$

$$x_1 < x_2 \text{ 이므로 } x_2 - x_1 = 3 \quad (\text{참})$$

$$\therefore \angle AQB = \angle BRC = \frac{\pi}{2}$$

이고

$$\angle ABQ + \angle CBR = \angle CBR + \angle BCR = \frac{\pi}{2}$$

이므로

$$\angle ABQ = \angle BCR$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{10}$$

이므로 두 삼각형 ABQ와 BCR는 합동이다.

$$\overline{AQ} = \overline{BR} = 3, \quad \overline{BQ} = \overline{CR} = 1$$

$$x_3 - x_1 = \overline{AQ} + \overline{CR} = 3 + 1 = 4$$

$$y_1 - y_3 = \overline{QR} = \overline{BR} - \overline{BQ} = 3 - 1 = 2$$

$$x_3 - x_1 = 2(y_1 - y_3) = 4 \quad (\text{참})$$

ㄴ. ㄱ에 의하여 $A(x_1, y_1)$, $B(x_1 + 3, y_1 + 1)$

두 점 A, B는 곡선 $y = \log_4 ax$ 위에 있으므로

$$y_1 = \log_4 ax_1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$y_1 + 1 = \log_4 a(x_1 + 3) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

점 A는 곡선 $y = b \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에 있으므로

$$y_1 = \frac{b}{3^{x_1}} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ 을 연립하면 } 1 = \log_4 \frac{x_1 + 3}{x_1}, \quad x_1 = 1$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{8} \text{ 에 의하여 } \log_4 a = \frac{b}{3}, \quad a = 4^{\frac{b}{3}}$$

$$a^2 = 4^{\frac{2}{3}b} \quad (\text{거짓})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고]

점 C($x_1 + 4$, $y_1 - 2$)는 곡선 $y = b \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위에

있고 $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{b}{3}$ 이므로 $\frac{b}{3} - 2 = b \times 3^{-5}$ 에서

$$b = \frac{243}{40}$$

$$a = 4^{\frac{b}{3}} = 4^{\frac{81}{40}} = 2^{\frac{81}{20}}$$

17. 6

$A(1, 0)$, $B(k, \log_2 k)$, $C(k, \log_{\frac{1}{2}} k)$ 이므로

삼각형 ACB의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2k+1}{3}, 0\right)$ 이고

$\frac{2k+1}{3} = 3$ 에서 $k = 4$

따라서 $B(4, 2)$, $C(4, -2)$ 이므로

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$

18. ③

$P(p, \log_a p)$, $Q(q, \log_a q)$ ($p > q$)로 놓으면

선분 PQ의 중점이 원 C의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ 이므로

$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{4}$ 에서 $p+q = \frac{5}{2}$

$\frac{\log_a p + \log_a q}{2} = 0$ 에서 $\log_a pq = 0$, $pq = a^0 = 1$

p, q 를 두 실근으로 갖는 t 에 대한 이차방정식

$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$ 에서

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$(2t-1)(t-2) = 0$$

$t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = 2$, 즉 $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는

$P(2, \log_a 2)$, $Q\left(\frac{1}{2}, -\log_a 2\right)$ 이다.

선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$$\overline{PQ}^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \{\log_a 2 - (-\log_a 2)\}^2 = \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$$(\log_a 4)^2 = 1$$

이때 $a > 1$ 이므로 $\log_a 4 = 1$ 에서 $a = 4$

19. 11

두 곡선 $y = 5^x + \frac{4k}{5}$, $y = k \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + k - 5$ 의

교점을 A라 하자.

$$5^x + \frac{4k}{5} = k \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + k - 5$$

$5^x = t$ 라 하면 $t > 0$ 이다.

$$t + \frac{4k}{5} = \frac{k}{t} + k - 5$$

$$(5t - k)(t + 5) = 0$$

$t > 0$ 이므로 $t = \frac{k}{5}$

$5^x = \frac{k}{5}$ 이므로 $x = \log_5 \left(\frac{k}{5}\right) = \log_5 k - 1$

이때 $y = 5^{\log_5 k - 1} + \frac{4k}{5} = \frac{k}{5} + \frac{4k}{5} = k$

따라서 점 A의 좌표는 $(\log_5 k - 1, k)$

점 A($\log_5 k - 1, k$)를 지나고 기울기가 -1 인

직선의 방정식은

$$y - k = -1 \cdot \{x - (\log_5 k - 1)\}$$

$$y = -x + \log_5 k - 1 + k$$

..... ①

이 직선과 곡선 $y = 5^{x-1} - 2$ 가 만나는 점을 B의 x 좌표를 α 라 하면

$$5^{\alpha-1} - 2 = -\alpha + \log_5 k - 1 + k$$

$$\frac{5^{\alpha-1} - \log_5 k}{(\alpha-1) - k} = -1$$

두 점 $(\alpha-1, 5^{\alpha-1})$, $(k, \log_5 k)$ 를 지나는 직선의

기울기가 -1 이고 두 함수 $y = 5^x$, $y = \log_5 x$ 은

서로 역함수 관계이므로 두 곡선 $y = 5^x$,

$y = \log_5 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\alpha - 1 = \log_5 k \quad \therefore \alpha = \log_5 k + 1$$

$\alpha = \log_5 k + 1$ 일 때 ①의 의하여 $y = k - 2$

그러므로 점 B의 좌표는 $(\log_5 k + 1, k - 2)$

직선 ①이 y 축과 만나는 점을 C라 하면 C의

좌표는 $(0, \log_5 k + k - 1)$ 이다.

삼각형 AOB의 넓이는 $\triangle BOC - \triangle AOC$ 와 같으므로

$$\frac{1}{2} \times (\log_5 k + k - 1) \{ \log_5 k + 1 - (\log_5 k - 1) \}$$

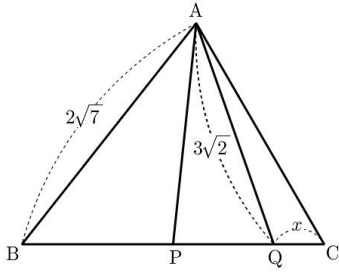
$$= \log_5 k + k - 1$$

에서

$$\log_5 k + k - 1 = 10$$

$$\therefore \log_5 k + k = 11$$

20. ②



$\overline{AB} = 2\sqrt{7}$, $\overline{AQ} = 3\sqrt{2}$ 이고 선분 BC를 5:1로
내분하는 점이 Q 이므로 $\overline{CQ} = x$ 라 하면

