해 설

1. [출제의도] 평면벡터의 연산을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

벡터 $2\vec{a}+\vec{b}=2(-1,2)+(3,-2)=(1,2)$

따라서 모든 성분의 합은 3

2. [출제의도] 지수함수 및 로그함수의 극한을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\ln(1+4x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^x-1}{x}\times\frac{\ln(1+4x)}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x}$$

$$=1\times 4=4$$

3. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

두 점 $\mathrm{A}(a,6,-4)$, $\mathrm{B}(-3,0,2)$에 대하여

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{-6+a}{3},\ \frac{0+6}{3},\ \frac{4+(-4)}{3}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로 $\frac{-6+a}{3}=0$

따라서 $a=6$

4. [출제의도] 경우의 수 곱의 법칙을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

세 자리의 자연수가 2의 배수이므로 일의 자리수가 될 수 있는 경우는 0, 2, 4, 6, 8 총 5가지

백의 자리의 수는 십의 자리의 수의 3배이므로

십의 자리수가 될 수 있는 경우는 1, 2, 3 총 3가지

따라서 곱의 법칙에 의해 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수는 $3\times 5=15$

5. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

두 사건 A와 B가 독립이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

$$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$$

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$

이므로 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{3}$

6. [출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$e^xy+x^2-xy^2=\pi\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^xy+e^x\frac{dy}{dx}+2x-y^2-2xy\frac{dy}{dx}=-\pi\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^xy-2x+y^2-\pi\sin x}{e^x-2xy}$$

따라서 점 $(0,\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\pi(\pi-1)$

7. [출제의도] 확률을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

3개의 주사위를 던질 때 나오는 총 경우의 수는

$6\times 6\times 6=216$

6 이하의 세 자연수의 합이 7인 경우는

$(1,1,5)$, $(1,2,4)$, $(1,3,3)$, $(2,2,3)$이므로

$$\frac{3!}{2!}+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=15$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$

8. [출제의도] 합성함수의 미분을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$(g\circ f)(x)=3x+\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(f(x))f'(x)=3+\cos x$

위 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(f(0))f'(0)=4$, $g'(\pi)f'(0)=4$

$g'(\pi)=2$이므로 $f'(0)=2$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}=2f'(0)=4$

9. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$(y-2)^2=4x-a+4=4\left(x-\frac{a}{4}+1\right)$$

이므로 초점의 좌표는 $\left(\frac{a}{4},2\right)$

따라서 $2=4\times\frac{a}{4}-2$이므로 $a=4$

10. [출제의도] 이항정리를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{3}{x}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r3^rx^{8-3r}$이므로

$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$의 계수는

$r=3$일 때이므로 ${}_4\mathrm{C}_33^3=108$

$\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

$8-3r=2$에서 $r=2$일 때이므로 ${}_4\mathrm{C}_23^2=54$

따라서 구하는 x^2의 계수는 $108-54=54$

11. [출제의도] 정적분을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\int_3^x xf(t)\,dt=a\ln x-x$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$a\ln 3-3=0$에서 $a=\frac{3}{\ln 3}$

즉, $\int_3^x xf(t)\,dt=\frac{3}{\ln 3}\ln x-x$ … ㉠

$\int_3^x xf(t)\,dt=x\int_3^x f(t)dt$이므로

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_3^x f(t)\,dt+xf(x)=\frac{3}{x\ln 3}-1$ … ㉡

㉡의 양변에 $x=3$을 대입하면

$\int_3^3 f(t)dt+3f(3)=\frac{3}{3\ln 3}-1$

따라서 $3f(3)=\frac{1}{\ln 3}-1$

12. [출제의도] 삼각함수를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\sec x=\frac{1}{\cos x}$

$\tan(\pi-x)=-\tan x=-\frac{\sin x}{\cos x}$

$2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2\cos x$이므로

$\sec x-\tan(\pi-x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$은

$\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=2\cos x$와 같다.

양변에 $\cos x$를 곱하면 $1+\sin x=2\cos^2 x$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로

$1+\sin x=2(1-\sin^2 x)$

즉, $2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\sin x=-1$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x<\pi$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$이므로 합은 π

13. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

표본비율은 $\hat{p}=0.8$이고 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{n}}\le p\le 0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{n}}$$

$a\le p\le b$에서 $b-a=0.098$이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{n}}=0.098$$

따라서 $\sqrt{n}=16$, $n=256$

14. [출제의도] 정사영을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}(4,0,0)$에서

평면 $\alpha: x-2y+2z+4=0$에 내린 수선의 발을

H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{|4-0+0+4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{8}{3}$

삼각형 ABH는 직각삼각형이므로

따라서 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{9-\frac{64}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$$

15. [출제의도] 정적분과 급수를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{f(1+x)}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1\ln(x+1)\,dx$$

$1+x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

따라서

$$\int_0^1\ln(x+1)\,dx$$

$$=\int_1^2\ln t\,dt$$

$$=[t\ln t]_1^2-\int_1^2 1\,dt$$

$$=2\ln 2-1$$

16. [출제의도] 공간벡터를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

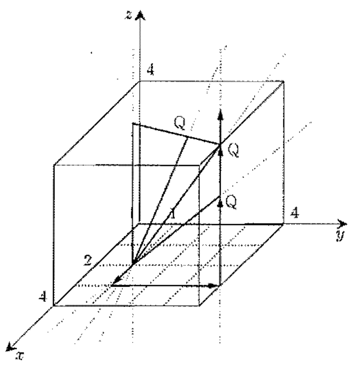
직선 $x-2=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{t}$은 점 $(2,1,0)$을 지나고

방향벡터가 $(1,3,t)$이다.

점 $(2,1,0)$은 정육면체 위의 점이므로 이 점을 P라 두자.

양의 실수 t에 대하여 직선 $x-2=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{t}$이

정육면체와 만나는 P가 아닌 점의 Q의 자취는 다음 그림과 같다.



