30

2012년 수능 분석

— 30번 문항

이제 고2였던 사람은 고3이 된다.
2013년 수능을 볼 고2들이여.
2012년 수능이 끝나자마자 그대들은
고3이다. 2012년 수능을 하나하나
벗겨보고 2013년 수능을 공략해 나가자.

PremediVa

2012년 수능 수리 (가), (나)

30. 자연수 a, b에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^{x}$이 직선 $x=t(t\geq 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> (가) $2\leqq a\leqq 10$, $2\leqq b\leqq 10$
> (나) $t\geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}\leqq 10$이다.

1. 표현과 조건 관찰

① 자연수 a, b
② 곡선 $y=a^{x+1}$과 곡선 $y=b^{x}$
③ 직선 $x=t(t\geq 1)$와 만나는 점을 P, Q
④ 조건을 만족시키는 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수
⑤ $2\leqq a\leqq 10$, $2\leqq b\leqq 10$
⑥ $t\geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여
⑦ $\overline{\mathrm{PQ}}\leqq 10$

2. 들어가기

먼저 **구해야 하는 것**이 무엇인지를 살펴본다.

> ④ 조건을 만족시키는 (a, b)의 모든 순서쌍의 개수

가 바로 우리가 구해야 할 것이다. 그것을 어떻게 구해야 할 것인가는 “조건”과 문제의 “표현”에 나와 있을 것이다.

먼저 **조건을 만족시킨다**는 말이 나왔으니 조건으로 눈을 돌려 보자. 문제에서 조건은 (가), (나)로 나왔지만 세분화해서 보자.

> **<문제에서 말해 준 조건>**
> ⑤ $2\leqq a\leqq 10$, $2\leqq b\leqq 10$
> ⑥ $t\geqq 1$인 어떤 실수 t에 대하여
> ⑦ $\overline{\mathrm{PQ}}\leqq 10$

이 때, 문제 표현을 샅샅이 봤다면, **① 자연수 a, b**를 발견할 수 있을 것이다. 그러면 a, b 모두 각각 2 이상 10 이하의 자연수이므로 a, b 각각 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 까지 가능하다. 경우가 생각보다 많지 않기 때문에 최후의 방법으로 ‘일일이 대입’하는 것도 고려할 수 있다.

그 다음 눈에 들어오는 조건이 ⑦ $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$ 이다. 그러면 P, Q는 어디 있는 것일까? P, Q는

③ 직선 $x = t(t \geq 1)$와 만나는 점을 P, Q라 하자.

라고 문제에 나와 있다. **문제에는 마음대로 정한 점은 없다. 어떤 점인지 모두 설명이 나오게 된다.** 그러면 t가 무엇인지도 나올 것이다. 역시나

⑥ $t \geq 1$인 어떤 실수 t에 대하여

라고 t에 관한 설명도 나와 있다.

여기서 주의할 것은 **"어떤"** 이라는 말이다. 어떤 이라는 말은 수학(상) 과정의 명제 단원에 나와 있는 것인데, "모든"과 착각해서는 안 된다. **"어떤"**은 **한 가지만 있어도 가능한 것**이고, **"모든"**은 **항상 성립해야 하는 것**을 의미한다. 착각하지 말아야 할 것은 "어떤 ~에 대하여"와 "어떤 ~에 대하여도"는 전혀 같지 않은 말이라는 것이다. 후자는 "모든 ~에 대하여"의 뜻이 된다.

결과적으로 ⑥의 의미는 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$인 경우가 하나만이라도 존재하면 그것은 a, b가 될 수 있다는 것이다. 이것을 다시 생각해 보면, "항상 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$가 아닌 경우"가 있을 수 있다는 것이며, 그것이 어떤 경우인지를 안다면 문제를 풀 수 있게 되는 것이다.