$\overline{PQ} = 2x$, $\overline{BC} = 6x$

삼각형 APQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin(\angle APQ)}$$

이때 $\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = \sqrt{2} : 3$ 이므로

$\sin(\angle QAP) = \sqrt{2}k$, $\sin(\angle APQ) = 3k$ 라 하면

$$\frac{\overline{PQ}}{\sqrt{2}k} = \frac{3\sqrt{2}}{3k}, \quad \overline{PQ} = 2$$

$2x = 2$ 이므로 $x = 1$

$$\overline{CQ} = 1, \quad \overline{BC} = 6$$

삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{(2\sqrt{7})^2 + 5^2 - (3\sqrt{2})^2}{2 \times 2\sqrt{7} \times 5} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2(\angle ABQ) + \cos^2(\angle ABQ) = 1$$

에서

$$\sin(\angle ABQ) = \frac{3}{4}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (2\sqrt{7})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 6 \times \cos(\angle ABC) \\ = 22$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{22}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라
하면 사인법칙에 의하여

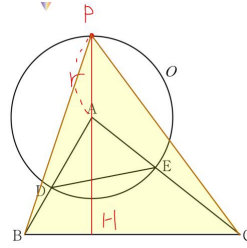
$$\frac{\sqrt{22}}{\sin(\angle ABC)} = 2R, \quad \frac{\sqrt{22}}{\frac{3}{4}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{2\sqrt{22}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{22}}{3}\right)^2 = \frac{88}{9}\pi$$

21. ④

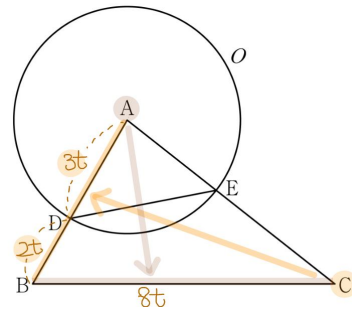


구하는 것 ▶ $\triangle PBC$ 의 넓이의 최댓값

$$\rightarrow \frac{1}{2} \times (r + \overline{AH}) \times \overline{BC} \quad (\text{단, } r \text{은 원 } O \text{의 반지름})$$

$\rightarrow r$ 과 $\overline{AH}$ 를 구해야 한다.

- 각에 대한 단서가 많다 $\rightarrow$ 사인법칙
- 외접원 $\rightarrow$ 사인법칙
- 변 길이에 대한 단서가 많다 $\rightarrow$ 코사인법칙
(step1) 각에 대한 단서가 많다 $\rightarrow$ 사인법칙



$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$ 이므로

$\overline{AD} = 3t$, $\overline{DB} = 2t$ 라고 하자.

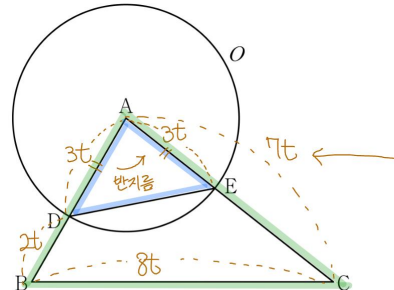
$$\therefore \overline{AB} = 5t$$

$\sin A : \sin C = 8 : 5$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\overline{BC} : \overline{AB} = 8 : 5$$

$$\therefore \overline{BC} = 8t$$

(step2) 넓이 단서 활용



두 삼각형 ADE, ABC의 넓이의 비가 9:35

06 해설

41. [2021년 4월 (공통) 20번]

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC가 있다.
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 28π 일 때, 선분
CA의 길이를 구하시오. [4점]

필연성 08

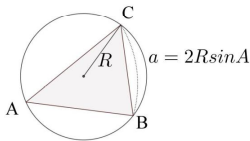
사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]

- ✓ 2변 1각 → 1각
- ✓ 1변 2각 → 1변
- ✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

- ✓ 외접원 있을 때



필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

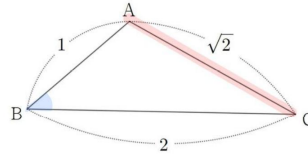
[단서] → [답]

- ✓ 2변 1각 → 1변
- ✓ 3변 → 각



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

7



구하는 것 : $\overline{CA}$

■ 외접원에 대한 단서 → 사인법칙

→ $\overline{CA} = 2R \sin B$

■ 23. 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(Step1) 외접원의 반지름 R 구하기

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때
외접원의 넓이가 28π 이므로

$$R = 2\sqrt{7}$$

(Step2) $\sin B$ 구하기

코사인법칙에 의해

$$\cos B = \frac{1^2 + 2^2 - \sqrt{2}^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(Step3) 구하는 것 계산하기

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= 2R \sin B \\ &= 2 \times 2\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 7 \end{aligned}$$

02

도형의 필연성 실전적용

Answer

[2021년 3월 (공통) 21번]

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 1:3으로 내분한다. 두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r , R 라 할 때,

$4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이다. $\overline{AC}^2$ 의 값을

구하시오. (단, $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$) [4점]



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

15

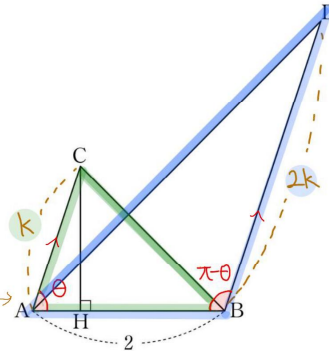
구하는 것 $\cdot \overline{AC}^2$

- 평행선 $\rightarrow$ 각도에 대한 단서
- 외접원 $\rightarrow$ 사인법칙
- $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$, $\overline{AB}$ 를 1:3 내분 $\rightarrow$ 변 길이에 대한 단서 많다 $\rightarrow$ 코사인법칙

필연성 10

평행선 $\Rightarrow$ 각도

- ✓ 문제에서 평행선이 나오면 각도(엇각, 동위각)를 찾아라!
- ✓ 각도 사이의 관계를 구해야할 때는 평행선을 그어서 각도의 꼭짓점을 일치시켜라!