선분 PQ의 길이가 최대가 될 때 점 Q의 좌표는 $(3, 4, 4)$이다.
따라서 선분 PQ의 길이의 최댓값은
$\sqrt{(2-3)^2+(1-4)^2+(0-4)^2}=\sqrt{26}$

17. [출제의도] 지수함수를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

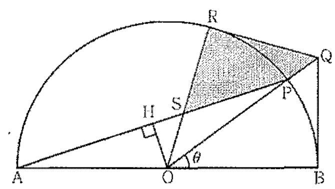
함수 $y=|a^x-b|$의 그래프가 점 $(0, 9)$를 지나고
직선 $y=8$과 두 점 A, B에서 만나므로
$a\neq 1$, $b>0$
함수 $y=|a^x-b|$의 그래프가 점 $(0, 9)$를 지나므로
$|1-b|=9$, $b=10$
함수 $y=|a^x-b|=|a^x-10|$의 그래프와 직선
$y=8$이 만나는 점의 x좌표의 값은
$|a^x-10|=8$에서
$x=\log_a 18$ 또는 $x=\log_a 2$이다.
선분 AB가 제2사분면 위에 있으므로
$0<a<1$이다.
따라서
$\overline{AB}=\log_a 2-\log_a 18=\log_a \frac{1}{9}=2$, $a=\frac{1}{3}$이므로
$ab=\frac{10}{3}$

18. [출제의도] 미분과 적분과의 관계를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

ㄱ. 주어진 식에 $x=0$을 대입하면
$$f(0)+\int_0^0 f(t)dx=(-1)^2$$
이므로 $f(0)=1$ (참)
ㄴ. $g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)$
$=e^x\{f(x)+f'(x)\}\cdots ㉠$
이때, $f(x)+\int_0^x f(t)dt=(x-1)^2$에서
양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)+f(x)=2(x-1)$
이므로 ㉠에 대입하면
$g'(x)=2e^x(x-1)$
따라서 $x>1$에서 $g'(x)>0$이므로
함수 $g(x)$는 구간 $(1, \infty)$에서 증가한다.(참)
ㄷ. $g(x)=\int g'(x)dx=\int 2e^x(x-1)dx$
$=2(x-1)e^x-\int 2e^x dx$
$=2e^x(x-2)+C$ (C는 적분상수)
$g(0)=f(0)$에서 $-4+C=1$이므로 $C=5$
$g(1)=-2e+5$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

19. [출제의도] 삼각함수의 극한을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\overline{QB}=\overline{QR}$, $\angle OBQ=\angle ORQ=\frac{\pi}{2}$,
$\overline{OQ}$는 공통이므로 두 삼각형 OBQ와 ORQ는 합동이다.
$\angle QOR=\angle QOB=\theta$이고 $\overline{RQ}=\overline{BQ}=\tan\theta$
호 PB의 중심각의 크기가 θ이므로
원주각의 크기는 $\angle BAP=\angle OAP=\frac{\theta}{2}$
$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OPA=\angle OAP=\frac{\theta}{2}$



점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OH}=\sin\frac{\theta}{2}$
삼각형 OSH에서 $\angle OSH=\theta+\frac{\theta}{2}=\frac{3}{2}\theta$이고
$\overline{OH}=\sin\frac{\theta}{2}$이므로
$$\overline{OS}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\theta}$$
사각형 PQRS의 넓이 $S(\theta)$는 삼각형 ORQ의 넓이에서 삼각형 OPS의 넓이를 뺀 것과 같다.
$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OR}\times\overline{RQ}-\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OS}\times\sin\theta$$
$$=\frac{\tan\theta}{2}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\sin\frac{3}{2}\theta}$$
따라서
$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\tan\theta}{2\theta}-\frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\theta\sin\frac{3}{2}\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

20. [출제의도] 확률분포를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

주머니에 1부터 n까지의 자연수가 적힌 공이 각각 2개씩 있고 A, B 두 사람이 각각 2개씩 공을 주머니에서 꺼내므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 1, 0이다.

(ⅰ) $X=2$일 때,
A가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개와 B가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개가 모두 일치해야 하므로
$$P(X=2)=\frac{\boxed{{}_{2n}C_2-n}}{{}_{2n}C_2}\times\frac{1}{{}_{2n-2}C_2}$$
$$=\frac{4n(n-1)}{2n(2n-1)}\times\frac{2}{(2n-2)(2n-3)}$$
$$=\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$$

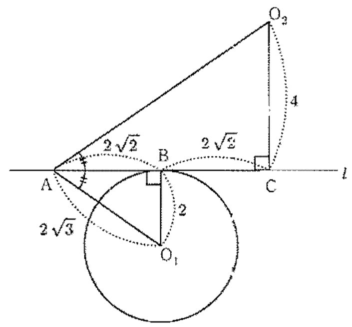
(ⅱ) $X=1$일 때,
A가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개와 B가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개 중 1개의 숫자만 일치해야 하므로
$$P(X=1)=\frac{\boxed{{}_{2n}C_2-n}}{{}_{2n}C_2}\times\frac{\boxed{2\times{}_{2n-4}C_1}}{{}_{2n-2}C_2}$$
$$=\frac{4n(n-1)}{2n(2n-1)}\times\frac{4(2n-4)}{(2n-2)(2n-3)}$$
$$=\frac{8n-16}{(2n-1)(2n-3)}$$

(ⅲ) $X=0$일 때,
확률질량함수의 성질에 의하여
$P(X=0)=1-\{P(X=2)+P(X=1)\}$

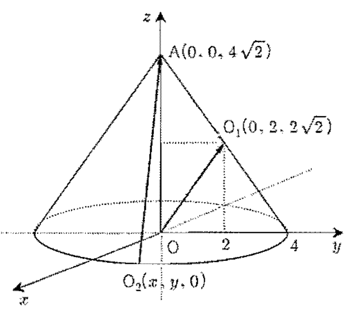
따라서 $E(X)=\sum_{k=0}^{2}\{k\times P(X=k)\}$
$$=P(X=1)+2P(X=2)$$
$$=\frac{8n-16}{(2n-1)(2n-3)}+\frac{4}{(2n-1)(2n-3)}$$
$$=\frac{4(2n-3)}{(2n-1)(2n-3)}$$
$$=\boxed{\frac{4}{2n-1}}$$

$f(n)={}_{2n}C_2-n=2n(n-1)$,
$g(n)=2\times{}_{2n-4}C_1=4n-8$, $h(n)=\frac{4}{2n-1}$이므로
$\{f(5)+g(7)\}\times h(8)=(40+20)\times\frac{4}{15}=16$

21. [출제의도] 공간벡터를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.