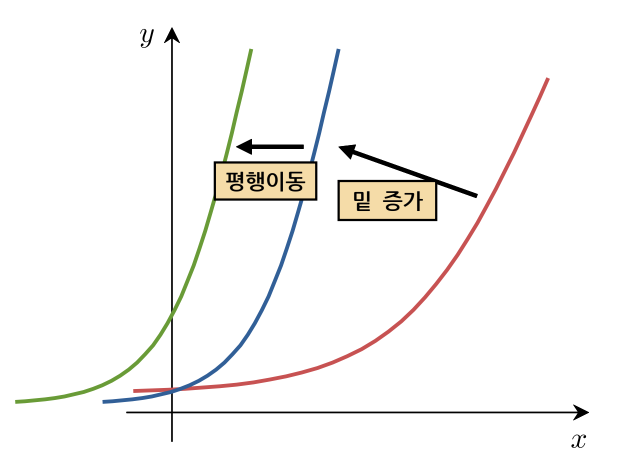
3. 문제 해결하기

이제

② 곡선 $y = a^{x+1}$과 곡선 $y = b^{x}$

를 보자. 우리는 앞에서 a, b가 모두 2 이상의 자연수라는 것을 확인했으므로, 지수함수의 밑이 모두 1보다 크므로 그래프의 개형이 오른쪽 위로 올라가는 형태임을 알 수 있다. 그리고 두 식은 "지수" 부분이 하나는 $x+1$, 다른 하나는 x인 상황이다.

이제 우리는 그래프를 그릴 때 필요한 ① **밑의 크기와** ② **평행이동**을 하나하나 살펴봐야 한다.



<밑의 크기와 그래프>
밑의 크기가 증가하면
0보다 큰 부분의 그래프가 위로 간다.
빨간색 → 파란색

<평행이동과 그래프>
그래프가 x축으로 -1만큼 평행이동하면
0보다 큰 부분의 그래프가 위로 간다.
파란색 → 초록색

우리가 $y=a^{x+1}$와 $y=b^{x}$의 그래프를 그린다고 했을 때, 컴퓨터로 그리는 것이 아니므로 a, b의 대소에 따라서 위 그림처럼 간략하게 그래프를 그릴 것이다. 그러므로 우리는

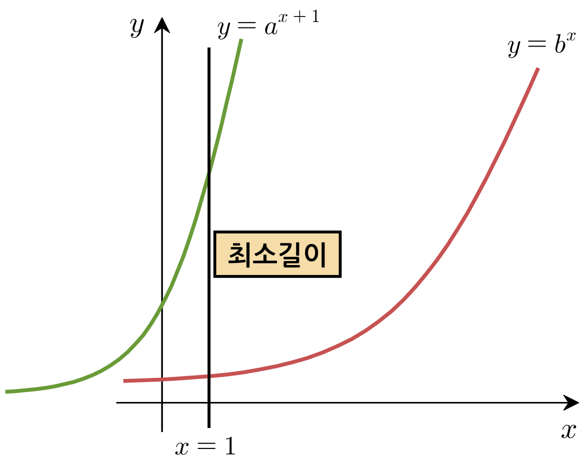
$a>b$, $a=b$, $a<b$의 세 가지 경우

로 쪼개어 그림을 그릴 수 있을 것이고,

평행이동(x축 방향으로 -1만큼)

여기에 만 고려해주면 모든 경우에 대해서 살펴볼 수 있다. 이렇게 그래프를 그리면 $y=a^{x+1}$의 그래프와 $y=b^{x}$의 그래프가 어떤 모양인지에 따라서 "항상 $\overline{\mathrm{PQ}} \leq 10$가 되지 못하는 경우" 즉, "항상 $\overline{\mathrm{PQ}} > 10$인 경우"가 있는지를 알 수 있게 된다.