필연성 08

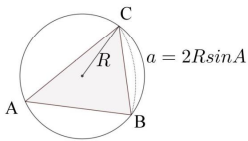
사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] $\rightarrow$ [답]

- ✓ 2변 1각 $\rightarrow$ 1각
- ✓ 1변 2각 $\rightarrow$ 1변
- ✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

- ✓ 외접원 있을 때



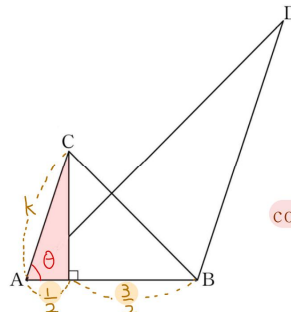
필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] $\rightarrow$ [답]

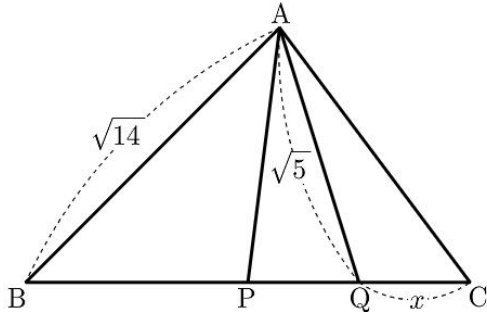
- ✓ 2변 1각 $\rightarrow$ 1변
- ✓ 3변 $\rightarrow$ 각

$$\begin{aligned}
 4(R^2 - r^2) \times \sin^2 \theta &= 51 \\
 &= (2R \sin(\pi - \theta))^2 - (2r \sin \theta)^2 \\
 &= \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 \\
 &= \{(2k)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2k \cdot 2 \cos(\pi - \theta)\} \\
 &\quad - \{k^2 + 2^2 - 2 \cdot k \cdot 2 \cos \theta\} \\
 &= 3k^2 + 12k \cos \theta \\
 &= 3k^2 + 12k \cdot \frac{1}{2k} \\
 &= 3k^2 + 6 = 51 \\
 \therefore \overline{AC}^2 &= k^2 = 15
 \end{aligned}$$



$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{2k}$$

24. ④



$\overline{AB} = \sqrt{14}$, $\overline{AQ} = \sqrt{5}$ 이고 선분 BC를 3:1로
내분하는 점이 Q 이므로 $\overline{CQ} = x$ 라 하면
 $\overline{BQ} = 3x$, $\overline{BC} = 4x$
점 P 는 선분 BC 의 중점이므로
 $\overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2x$

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} - \overline{BP} = 3x - 2x = x$$

삼각형 APQ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle QAP)} = \frac{\overline{AQ}}{\sin(\angle APQ)}$$

이때 $\sin(\angle QAP) : \sin(\angle APQ) = 1 : \sqrt{5}$ 이므로
 $\sin(\angle QAP) = k$, $\sin(\angle APQ) = \sqrt{5}k$ (단,
 $k > 0$)이라 하면

$$\frac{x}{k} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}k}, \quad x = 1$$

$x = 1$ 이므로 $\overline{PQ} = 1$

$$\overline{CQ} = 1, \overline{BQ} = 3, \overline{BC} = 4$$

삼각형 ABQ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BQ}^2 - \overline{AQ}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BQ}}$$

$$= \frac{(\sqrt{14})^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{14} \times 3} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

$$\cos(\angle ABQ) = \frac{3\sqrt{14}}{14} \text{ 이므로}$$

$$\sin^2(\angle ABC) = 1 - \cos^2(\angle ABC) = 1 - \left(\frac{3\sqrt{14}}{14}\right)^2$$

$$= \frac{5}{14}$$

$$\text{에서 } \sin(\angle ABC) = \sqrt{\frac{5}{14}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$$

$$= (\sqrt{14})^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{14} \times 4 \times \frac{3\sqrt{14}}{14} = 6$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{6}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라
하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin(\angle ABC)} = 2R, \quad \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{70}}{14}} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{105}}{5}$$

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{105}}{5}\right)^2 = \frac{21}{5}\pi$$

25. 85

방정식 $f(x) = x$ 의 모든 실근이 0, 3 이므로 방정식
 $f(f(x)) = f(x)$ 의 실근을 구하는 것은
 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 의 실근을 구하는 것과 같다.

$0 \leq x < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) \times (f(x) - 3) = 0$ 에서

$$-x^2 + 4x = 0 \text{ 이면 } x = 0 \quad (\because 0 \leq x < 4)$$

$$-x^2 + 4x = 3 \text{ 이면 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $0 \leq x < 4$ 에서 방정식

$$f(x) \times (f(x) - 3) = 0 \text{ 의 모든 실근은 } 0, \boxed{1},$$

3 이므로

$$a_1 = 0, a_2 = \boxed{1}, a_3 = 3$$

이다.

또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$a_1 = 0,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_3 = 3$$

$$a_4 = 0 + 4 = 4,$$

$$a_5 = 1 + 4 = 5,$$

$$a_6 = 3 + 4 = 7$$

$$a_7 = 2 \times 4 = 8,$$

$$a_8 = 1 + 2 \times 4 = 9,$$

$$a_9 = 3 + 2 \times 4 = 11$$

$\vdots$

이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$ 은

첫째항이 각각 0, $\boxed{1}$, 3 이고 공차가 모두 $\boxed{4}$ 인

등차수열이다.

$$\therefore a_{3n-2} = 0 + (n-1) \times 4,$$

$$a_{3n-1} = 1 + (n-1) \times 4,$$

$$a_{3n} = 3 + (n-1) \times 4$$

이다.

$$a_{20} = 1 + (7-1) \times 4 = 25,$$

$$a_{21} = 3 + (7-1) \times 4 = 27,$$

$$a_{22} = 0 + (8-1) \times 4 = 28$$

이므로

$$a_{20} + a_{21} + a_{22} = \boxed{80} \text{이다.}$$

이상에서 (가) 1, (나) 4, (다) 80이므로

$$p = 1, q = 4, r = 80$$

$$\therefore p + q + r = 1 + 4 + 80 = 85$$

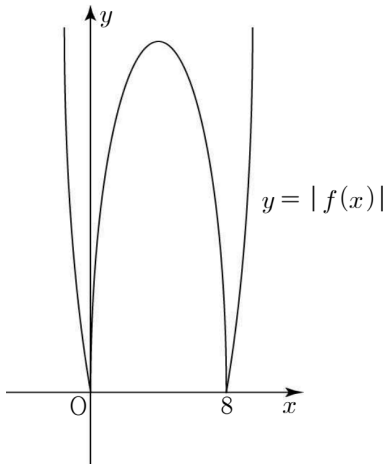
26. ③

주어진 조건을 만족하는 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 하면

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n\{2a_1 + 3(n-1)\}}{2} = a(n-4)^2 + b$$

$$f(n) = \frac{3}{2}n(n-8)$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는



(i) $n \leq 3$ 또는 $n \geq 8$ 일 때, $|f(n)| < |f(n+1)|$

(ii) $4 \leq n \leq 7$ 일 때, $|f(n)| > |f(n+1)|$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 7

27. ②

조건 (나)에서

$$a_{n+1} = a_n - 3 \text{ 또는 } a_{n+1} = 2a_n$$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 다음과

같다.