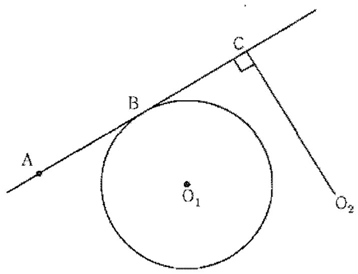
$\cos(\angle O_2AC)=\cos(\angle O_1AB)$이므로
$\angle O_2AC=\angle O_1AB$이고 점 O_2의 자취는 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원이다.
밑면의 반지름의 길이가 4인 원이고 높이가 $4\sqrt{2}$인 원뿔에서
밑면을 xy평면에 놓고 점C를 원점,
$A=(0, 0, 4\sqrt{2})$, $O_1(0, 2, 2\sqrt{2})$라 하자.
이 때, 점 $O_2(x, y, 0)$는 $x^2+y^2=16$을 만족한다.



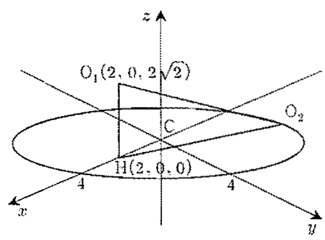
한편, $\overrightarrow{CO_1}=(0, 2, 2\sqrt{2})$,
$\overrightarrow{O_2A}=(-x, -y, 4\sqrt{2})$이므로
$\overrightarrow{CO_1}\cdot\overrightarrow{O_2A}=-2y+16$
따라서 y가 최소일 때, $\overrightarrow{CO_1}\cdot\overrightarrow{O_2A}$는 최댓값을

갖는다.
$\overline{O_1O_2} \le 6$ 이므로
$x^2+(y-2)^2+8 \le 36$, $x^2+y^2-4y+12 \le 36$
$x^2+y^2=16$ 이므로
$-4y \le 8$, $y \ge -2$
그러므로 $\overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{O_2A}$ 는 $y=-2$ 일 때, 최댓값 20을 갖는다.

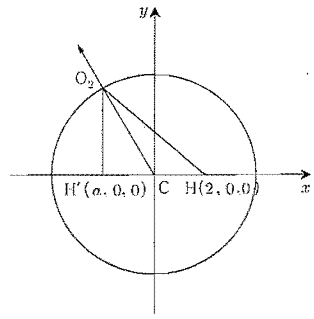
[다른 풀이]
$\overline{O_1A}=2\sqrt{3}$, $\overline{O_1B}=2$ 이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이다.
점 C는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로
$\overline{AC}=4\sqrt{2}$
구 C_2가 직선 l에 접하므로 $\angle ACO_2=\frac{\pi}{2}$ 이다.
또한, $\cos(\angle O_2AC)=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로
$\overline{CO_2}=4$ 이다.
즉, 점 C를 지나고 직선 l에 수직인 평면을 α라 할 때, α 위의 점 C를 중심으로 하는 반지름의 길이가 4인 원 위에 구 C_2의 중심 O_2가 있다.



점 C를 원점, 직선 l을 z축으로 갖는 좌표공간에 대하여
원 $x^2+y^2=16$, $z=0$ 위의 점을 O_2, $(2, 0, 2\sqrt{2})$를 점 O_1이라 할 수 있다.
그러면 점 O_1에서 xy평면에 내린 수선의 발 $H(2, 0, 0)$에 대하여



$\overline{O_1O_2} \le 6$ 이면 $\overline{O_2H}^2=\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_1H}^2 \le 28$
점 O_2에서 x축에 내린 수선의 발을 $H'(a, 0, 0)$이라 하면
직각삼각형 $O_2H'H$에서
$\overline{O_2H}^2=(16-a^2)+(a-2)^2 \le 28$
이므로 $a \ge -2$이다.



$a=-2$일 때
$\overrightarrow{CO_2}$를 동경으로 갖는 각의 크기는
$-\pi$에서 π사이에는 $-\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{2}{3}\pi$이므로
$\angle HCO_2=\theta$에 대하여
$-\frac{2}{3}\pi \le \theta \le \frac{2}{3}\pi$ 이므로 $-\frac{1}{2} \le \cos\theta \le 1$
따라서 $\overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{O_2A}$

$$
\begin{aligned}
&=\overrightarrow{CO_1} \cdot (\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{CA}) \\
&=\overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{CO_1} \cdot \overrightarrow{CA} \\
&=(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HO_1}) \cdot \overrightarrow{O_2C}+2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2} \\
&=(\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HO_1}) \cdot \overrightarrow{O_2C}+16 \\
&=16-\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CO_2} \\
&=16-2\times 4\times \cos\theta \\
&\le 16+2\times 4\times \frac{1}{2}=20
\end{aligned}
$$

22. [출제의도] 이항분포를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로
$E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}=20$
따라서 $n=40$

23. [출제의도] 로그함수의 평행이동을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
함수 $y=2\log_2 4x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축 방향으로 a만큼 평행이동한 함수를 $f(x)$라 하면
$f(x)=2\log_2 4(x-1)+a$ 이고 점$(5, 13)$을 지나므로
$f(5)=2\log_2 16+a=8+a=13$
따라서 $a=5$

24. [출제의도] 평면벡터를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
$x=2t+4\sin t$, $y=4\cos t$ 에서
$\frac{dx}{dt}=2+4\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-4\sin t$
점 P의 속력은
$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2+4\cos t)^2+(-4\sin t)^2}$
$=\sqrt{20+16\cos t}$
따라서 $-1 \le \cos\theta \le 1$ 이므로 점 P의 속력의 최댓값은 6

25. [출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=4$ 에서 극한값이 존재하고
$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.
즉, $\lim_{x\to 1}\{g(x)-2\}=0$이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=2$
$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$ 이므로
$g'(1)=4$
$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로
$f(2)=1$, $f'(2)=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4}$
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{4}(x-2)$
이 접선의 x절편과 y절편은 각각 -2, $\frac{1}{2}$
그러므로 이 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
따라서 $40S=40\times\frac{1}{2}=20$

26. [출제의도] 정규분포를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
$g(x)$는 $f(x)$를 y축에 대해 대칭이동 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 서로 같다.
$\sigma=5$
또한 $f(x)$는 $x=8$일 때, $g(x)$는 $x=m$일 때 각각 최댓값을 가지므로
$f(k-m)=g(m)=f(8)$에서 $k-m=8$ ⋯㉠
한편,
$P(Y\le 16)=P\left(Z\le\frac{16-m}{5}\right)$
$=P\left(Z\ge\frac{m-16}{5}\right)=0.0228$
에서 $0.5-P\left(0\le Z\le\frac{m-16}{5}\right)=0.0228$
$P\left(0\le Z\le\frac{m-16}{5}\right)=0.4772$
따라서 $\frac{m-16}{5}=2$이므로 $m=26$이고
㉠에 대입하면 $k=26+8=34$