① $a>b$



<최소 길이>

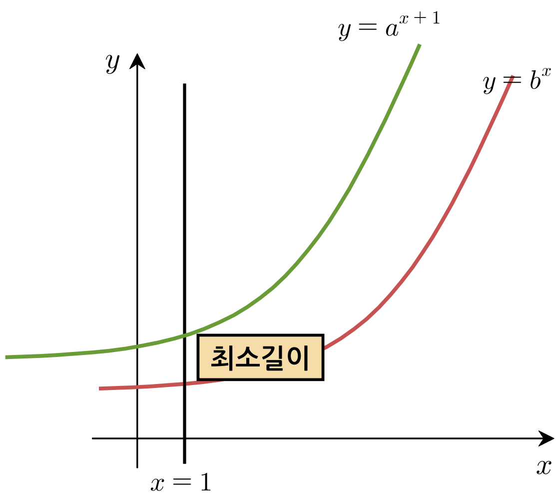
$x=t$의 직선이 오른쪽으로 갈수록, 즉 t가 커질수록 차이가 계속 증가하므로, t가 최소일 때 최소 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 나온다.
따라서 $t=1$일 때

$$a^2-b$$

가 바로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다.

따라서 우리는 a^2-b가 10 이하가 되어야 조건을 만족하고, a^2-b가 10보다 커버리면 "항상 $\overline{\mathrm{PQ}} > 10$인 경우"가 되어 버린다. 조건을 만족하는 $(a,\ b)$의 순서쌍은 $(3,\ 2)$ 밖에 없다.)(a가 4일 때는 b가 6보다 커야 되는데, b는 a보다 작다고 했으므로 불가능하다. a가 더 큰 경우는 따져 볼 필요도 없다.)

② $a=b$



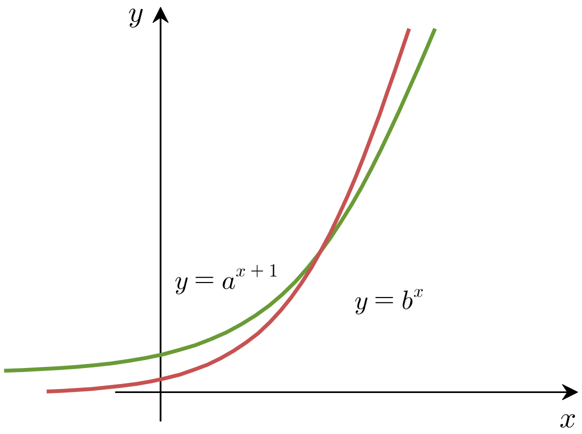
<최소 길이>

$x=t$의 직선이 오른쪽으로 갈수록, 즉 t가 커질수록 차이가 계속 증가하므로, t가 최소일 때 최소 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 나온다.
따라서 $t=1$일 때,

$$a^2-b$$

가 바로 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값이다.

$a=b$이므로, a^2-a가 10 이하가 되어야 한다. 이를 만족하는 a는 2, 3 밖에 없다. (자연수니까 직접 대입하는 것이 빠르다. 이차방정식을 풀 필요는 없다.)

③ $a<b$		**〈최소 길이〉** 이 경우는 그래프가 항상 만나게 된다. 따라서 최소길이는 0이 되고, 모든 경우 문제의 조건을 만족한다.

$a<b$인 경우는 $a=2$일 때, $b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$의 8가지, $a=3$일 때 $b=4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$의 7가지 ⋯ 이렇게 가므로 $1+2+3+\cdots+7+8=\dfrac{8\times 9}{2}=36$의 36가지이다.

4. 마무리하기

정리하면

① $a>b$인 경우 : 1가지

② $a=b$인 경우 : 2가지

③ $a<b$인 경우 : 36가지

총 39가지이다. 따라서 답은 **39가지**가 된다.

〈덤〉 어떤/모든 관련 예시문제

(1) $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.
(2) $0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.
(3) $0<x<1$인 어떤 실수 x에 대하여도 $|x-a|<1$이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하라.

답 (1) $0\leqq a\leqq 1$ (2) $-1<a<2$ (3) $0\leqq a\leqq 1$