(i) $a_2 = a_1 - 3, a_3 = a_2 - 3$ 일 때

$$a_3 = (a_1 - 3) - 3 = a_1 - 6$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$0 = -6$$

이는 모순이므로 이 경우 만족하는 수열은 존재하지 않는다.

(ii) $a_2 = a_1 - 3, a_3 = 2a_2$ 일 때

$$a_3 = 2(a_1 - 3) = 2a_1 - 6$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 2a_3 - 6, \quad a_3 = 6$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{일 때} \quad a_4 = 3$$

$$a_4 = 2a_3 \text{일 때} \quad a_4 = 12$$

(iii) $a_2 = 2a_1, a_3 = a_2 - 3$ 일 때

$$a_3 = a_2 - 3 = 2a_1 - 3$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 2a_3 - 3, \quad a_3 = 3$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{일 때} \quad a_4 = 0$$

$$a_4 = 2a_3 \text{일 때} \quad a_4 = 6$$

(iv) $a_2 = 2a_1, a_3 = 2a_2$ 일 때

$$a_3 = 2a_2 = 4a_1$$

조건 (가)에서 $a_1 = a_3$ 이므로 위 식에 대입하면

$$a_3 = 4a_3, \quad a_3 = 0$$

$$a_4 = a_3 - 3 \text{일 때} \quad a_4 = -3$$

$$a_4 = 2a_3 \text{일 때} \quad a_4 = 0$$

이상에서 a_4 의 최댓값은 12이다.

28. 8

조건 (나)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$$

이므로

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k \text{ 또는 } a_{n+1} = -ka_n$$

$a_1 = k$ 이고 $a_2 \times a_3 < 0$ 이므로 $a_2 = -k^2$ 이면

$a_3 = k^3$ 이어야 하고, $a_2 = \frac{k}{3}$ 이면 $a_3 = -\frac{k^2}{3}$ 또는

$a_3 = -\frac{k}{3}$ 이다. 따라서 이를 표로 나타내면

다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
k	$-k^2$	k^3	$-k^4$	0
k	$-k^2$	k^3	$k^3 - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$\frac{k^3}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$\frac{k^2}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$-k$	0

(i) $a_4 = -k^4$ 일 때

$a_5 = k^5$ 또는 $a_5 = -k^4 - \frac{2}{3}k$ 이므로 $a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(ii) $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$ 일 때

(a) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) \times (-k)$ 인 경우
 $-k^2\left(k^2 - \frac{2}{3}\right) = 0 \therefore k^2 = \frac{2}{3}$

(b) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k$ 인 경우
 $k^3 - \frac{4}{3}k = 0 \therefore k^2 = \frac{4}{3}$

(iii) $a_4 = \frac{k^3}{3}$ 일 때

$$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \therefore k^2 = 2$$

(iv) $a_4 = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$ 일 때

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(v) $a_4 = \frac{k^2}{3}$ 일 때

$$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \therefore k^2 = 4$$

(vi) $a_4 = -k$ 인 경우

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 양수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합은

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 + 4 = 8$$

29. ④

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = -a_1 + \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = a_2 + \sin \pi = 1 + 0 = 1$$

$$a_4 = -a_3 + \sin \frac{3}{2}\pi = -1 - 1 = -2$$

$$a_5 = a_4 + \sin 2\pi = -2 + 0 = -2$$

$$a_6 = -a_5 + \sin \frac{5}{2}\pi = 2 + 1 = 3$$

$$a_7 = a_6 + \sin 3\pi = 3 + 0 = 3$$

$$a_8 = -a_7 + \sin \frac{7}{2}\pi = -3 - 1 = -4$$

$$a_9 = a_8 + \sin 4\pi = -4 + 0 = -4$$

$\vdots$

$$\therefore a_{4k-2} = a_{4k-1} = 2k - 1$$

$$a_{4k} = a_{4k+1} = -2k$$

$$\therefore a_{50} = 2 \cdot 13 - 1 = 25$$

30. 42

$f(x) = 0$ 에서 $x = 1$ 또는 $x = 2$ 이고, 모든 실수

a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

(i) $a = 1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)\{-f(x)\}}{f(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 2-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) \times |f(x)|}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} g(x)$$

에서

$$- \lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

$g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

(i), (ii)에 의해

$$g(1) = g(2) = 0$$

따라서

$$g(x) = (x-1)(x-2)h(x)$$

$$= f(x)h(x)$$

라 놓을 수 있다.

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}$ 의 값이

존재해야하고

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x)||h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

이므로

(i) $a = 1$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} = - \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} \dots \textcircled{\ominus}$$

$h(1)=0$ 이면 $\textcircled{\ominus}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$h(1) \neq 0 \quad \therefore h(1) = 1$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서

$$- \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{|h(x)-1|}{h(x)} \dots \textcircled{\ominus}$$

$h(2)=0$ 이면 $\textcircled{\ominus}$ 의 값이 존재하지 않으므로

$$h(2) \neq 0 \quad \therefore h(2) = 1$$

(i), (ii)에서 $h(1)=1$, $h(2)=1$ 이고 $h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$$h(x) = (x-1)(x-2)+1$$

$g(x) = f(x)h(x)$ 에 대입하면

$$g(x) = (x-1)(x-2)\{(x-1)(x-2)+1\}$$

$$= (x-1)^2(x-2)^2 + (x-1)(x-2)$$

$$\therefore g(-1) = 36 + 6 = 42$$

31. ①

$$g(x) = \begin{cases} f(x)+k & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ -f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

에서

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ -f'(x) & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이고,

$$f'(-1) = f'(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{\ominus}$$

이다.

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ 의 값이

존재하므로

(i) $x = 1$ 에서

$$g(1) = -f(1), \quad \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + k\}$$

이므로

$$-f(1) = f(1) + k, \quad k = -2f(1) \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

(ii) $x = -1$ 에서

$$g(-1) = -f(-1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-f(x)\}$$

이므로 이는 항상 성립한다.