27. [출제의도] 이차곡선의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
$a^2+b^2=c^2$이므로 점 Q는 두 점 F, F'를 지름으로 하는 원 위에 있는 점이고, 삼각형 F'QF는 직각삼각형이다. $\overline{F'F}=2c$이고 $\angle QFF'=\frac{\pi}{6}$이므로
$\overline{QF'}=c$, $\overline{QF}=\sqrt{3}c$이다.
점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 QHF'는 직각삼각형이고 $\overline{QF'}=c$,
$\angle QF'H=\frac{\pi}{3}$이므로
$b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$, $a=\frac{c}{2}$이다.
삼각형 PF'F의 둘레의 길이는
$2c+5+5+2a=10+2a+2c=10+3c$이고
삼각형 QF'F의 둘레의 길이는
$2c+c+\sqrt{3}c=3c+\sqrt{3}c$이므로
둘레의 길이의 차는 $10-\sqrt{3}c=4$, $c=2\sqrt{3}$이다.
따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=3$이므로 $(ab)^2=(3\sqrt{3})^2=27$

28. [출제의도] 중복조합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.
조건 (가)를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 다음

작거나 같은 것부터 차례로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시켜야 하므로
경우의 수는 ${}_{6}\mathrm{H}_{3}={}_{8}\mathrm{C}_{3}=56$이다.
이때,
조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는
$a=f(1)-1$, $b=f(2)-f(1)$, $c=f(3)-f(2)$, $d=6-f(3)$라고 할 때
방정식 $a+b+c+d=5$ (a, d는 음이 아닌 정수, b 또는 c는 3이상의 정수)을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수이다.
(1) $b \ge 3$이면 $c \le 2$이고, $b'=b-3$라고 하면
방정식 $a+b'+c+d=5-3=2$ (a, b', c, d는 음이 아닌 정수)을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$이다.
(2) $c \ge 3$이면 $b \le 2$이고 (1)의 경우와 마찬가지이므로 순서쌍의 개수는
${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=10$이다.
따라서 구하고자 하는 함수의 개수는
$56-2\times 10=36$

29. [출제의도] 평면벡터를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$3\overrightarrow{DX}+2\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ}=\vec{0}$에서

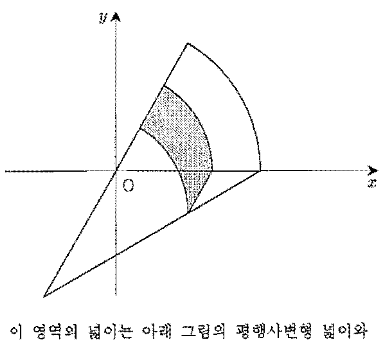
$-\overrightarrow{DX}=\dfrac{2\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{DQ}}{3}=\overrightarrow{DY}$이라 하면

점 X가 나타내는 영역의 넓이는 점 Y가 나타내는 영역의 넓이와 같다.

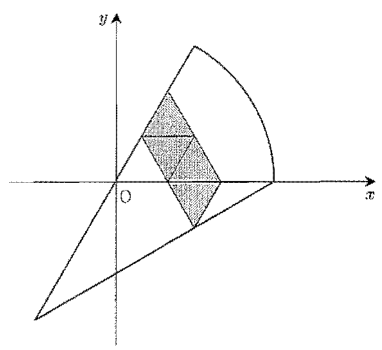
이때 점 Y는 선분 $\overline{PQ}$를 1:2로 내분하는 점이므로 점 Y가 나타내는 영역은

$x^2+y^2 \le \dfrac{64}{9}$, $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 \ge \dfrac{64}{9}$,

$y \le \sqrt{3}x$, $y \ge \sqrt{3}\left(x-\dfrac{8}{3}\right)$을 동시에 만족하는 영역이고 다음 그림의 어두운 부분이다.



이 영역의 넓이는 아래 그림의 평행사변형 넓이와 같다.

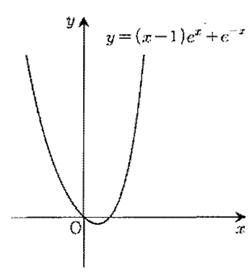


이는 한 변의 길이가 $\dfrac{4}{3}$인 정삼각형 4개의 넓이와 같으므로 $4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

따라서 $p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \ge 0$과 $g'(x) \le 0$ 중 어느 하나만 만족해야 한다.
$g(x)=(x-2)e^x-e^{-x}+f(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=(x-1)e^x+e^{-x}+f'(x)$ ⋯ ㉠
$g'(x)=0$에서
$(x-1)e^x+e^{-x}+f'(x)=0$
$(x-1)e^x+e^{-x}=-f'(x)$
두 곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$과 $y=-f'(x)$의 그래프의 개형을 살펴보자.
먼저 곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$의 개형을 살펴보자.
$y'=xe^x-e^{-x}=0$에서 $xe^x=e^{-x}$이므로
$x=e^{-2x}$이다.
직선 $y=x$와 곡선 $y=e^{-2x}$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 한 번 만난다. 그 교점의 x좌표를 α라 하자.
$0<x<\alpha \Rightarrow x<e^{-2x} \Rightarrow xe^x<e^{-x}$
$\Rightarrow y'=xe^x-e^{-x}<0$
$\alpha<x<1 \Rightarrow x>e^{-2x} \Rightarrow xe^x>e^{-x}$
$\Rightarrow y'=xe^x-e^{-x}>0$
따라서 곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$은
$x=\alpha\,(0<\alpha<1)$에서 극소이다.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\{(x-1)e^x+e^{-x}\}=\infty$,
$\lim\limits_{x\to\infty}\{(x-1)e^x+e^{-x}\}=\infty$,
$y''=(x+1)e^x+e^{-x}>0$이므로
곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$는 아래로 볼록한 그래프이다.



조건 (나)에서 $f'(1)=\dfrac{1}{e}-e$이므로
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g''(x)=xe^x-e^{-x}+f''(x)$
$g''(1)=e-\dfrac{1}{e}+f''(1)=0$
이것은 곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$ 위의 점 $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$에서의 접선의 기울기가 $e-\dfrac{1}{e}$을 의미하고,
곡선 $y=-f'(x)$ 위의 점 $(1, -f'(1))$에서의 접선의 기울기도 $e-\dfrac{1}{e}$을 의미한다.
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 곡선 $y=-f'(x)$는 위로 볼록한 이차함수의 그래프이다. 두 곡선 $y=(x-1)e^x+e^{-x}$, $y=-f'(x)$의 볼록을 고려하였을 때,
$(1-1)e^1+e^{-1} \ge -f'(1)$
을 만족시켜야 두 곡선이 접하거나 만나지 않게 된다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \ge 0$이 되어 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$f''(x)=6x+2a$
$f''(1)=\dfrac{1}{e}-e$이므로 $6+2a=\dfrac{1}{e}-e$
$\dfrac{1}{e} \ge -f'(1)$이므로 $\dfrac{1}{e} \ge -3-2a-b$
$2a=-6+\dfrac{1}{e}-e$이므로
$b \ge -\dfrac{1}{e}-3+6-\dfrac{1}{e}+e$이므로 $b \ge 3+e-\dfrac{2}{e}$이다.
$f(4)=40-4e$이므로
$64+\left(-48+\dfrac{8}{e}-8e\right)+4b+c=40-4e$
$4b+c=40-4e-16-\dfrac{8}{e}+8e$이므로
$4b=24+4e-\dfrac{8}{e}-c$이다.
$4b \ge 12+4e-\dfrac{8}{e}$이므로 $c \le 12$이다.
따라서 $f(0)=c$이므로 $f(0)$의 최댓값은 12

수학 나형 정답

1	③	2	④	3	⑤	4	④	5	②
6	③	7	②	8	④	9	①	10	①
11	③	12	⑤	13	④	14	③	15	②
16	①	17	②	18	⑤	19	③	20	④
21	⑤	22	21	23	14	24	32	25	16
26	256	27	12	28	34	29	36	30	6

해 설

1. [출제의도] 지수의 연산을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$3^3\div 81^{\frac{1}{2}}=27\div(9^2)^{\frac{1}{2}}=27\div 9=3$

2. [출제의도] 집합의 연산을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$(A\cup B)-(A\cap B)=\{3, a\}$이고 $\{3, a\}=\{3, 4\}$이므로
$a=4$

3. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n+2)-2\}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)-\lim\limits_{n\to\infty}2=5-2=3$
$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(2a_n+b_n)-2a_n\}$
$=\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n+b_n)-2\lim\limits_{n\to\infty}a_n$
$=10-2\times 3=4$
따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3+4=7$

4. [출제의도] 역함수와 합성함수를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$f(2)=1$이므로 $f^{-1}(1)=2$
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=2$이므로
$f^{-1}(1)+f(f(1))=2+2=4$

5. **[출제의도] 필요조건을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

두 조건 p, q의 진리집합을 P, Q라 할 때

p가 q이기 위한 필요조건이면 $Q \subset P$를 만족한다.

$P = \{ x \mid x^2 + ax - 8 = 0 \}$

$Q = \{ x \mid x = 2 \}$

이므로 $x = 2$는 방정식 $x^2 + ax - 8 = 0$의 해이다.

$2^2 + 2a - 8 = 2a - 4 = 0$

따라서 $a = 2$

6. **[출제의도] 확률을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

두 개의 주사위를 던질 때 나오는 총 경우의 수는

$6 \times 6 = 36$

5의 배수는 두 수의 합이 5 또는 10인 경우이다.

두 수의 합이 5인 경우는

$(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$이고,

두 수의 합이 10인 경우는

$(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$

7. **[출제의도] 정적분을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$\int_0^a (6x^2 + 2x)dx = \left[2x^3 + x^2\right]_0^a = 2a^3 + a^2 = 20$

$2a^3 + a^2 - 20 = 0$

$(a-2)(2a^2 + 5a + 10) = 0$

따라서 $2a^2 + 5a + 10 > 0$이므로 $a = 2$

8. **[출제의도] 조건부 확률을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= \mathrm{P}(A) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$

이므로 $\mathrm{P}(A|B) = \frac{2}{3}$

9. **[출제의도] 로그의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$\log_2(a-1)b = \log_4(a-1)$

$\log_2(a-1) + \log_2 b = \frac{1}{2}\log_2(a-1)$

$\frac{1}{2}\log_2(a-1) = -\log_2 b$

$\frac{\log_2(a-1)}{\log_2 b} = -2$

따라서 $\log_b(a-1) = \frac{\log_2(a-1)}{\log_2 b} = -2$

10. **[출제의도] 급수와 수열의 극한의 관계를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right) = 0$이다.

이때 $\frac{a_n}{n} - 2 = b_n$이라 하면 $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

$\lim_{n \to \infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n} - 2\right) + 2\right\}$

$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right) + \lim_{n \to \infty} 2 = 0 + 2 = 2$

$\lim_{n \to \infty}\frac{3a_n - 2}{8n+1} = \lim_{n \to \infty}\frac{\frac{3a_n}{n} - \frac{2}{n}}{8 + \frac{1}{n}} = \frac{6-0}{8+0} = \frac{3}{4}$

[다른 풀이]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right) = 0$이므로

$\lim_{n \to \infty}\frac{a_n}{n} = 2$이다.

따라서 $\lim_{n \to \infty}\frac{3a_n - 2}{8n+1} = \lim_{n \to \infty}\frac{\frac{3a_n}{n} - \frac{2}{n}}{8 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{4}$

11. **[출제의도] 수열의 합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$n = 5$일 때,

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1} + a_{2k})$

$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10})$

$= 5^2 + 5 = 30$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 30$

12. **[출제의도] 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$y = \frac{2x}{x+a} = \frac{2(x+a) - 2a}{x+a} = \frac{-2a}{x+a} + 2$이므로

$y = \frac{2x}{x+a}$의 그래프의 두 점근선이 $x = -a$, $y = 2$

따라서 $a = 3$, $b = 2$

함수 $y = \frac{2x}{x+a}$의 그래프가

직선 $y = x + c$에 대하여 대칭이므로

직선 $y = x + c$은 점 $(-3, 2)$를 지난다. 즉, $c = 5$

따라서 $a + b + c = 10$

13. **[출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

무리함수 $y = a\sqrt{2-x} - 2$의 정의역은 $\{x \mid x \le 2\}$,

치역은 $\{y \mid y \ge -2\}$이므로 함수 $y = a\sqrt{2-x} - 2$의

그래프가 두 개의 사분면만을 지나려면 원점을

반드시 지나야 한다.