이때 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)라 놓으면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 6 \text{ 이므로 } f'(0) = c = 6$$

㉠에서 방정식 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 6 = 0$ 의 두 근이 $-1, 1$ 이므로 근과 계수의 관계에서

$$-\frac{2b}{3a} = 0, \quad \frac{6}{3a} = -1$$

따라서 $a = -2, b = 0$ 이므로

$$f(x) = -2x^3 + 6x + d$$

조건 (나)를 만족하는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음과 같이

$$g(-1) = -f(-1) = 13$$

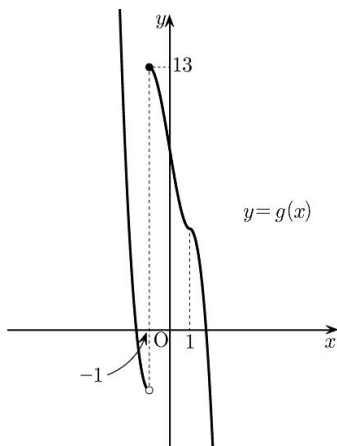
이고,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) + k\}$$

$$= f(-1) + k$$

$$= -13 + k < 13$$

즉, $k < 26$ 을 만족해야 한다. $\dots\dots \textcircled{\text{B}}$



$$g(-1) = -f(-1) = 13, \text{ 즉 } f(-1) = -13 \text{에서}$$

$$f(-1) = 2 - 6 + d = -13, \quad d = -9$$

$$\therefore f(x) = -2x^3 + 6x - 9$$

㉠에서 $k = -2f(1)$ 이므로

$$k = -2(-2 + 6 - 9) = 10$$

$k = 10$ 이므로 ㉠을 만족한다.

$$\therefore k + f\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + \left(-\frac{25}{4}\right) = \frac{15}{4}$$

32. ㉡

$A(1, f(1)), P(a, f(a))$ 를 지나며 각각 x 축, y 축에 평행한 직선을 그어 만나는 점을 Q 라 하자.

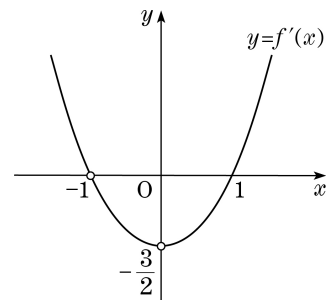
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{\overline{PA}}{\overline{QA}} = \lim_{a \rightarrow 1+} \frac{\sqrt{(a^2 - 1)^2 - (a - 1)^2}}{a - 1} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\sqrt{a(a+2)(a-1)^2}}{a - 1} = \lim_{a \rightarrow 1} \sqrt{a(a+2)} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

33. ㄴ

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 0$ 에서만 불연속이고,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 3) \quad (\text{단, } x \neq -1, x \neq 0)$$

따라서 도함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. (거짓)

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이므로 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. (참)

$$\text{함수 } y = f'(x) \text{의 그래프에서 } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{3}{2}$$

ㄷ. (거짓)

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 3x) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3 - \frac{1}{x} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}(x^3 - 3x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2}(x^2 - 3) = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

ㄴ. (거짓)

$f'(x) = t$ 라 하면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(f'(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

34. 16

모든 삼차함수 그래프는 반드시 x 축과 만나므로
방정식 $f(x) = 0$ 는 반드시 실근을 갖는다.



모든 실수 α 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)} \text{의 값이 존재하려면}$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(2x+1) = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$\therefore f(x) = 0$ 의 실근과 $f(2x+1) = 0$ 의 실근은 같다.

$\rightarrow$ 방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근이나, 세 실근을 가지면 모든 근에 대하여 위의 조건을 만족시키지 못하므로 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수는 1이다.

그 실근을 t 라 하면

$$f(t) = 0 \text{ 이고 } f(2t+1) = 0$$

$$\therefore t = 2t+1, t = -1$$

$$\therefore f(-1) = -1 + a - b + 4 = 0, b = a + 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + (a+3)x + 4$$

$$= (x+1)\{x^2 + (a-1)x + 4\}$$

이차방정식 $x^2 + (a-1)x + 4 = 0$ 은 실근을 가지지 않아야 하므로

$$D = (a-1)^2 - 4^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a-5)(a+3) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5$$

$f(1)$ 의 최댓값은

$$f(1) = 2a + 8 \leq 2 \times 4 + 8 = 16$$

(a 가 정수이고 $-3 < a < 5$ 이므로 $a = 4$ 일 때 최대)

[참고]

왜 $f(x) = 0$ 의 실근과 $f(2x+1) = 0$ 의 실근은 같을 때 $f(x) = 0$ 의 실근의 개수는 1이어야만 하는가?

[설명1]

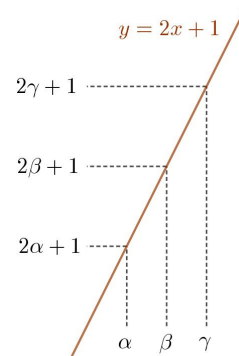
예를 들어 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 세 실근을 갖고 세 근이 α, β, γ 라고 하면 (단, $\alpha < \beta < \gamma$ 인 상수)

$$f(\alpha) = f(2\alpha+1) = 0$$

$$f(\beta) = f(2\beta+1) = 0$$

$$f(\gamma) = f(2\gamma+1) = 0 \text{ 이므로}$$

$2\alpha+1, 2\beta+1, 2\gamma+1$ 도 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 세 실근이다. ($2\alpha+1 < 2\beta+1 < 2\gamma+1$)



$f(x) = 0$ 의 서로 다른 세 실근을 갖는다면

$$\alpha = 2\alpha+1, \beta = 2\beta+1, \gamma = 2\gamma+1$$

이어야 하는데 $\alpha = \beta = \gamma = -1$ 이 되어 모순이다.

서로 다른 두 근을 가질 때도 같은 방법으로 모순이 있음을 보일 수 있다.

[설명2]

어떤 상수 $\alpha \neq -1$ 에 대하여

α 가 $f(x) = 0$ 의 근이라고 하자.

그러면 $f(2\alpha+1) = 0$ 의 근이기도 하다.

$$f(2\alpha+1) = 0$$

$\therefore 2\alpha + 1$ 는 $f(x) = 0$ 의 근이므로
 $f(2x+1) = 0$ 의 근이기도 하다.

$$f(2(2\alpha+1)+1) = f(4\alpha+3) = 0$$

$\therefore 4\alpha + 3$ 은 $f(x) = 0$ 의 근이므로

$f(2x+1) = 0$ 의 근이기도 하다.

이런 방식으로 $f(x) = 0$ 의 근을 계속 찾을 수 있는데

만약 $\alpha \neq 2\alpha + 1 (\Leftrightarrow \alpha \neq -1)$ 이라면 $f(x) = 0$ 의 근이 무한히 많게 되므로 $f(x)$ 가 삼차함수라는 조건에 위배된다.