즉, $\sqrt{2}a - 2 = 0$

따라서 $a = \sqrt{2}$

14. **[출제의도] 이항정리를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r\,(x^2)^{4-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_4\mathrm{C}_r\,a^r x^{8-3r}$

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

$r = 2$일 때이므로 ${}_4\mathrm{C}_2 a^2 = 6a^2$

$\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^5의 계수는

$r = 1$일 때이므로 ${}_4\mathrm{C}_1 a = 4a$

x^5의 계수는 16이므로 $6a^2 - 4a = 16$

$6a^2 - 4a - 16 = 0$

$2(a-2)(3a+4) = 0$

$a = 2$ 또는 $a = -\frac{4}{3}$

따라서 a는 양수이므로 $a = 2$

15. **[출제의도] 함수의 연속을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$x \ne 1$일 때, $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1}\frac{(x^3 - x^2 - 2x) - (-2)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1}\frac{x^2(x-1) - 2(x-1)}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x^2-2)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x^2 - 2) = -1$

따라서 $f(1) = -1$

[다른 풀이]

$x \ne 1$일 때, $f(x) = \frac{g(x) - g(1)}{x-1}$

함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1}\frac{g(x) - (1)}{x-1} = g'(1) = f(1)$

$g'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

따라서 $g'(1) = -1$이므로 $f(1) = -1$

16. **[출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.**

두 곡선 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y = -x^2 + 4x$의 교점의 x좌표를 0, α, β $(0 < \alpha < \beta < 4)$라 두면

$\int_0^{\alpha}\{(-x^2 + 4x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx = -S_1$

$\int_{\alpha}^{\beta}\{(-x^2 + 4x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx = S_2$

$\int_{\beta}^{4}\{(-x^2 + 4x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx = -S_3$

따라서

$S_2 - S_1 - S_3 = \int_0^4\{(-x^2 + 4x) - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}dx$

$= \int_0^4(-x^3 + 5x^2 - 5x)dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_0^4$

$= -64 + \frac{320}{3} - 40$

$= \frac{8}{3}$

17. **[출제의도] 함수의 극한을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.**

$\lim_{x \to 0}\frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2 + 1} = 5$이므로

$\lim_{x \to 0+}\frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to 0-}\frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2 + 1} = 5$

$\frac{1}{x} = t$로 치환하면

$\lim_{t \to \infty}\frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{2}{t^2} + 1} = \lim_{t \to \infty}\frac{f(t)}{t^2 + 2} = 5$,

$\lim_{t \to -\infty}\frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{2}{t^2} + 1} = \lim_{t \to -\infty}\frac{f(t)}{t^2 + 2} = 5$

이므로 $f(x) = 5x^2 + ax + b$

$\lim_{x \to 2}\frac{x^2 - 4}{f(x)} = \frac{4}{5}$에서

$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$

$20+2a+b=0$에서 $b=-2a-20$

$f(x)=5x^2+ax-2a-20=(x-2)(5x+a+10)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(5x+a+10)}=\frac{4}{a+20}=\frac{4}{5}$$

에서 $a=-15$

따라서 $f(x)=(x-2)(5x-5)=5(x-1)(x-2)$

이므로 $f(3)=10$

[다른 풀이]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2+1}=5\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2+1}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2f\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^2+1}=5$$

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{2}{t^2}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2+2}=5.$$

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{2}{t^2}+1}=\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)}{t^2+2}=5$$

이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 5인 이차함수이다.

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\frac{4}{5}$에서

$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=0$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)=0$

따라서 $f(x)=5(x-2)(x+a)$ (단, a는 상수)라 두면.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{5(x-2)(x+a)}=\frac{4}{5(2+a)}=\frac{4}{5}$$

에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=5(x-2)(x-1)$이므로 $f(3)=10$

18. [출제의도] 정적분을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

ㄱ. $y=f'(x)$의 그래프에서 $f'(x)=x^2-1$이므로 $f'(2)=3$이다. (참)

ㄴ. $$\int_a^2 f'(x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_a^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)$$
$$=-\frac{1}{3}a^3+a+\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}(a+1)^2(a-2)=0$$

을 만족하는 $a=-1,\ 2$이므로 서로 다른 모든 a의 값의 합은 1이다. (참)

ㄷ. $f(x)=\int f'(x)dx=\frac{1}{3}x^3-x+C,\ f(2)=\frac{2}{3}+C$

(단, C는 적분상수)

$f(x)=t(x-2)+f(2)$에서

$\frac{1}{3}x^3-x+C=t(x-2)+\frac{2}{3}+C$

$\left(\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}\right)-t(x-2)=0$

$\frac{1}{3}(x-2)(x+1)^2-t(x-2)=0$

$\frac{1}{3}(x-2)\{(x+1)^2-3t\}=0$

$x-2=0$ 또는 $(x+1)^2-3t=0$

$0<t<3$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=t(x-2)+f(2)$은 서로 다른 세 실근 $x=2,\ x=-1+\sqrt{3t},\ x=-1-\sqrt{3t}$을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

[다른풀이]

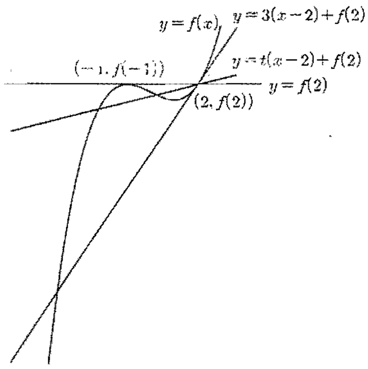
ㄷ. $f'(x)=x^2-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고 ㄴ에서 $\int_{-1}^2 f'(x)dx=0$

즉, $f(2)=f(-1)$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(2)$와의 서로 다른 교점의 개수는 2개다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$이므로

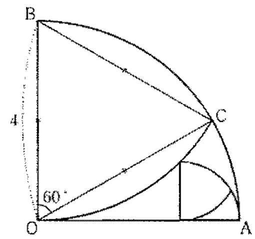
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(2)(x-2)+f(2)$의 서로 다른 교점의 개수는 2개다.

즉, x에 대한 방정식 $f(x)=3(x-2)+f(2)$의 서로 다른 실근의 개수는 2개다.



따라서 $0<t<3$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=t(x-2)+f(2)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

19. [출제의도] 도형에서 등비급수의 성질을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

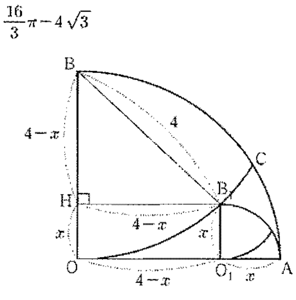


$S_1=$정삼각형 BOC의 넓이+

{부채꼴 BOC의 넓이−정삼각형 BOC의 넓이}×2

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2+\left(4^2\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2\right)\times2$$

$$=\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$$



$\overline{O_1B_1}=x$라 하자.

점 B_1에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{O_1A}=x$이므로 $\overline{HB_1}=\overline{OO_1}=4-x$

$\overline{OH}=\overline{O_1B_1}=x$이므로 $\overline{HB}=4-x$이고

삼각형 HB_1B은 직각이등변삼각형이다.

$\overline{BB_1}=4$이므로 $2\sqrt{2}=4-x$

$x=4-2\sqrt{2}$

닮음비가 $4:4-2\sqrt{2}=1:\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$이므로

공비는 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{4(4\pi-3\sqrt{3})}{3}}{\frac{2\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$=\frac{8(4\pi-3\sqrt{3})}{3(2\sqrt{2}-1)}=\frac{8}{21}(4\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{2}+1)$$

20. [출제의도] 확률분포를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

주머니에 1부터 n까지의 자연수가 적힌 공이 각각 2개씩 있고 A, B 두 사람이 각각 2개씩 공을 주머니에서 꺼내므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 1, 0이다.

(i) $X=2$일 때,

A가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개와 B가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개가 모두 일치해야 하므로

$$P(X=2)=\frac{\boxed{_{2n}C_2-n}}{_{2n}C_2}\times\frac{1}{_{2n-2}C_2}$$
$$=\frac{4n(n-1)}{2n(2n-1)}\times\frac{2}{(2n-2)(2n-3)}$$
$$=\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}$$

(ii) $X=1$일 때,

A가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개와 B가 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자 2개 중 1개의 숫자만 일치해야 하므로

$$P(X=1)=\frac{\boxed{_{2n}C_2-n}}{_{2n}C_2}\times\frac{\boxed{2\times{_{2n-4}C_1}}}{_{2n-2}C_2}$$
$$=\frac{4n(n-1)}{2n(2n-1)}\times\frac{4(2n-4)}{(2n-2)(2n-3)}$$
$$=\frac{8n-16}{(2n-1)(2n-3)}$$

(iii) $X=0$일 때,

확률질량함수의 성질에 의하여

$P(X=0)=1-\{P(X=2)-P(X=1)\}$

따라서 $$E(X)=\sum_{k=0}^{2}\{k\times P(X=k)\}$$
$$=P(X=1)+2P(X=2)$$
$$=\frac{8n-16}{(2n-1)(2n-3)}+\frac{4}{(2n-1)(2n-3)}$$
$$=\frac{4(2n-3)}{(2n-1)(2n-3)}$$
$$=\boxed{\frac{4}{2n-1}}$$

$f(n)={_{2n}C_2}-n=2n(n-1)$,

$g(n)=2\times{_{2n-4}C_1}=4n-8,\ h(n)=\frac{4}{2n-1}$이므로

$\{f(5)+g(7)\}\times h(8)=(40+20)\times\frac{4}{15}=16$

21. [출제의도] 함수의 미분가능성과 연속성을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$h(x)=|x|f(x)$라 하자.

$h(x)=\begin{cases} xf(x) & (x\ge 0)\\ -xf(x) & (x<0)\end{cases}$이므로

$y=h(x)$의 그래프는 $y=xf(x)$의 그래프에서 $x<0$인 영역을 x축 대칭시킨 것이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}=\alpha\ (\alpha\ne0)$라 하면

$\lim_{h\to0-}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}=-\alpha$이고

k가 $\pm\alpha$일 때 $y=kx$와의 교점의 개수가 바뀌므로 $g(k)$는 불연속이다. 조건 (가)에서 $g(k)$가 불연속인 실수 k 중 남은 한 개는 0이고, $y=kx$의 기울기가 0이 되는 순간에(즉 $y=0$(x축)일 때) 교점의 개수가 바뀌게 되는 $f(x)$는 $f(x)=a(x-b)^2$ ($a>0$, $b\ne0$) 꼴 뿐이다. **(※참고 참조)**

$f(x)=a(x-b)^2$라 두면

$xf(x)=a(x^3-2bx^2+b^2x)$이고

$\{xf(x)\}'=a(3x^2-4bx+b^2)=a(3x-b)(x-b)$이므로 함수 $y=xf(x)$는 $x=\frac{b}{3}$, $x=b$에서 극값을 가진다.

함수 $h(x)=|x|f(x)$은 $x=0$, $x=\frac{b}{3}$, $x=b$에서 극대 또는 극소를 가지므로

함수 $h(x)$의 극대 또는 극소인 점을 $A(0, 0)$, $B\left(\frac{b}{3}, h\left(\frac{b}{3}\right)\right)$, $C(b, h(b))$라 하면

$y=f(x)$는 점 $(0, 1)$을 지나므로 점 A를 지나지 않고 점 B, C를 지난다.

$y=f(x)$가 점 B를 지나는 경우

$f\left(\frac{b}{3}\right)=h\left(\frac{b}{3}\right)\ne0$이므로 $f\left(\frac{b}{3}\right)=\left|\frac{b}{3}\right|f\left(\frac{b}{3}\right)$에서

$\left|\frac{b}{3}\right|=1$, $b=\pm3$이다.

$f(0)=ab^2=9a=1$이므로 $a=\frac{1}{9}$

$y=f(x)$가 점 C를 지나는 경우

$f(b)=0$이므로 제외.