즉 $f(x) = 0$ 이 -1 이외의 근을 가질 경우

$f(x) = 0$ 의 근이 무한히 많게 된다.

$\therefore f(x) = 0$ 의 근은 -1 하나 뿐이다.

35. 19

연속함수의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있어야 한다.

함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체에서 연속하려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 성립한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+3)f(x) = 3f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a)f(x-b) = af(-b),$$

$$g(0) = af(-b)$$

이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$3f(0) = af(-b) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

한편,

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|g(x)|}{(x+3)^2 \{ \sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)| \}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \{ \sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)| \}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이때 $t \neq -3$ 이고 $t \neq 6$ 인 모든 실수 t 에 대하여

$\textcircled{9}$ 의 값이 존재하므로

$$f(x) = (x+3)(x+k) \quad (k \text{는 상수})$$

의 꼴이어야 하고, $\textcircled{9}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)(x+k)|}{(x+3)^2 \times 2|g(t)|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+k|}{2|g(t)|} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

이때 $t=3$ 과 $t=6$ 에서만 $\textcircled{10}$ 의 값이 존재하지

않으므로 방정식 $g(x)=0$ 의 모든 실근은 $x=-3$ 과 $x=6$ 뿐이다.

주어진 식에서 $g(-3)=0$ 이므로

$$g(6)=0, \text{ 즉 } (6+a)f(6-b)=0$$

이어야 한다.

이때 $a > 0$ 이므로

$$f(6-b)=0 \text{에서}$$

$$6-b=-3 \text{ 또는 } 6-b=-k$$

$$\text{따라서 } b=9 \text{ 또는 } k-b=-6$$

(i) $b=9$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때

$x < 0$ 에서 $g(x)=0$ 의 해는 -3 뿐이므로

$$-k \geq 0 \text{ 또는 } k=3 \dots\dots \textcircled{11}$$

$x \geq 0$ 에서

$$g(x) = (x+a)f(x-9)$$

$$= (x+a)(x-6)(x-9+k)$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x)=0$ 의 해는 6 뿐이므로

$$9-k < 0 \text{ 또는 } 9-k=6 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}$, $\textcircled{12}$ 에서

$$k=3$$

따라서 $f(x) = (x+3)^2$ 이므로 $\textcircled{10}$ 에서

$$3 \times 3^2 = af(-9), \quad 27 = 36a$$

$$a = \frac{3}{4}$$

따라서

$$g(4) = (4+a)f(4-b)$$

$$= \left(4 + \frac{3}{4}\right)f(-5)$$

$$= \frac{19}{4} \times (-2)^2 = 19$$

(ii) $k - b = -6$ 인 경우

$x < 0$ 에서

$$g(x) = (x+3)f(x) = (x+3)^2(x+k)$$

이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 -3 뿐이므로

$$-k \geq 0 \text{ 또는 } k = 3$$

$x \geq 0$ 에서

$$g(x) = (x+a)f(x-b)$$

$$= (x+a)(x-b+3)(x-b+k)$$

$$= (x+a)(x-b+3)(x-6)$$

이때 $x \geq 0$ 에서 $g(x) = 0$ 의 해는 6 뿐이고,

$b > 3$ 이므로

$$b-3=6 \text{에서}$$

$$b=9$$

$$k-b=-6 \text{에서}$$

$$k=3$$

따라서 (i)와 같은 결과이므로

$$g(4)=19 \text{이다.}$$

36. 18

조건 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = 0 \dots\dots \textcircled{A}$$

조건 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \alpha (\alpha \neq 1)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f'(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$f(2) = 0 \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에 의해

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x+a) \quad (k, a \text{는 상수, } k \neq 0)$$

$$f'(x) = k\{(x-2)(x+a) + (x-1)(x+a) + (x-1)(x-2)\}$$

$a \neq -2$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)} \\ &= \frac{2+a}{2+a} \end{aligned}$$

$$= 1 \neq \alpha$$

그러므로 $a = -2$ 이며 $f(x) = k(x-1)(x-2)^2$

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2 + 2k(x-1)(x-2)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x-2) + 2(x-1)} \\ &= \frac{1}{0+2 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3 \text{이므로} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \alpha \times f(4) = \frac{1}{2} \times (3 \times 3 \times 2^2) = 18$$

37. 729

$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$ 의 값이 존재할 때,

$$\lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} = \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} &= \lim_{x \rightarrow k-k} \left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times \frac{x-k}{|x-k|} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times (-1) \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{|x-k|} &= \lim_{x \rightarrow k+} \left(\frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times \frac{x-k}{|x-k|} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \times 1 \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

$\textcircled{A}$ 과 $\textcircled{B}$ 이 같아야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} = 0 \text{이거나 } \lim_{x \rightarrow k-} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \text{와}$$

$$\lim_{x \rightarrow k+} \frac{g(x)-g(k)}{x-k} \text{의 절댓값이 같고 부호가}$$

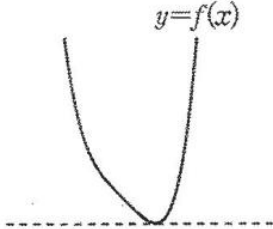
반대이어야 한다.

따라서 $g'(k) = 0$ 즉, $f'(k) = 0$ 이거나

$g(k)=0$ 즉, $f(k)=t$ 이다.

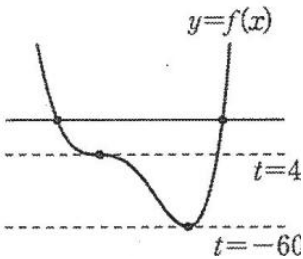
방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1인 경우



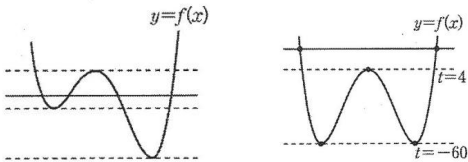
함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 실수 t 가 오직 하나만 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(ii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우



함수 $h(t)$ 가 $t=-60$ 과 $t=4$ 에서 불연속이므로 $f'(\alpha)=0$ 일 때 $f(\alpha)$ 의 값은 -60 과 4 이다. 이때 $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=4$ 가 되어 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(iii) $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우



[그림 1]

[그림 2]

[그림 1]과 같이 두 극솟값의 크기가 다르면 함수 $h(t)$ 가 불연속이 되는 서로 다른 실수 t 가 3개 존재하므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

[그림 2]와 같이 두 극솟값의 크기가 같은

경우 조건 (나)를 만족시키고, 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이면 $\lim_{t \rightarrow 4+} h(t)=5$ 이므로 조건

(가)를 만족시킨다. 이때 $h(4)=5$

(i), (ii), (iii)에서 사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고 두 극솟값은 모두 -60 , 극댓값은 4이다.

$f(2)=4$ 이고 $f'(2)>0$ 이므로 방정식 $f(x)=4$ 의 가장 큰 실근이 2가 된다.

함수 $f(x)$ 의 그래프를 극대인 점이 원점에 오도록 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $p(x)$ 라 하면, $p(0)=0$ 이고 $p'(0)=0$ 이므로 $p(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다.

또한 함수 $p(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 양수 a 에 대하여 $p(a)=p(-a)=0$ 이라 하면

$$p(x)=x^2(x-a)(x+a)=x^4-a^2x^2$$

$$p'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)$$

이므로 $p'(x)=0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{\sqrt{2}} \text{ 또는 } x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=p\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-64 \text{ 이므로}$$

$$p\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4-a^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=-\frac{a^4}{4}=-64$$

즉, $a^4=256=4^4$ 이므로 $a=4$ 이다.

이때 $p(x)=x^2(x-4)(x+4)$

방정식 $p(x)=0$ 의 가장 큰 실근이 4이므로 함수 $y=p(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,

y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 일치한다. 따라서

$$f(x)=(x+2)^2(x-2)(x+6)+4$$

$$f(4)=724, \quad h(4)=5 \text{ 이므로}$$

$$f(4)+h(4)=724+5=729$$

38. ④

최고차항의 계수가 -1 인 이차함수 $f(x)$ 와 상수 a 에 대하여 조건 (가)에서 $g'(0)=-4$ 이므로

$$f'(0)=-4 \quad \dots\dots \ominus$$

또 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=\lim_{x \rightarrow 0+} g(x),$$

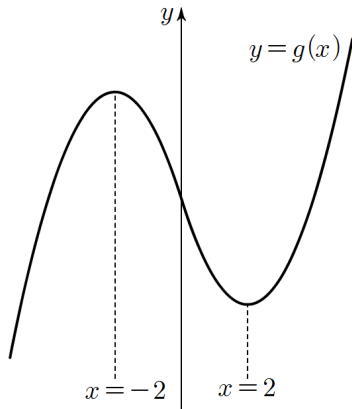
$$f(0) = a - f(0)$$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉠, ㉡에서 $f(x) = -x^2 - 4x + \frac{1}{2}a$ 로 놓으면

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ a - f(-x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2 - 4x + \frac{1}{2}a & (x < 0) \\ x^2 - 4x + \frac{1}{2}a & (x \geq 0) \end{cases}$$



조건 (나)에서 함수 $g(x)$ 의 극솟값은 0이므로

$$g(2) = 0, \quad 4 - 8 + \frac{1}{2}a = 0 \quad \therefore a = 8$$

$$\therefore g(-8) = -(-8)^2 - 4(-8) + \frac{1}{2} \times 8$$

$$= -28$$

39. ㉡

점 P의 시각 t 에서의 위치를 $x(t)$ 라 하면

$$x(t) = t^3 - t^2 - t + 1$$

$$\neg. x(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 \quad (\text{거짓})$$

ㄴ. t 초 후 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2t - 1$$

이때 시각 $t = 1$ 일 때 점 P의 속도는 0이다.

(참)

ㄷ. 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 2t - 1 = 0,$$

$$(t-1)(3t+1) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t > 0)$$

이때 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 2$$

따라서 $t = 1$ 일 때 점 P의 가속도는 4이다.
(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

40. ㉢

$$\frac{dx_1}{dt} = 6t^2 - 18t = 6t(t-3)$$

따라서 P는 $t = 3$ 일 때 운동방향을 바꾸므로

$$a = 1$$

$$\text{마찬가지로 } \frac{dx_2}{dt} = 2t + 8 \text{ 이므로}$$

$$b = 0$$

t 분 후의 M의 좌표를 $f(t)$ 라 하면

$$f(t) = t^3 - 4t^2 + 4t$$

$$f'(t) = 3t^2 - 8t + 4 = (3t-2)(t-2)$$

$$\therefore c = 2$$

$$\therefore a + b + c = 3$$

41. ㉠

점 P의 시각 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t + a$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 실수

t ($t \geq 0$)에 대하여 항상 $v \geq 0$ 이거나 항상

$v \leq 0$ 이어야 한다.

이때

$$v = 3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + a - \frac{25}{3}$$

이므로 실수 t ($t \geq 0$)에 대하여 항상 $v \leq 0$ 일

수는 없다.

즉, 실수 t ($t \geq 0$)에 대하여 항상 $v \geq 0$ 이어야

하므로

$$a - \frac{25}{3} \geq 0$$

이어야 한다.

따라서 $a \geq \frac{25}{3}$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수

a 의 최솟값은 9이다.

42. ②

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx \text{ 에서}$$

$$\int_{-3}^3 (x+1)f(x) dx = \int_{-3}^3 \{xf(x) + f(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 xf(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

이므로

$$\int_{-3}^3 xf(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx = 36 + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-3}^3 xf(x) dx = 36$$

이때 $f(x) = x^2 + ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 xf(x) dx &= \int_{-3}^3 (x^3 + ax^2) dx \\ &= 2 \int_0^3 ax^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} ax^3 \right]_0^3 \\ &= 18a \end{aligned}$$

$$18a = 36 \text{ 이므로 } a = 2$$

43. ⑤

삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) 에 대하여

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$$

이다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \\ &= 2 \int_0^1 (bx^2 + d) dx \\ &= 2 \left[\frac{b}{3} x^3 + dx \right]_0^1 \\ &= \frac{2b}{3} + 2d \end{aligned}$$

$$\frac{2b}{3} + 2d = 0 \text{ 이므로 } d = -\frac{b}{3}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (ax^4 + cx^2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{a}{5} x^5 + \frac{c}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}$$

$$\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0 \text{ 이므로 } c = -\frac{3}{5}a$$

ㄱ. 실수 a, b, c, d 에 대하여

$$c = -\frac{3}{5}a, \quad d = -\frac{b}{3}$$

이므로

$$\begin{aligned} abcd &= ab \times \left(-\frac{3}{5}a\right) \times \left(-\frac{b}{3}\right) \\ &= \frac{1}{5}(ab)^2 \geq 0 \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f(-1) &= -a + b - c + d \\ &= -a + b - \left(-\frac{3}{5}a\right) - \frac{b}{3} \\ &= -\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b \end{aligned}$$

$$f(0) = d = -\frac{b}{3}$$

$ab < 0$ 이면

$$\begin{aligned} f(-1)f(0) &= \left(-\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b\right) \left(-\frac{b}{3}\right) \\ &= \frac{2}{15}ab - \frac{2}{9}b^2 < 0 \end{aligned}$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c + d \\ &= a + b - \frac{3}{5}a - \frac{b}{3} \\ &= \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b \end{aligned}$$

$ab > 0$ 이면

$$f(0)f(1) = \left(-\frac{b}{3}\right) \left(\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}b\right)$$

$$= -\frac{2}{15}ab - \frac{2}{9}b^2 < 0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

이므로 $f'(x)=3ax^2+2bx-\frac{3}{5}a$ 이다.

함수 $f'(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이다.

$$f'(0)=-\frac{3}{5}a, \quad f'(1)=\frac{12}{5}a+2b$$

$ab > 0$ 이면

$$\begin{aligned} f'(0)f'(1) &= -\frac{3}{5}a\left(\frac{12}{5}a+2b\right) \\ &= -\frac{36}{25}a^2 - \frac{6}{5}ab < 0 \end{aligned}$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f'(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 그래프는 점

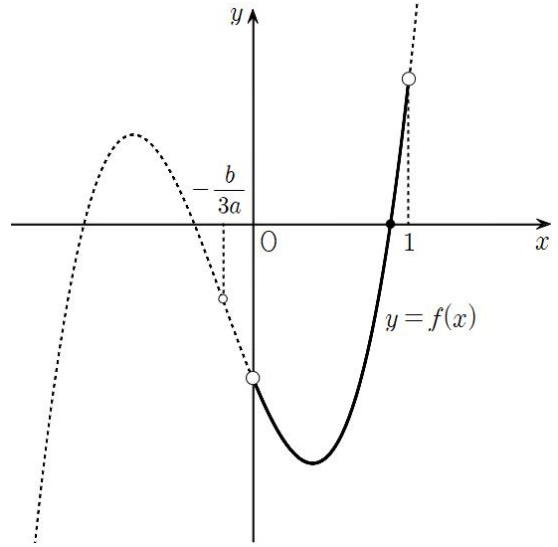
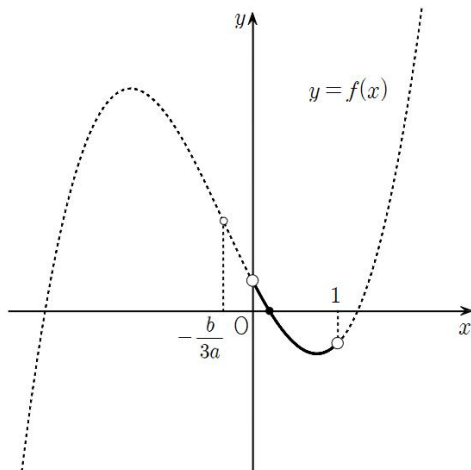
$$\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$$
에 대하여 대칭이다.

$ab > 0$ 이면

$$-\frac{b}{3a} < 0$$

따라서 방정식 $f'(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 하나의 실근을 갖는다.

$a > 0, b > 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 2개의 꼴 중 하나이다.



위의 두 그림에 의하여 $a > 0, b > 0$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다.

$a < 0, b < 0$ 일 때도 위와 같은 방법으로 하면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다.

따라서 $ab > 0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 오직 한 실근을 갖는다. (참)

이상에서 $\neg, \perp, \sqsubset$ 모두 옳다.

44. ④

직선 $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 에서 $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ 라 하고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 두 교점의 x 좌표를 각각 α, β (단, $\alpha < \beta$)라 하자. 그림에서 세 영역 A, B, C 의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3 라 하면

$$S_1 = \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$S_2 = \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$S_3 = \int_{\beta}^k \{f(x) - g(x)\} dx$$

(A 의 넓이) + (C 의 넓이) = (B 의 넓이)이므로

$$S_1 + S_3 = S_2, \quad S_1 - S_2 + S_3 = 0$$

이때

$$S_1 - S_2 + S_3$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &- \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx \\
 &\quad + \int_{\beta}^k \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \int_0^{\alpha} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &+ \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &\quad + \int_{\beta}^k \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \int_0^k \{f(x) - g(x)\} dx
 \end{aligned}$$

이므로

$$\int_0^k \{f(x) - g(x)\} dx = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(x) - g(x) = 3x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{8}{3} \text{ 이고,}$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\int_0^k \left(3x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx = 0$$

$$\left[x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^k = 0$$

$$k^3 - \frac{11}{3}k^2 + \frac{8}{3}k = 0,$$

$$k(3k^2 - 11k + 8) = 0$$

$$k(k-1)(3k-8) = 0$$

$$k > 2 \text{ 이므로 } k = \frac{8}{3}$$

45. 54

직선을 $y = mx + n$ 이라 두면

$$\int_0^6 (x^3 - 6x^2 - mx - n) dx = 0$$

이므로

$$n = -3m - 18$$

직선 $y = mx - 3m - 18$ 에서

$$m(x-3) - (y+18) = 0 \text{ 이고 } m \text{에 관한}$$

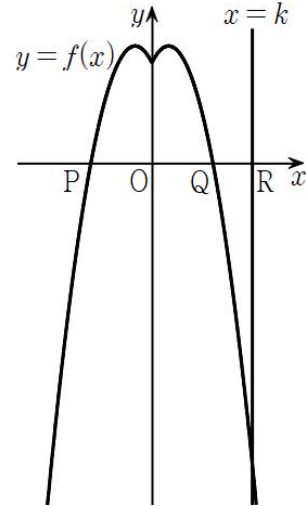
항등식이므로 점 D의 좌표는 $(x, y) = (3, -18)$

따라서 넓이는 54

46. ④

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} -x^2 - 2x + 6 & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + 6 & (x \geq 0) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} -(x+1)^2 + 7 & (x < 0) \\ -(x-1)^2 + 7 & (x \geq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $x = k$ 및 세 점 P, Q, R는 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 선분 OP 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 선분 OQ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $A = 2B$, 즉 $\frac{A}{2} = B$ 에서

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6) dx = 0$$

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x \right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k$$

$$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0 \text{ 에서 } -\frac{1}{3}k(k-6)(k+3) = 0$$

$$\therefore k = 6 \quad (\because k > 4)$$