(i) $f(x)=\frac{1}{9}(x-3)^2$일 때 $f(1)=\frac{4}{9}$

(ii) $f(x)=\frac{1}{9}(x+3)^2$일 때 $f(1)=\frac{16}{9}$

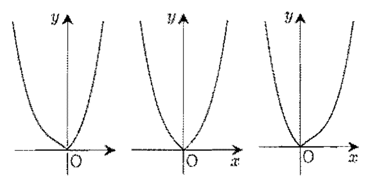
따라서 $f(1)$의 합은 $\frac{4}{9}+\frac{16}{9}=\frac{20}{9}$

[참고]

$y=|x|f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

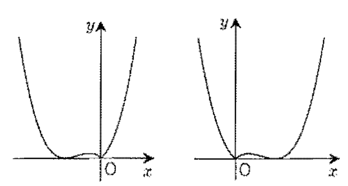
(1) $y=f(x)$와 x축이 만나지 않을 때

(예를 들어 $f(x)=x^2+x+1$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-x+1$일 때)



(2) $y=f(x)$이 x축에 접할 때

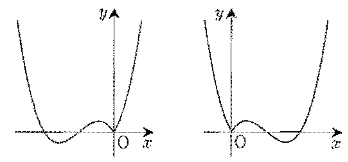
(예를 들어 $f(x)=(x+1)^2$, $f(x)=(x-1)^2$일 때)



(3) $y=f(x)$이 x축과 두 점에서 만날 때

(예를 들어 $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$,

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$일 때)

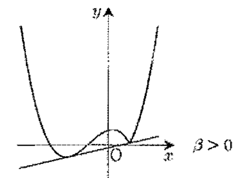


($|x|f(x)$의 그래프가 각각 y축에 대해 대칭이면 $g(k)$의 그래프도 y축에 대해 대칭이므로 각 경우에서 한 개씩만 확인하면 된다.)

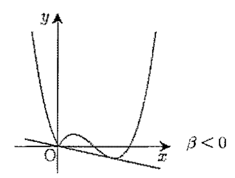
(1)의 경우 $g(k)$가 불연속이 되는 $k=\pm\alpha$로 개수 2

(3)의 경우 $g(k)$가 불연속이 되는

$k=\pm\alpha$, $\beta(\beta\ne\pm\alpha)$로 개수 3이지만



또는



즉 $\beta\ne0$이므로 합이 0이 아님.

(2)의 경우만 조건(가)를 만족하고 이때 $f(x)$는 $a(x-b)^2$꼴로 둘 수 있다.($a>0$, $b\ne0$)

22. [출제의도] 조합을 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

${}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

23. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$n=3$일 때 $a_4-a_3=2^2+1$

$n=4$일 때 $a_5-a_4=2^3+1$

따라서 $a_5-a_3=(a_5-a_4)+(a_4-a_3)$

$=2^2+2^3+2=14$

24. [출제의도] 등차중항을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$x^2-2kx+k-1=0$의 두 실근이 α, β이므로

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k-1$

세 수 α, 3, β가 등차수열을 이루므로 $6=\alpha+\beta$

$k=3$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=36-4=32$

25. [출제의도] 속도와 위치를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면 $v_P=t^2+9$, $v_Q=6t$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 a라 하면

$a^2+9=6a$, $a^2-6a+9=0$, $(a-3)^2=0$

이므로 $a=3$

$t=3$일 때 두 점 P, Q사이의 거리는

$\left(\frac{1}{3}\times3^3+9\times3+2\right)-(3\times3^2-5)=16$

26. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

표본비율은 $\hat{p}=0.8$이고 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\le p\le0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}$

$a\le p\le b$에서 $b-a=0.098$이므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$

따라서 $\sqrt{n}=16$, $n=256$

27. [출제의도] 급수와 정적분의 관계를 이해하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6k}{n^2+k^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}}{1^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=\int_0^1\frac{6x}{1+x^2}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{36x^2}{1+x^2}(x^2+1)\,dx$

$=\int_0^1 36x^2\,dx=[12x^3]_0^1=12$

28. [출제의도] 정규분포를 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

$g(x)$는 $f(x)$를 y축에 대해 대칭이동 후 x축으로 k만큼 평행이동한 그래프이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 서로 같다.

$\sigma=5$

또한 $f(x)$는 $x=8$일 때, $g(x)$는 $x=m$일 때 각각 최댓값을 가지므로

$f(k-m)=g(m)=f(8)$에서 $k-m=8$ ⋯㉠

한편, $P(Y\le16)=P\left(Z\le\frac{16-m}{5}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{m-16}{5}\right)=0.0228$

에서 $0.5-P\left(0\le Z\le\frac{m-16}{5}\right)=0.0228$

$P\left(0\le Z\le\frac{m-16}{5}\right)=0.4772$

따라서 $\frac{m-16}{5}=2$이므로 $m=26$이고

㉠에 대입하면 $k=26+8=34$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 관련 문항을 해결할 수 있다.

조건 (가)를 만족시키려면 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 다음 작거나 같은 것부터 차례로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시켜야 하므로

경우의 수는 ${}_6H_3={}_8C_3=56$이다.

이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$a=f(1)-1$, $b=f(2)-f(1)$, $c=f(3)-f(2)$, $d=6-f(3)$라고 할 때

방정식 $a+b+c+d=5$ (a, d는 음이 아닌 정수, b또는 c는 3이상의 정수)을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수이다.

(1) $b\ge3$이면 $c\le2$이고, $b'=b-3$라고 하면 방정식 $a+b'+c+d=5-3=2$ (a, b', c, d는 음이 아닌 정수)을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ${}_4H_2={}_5C_2=10$이다.

(2) $c\ge3$이면 $b\le2$이고 (1)의 경우와 마찬가지이므로 순서쌍의 개수는

${}_4H_2={}_5C_2=10$이다.

따라서 구하고자 하는 함수의 개수는

$56-2\times 10=36$

30. [출제의도] 함수의 연속성과 역함수의 성질을 이용하여 관련문항을 해결할 수 있다.

함수 $y=-2x+6$ $(1\le x\le 3,\ 0\le y\le 4)$의

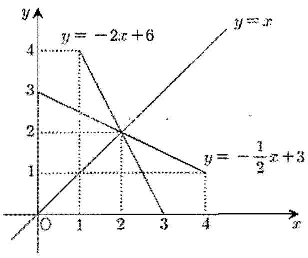
역함수를 구하면 $x=\frac{y-6}{-2}=-\frac{1}{2}y+3$에서

$y=-\frac{1}{2}x+3$ $(0\le x\le 4,\ 1\le y\le 3)$이다.

$-2x+6=-\frac{1}{2}x+3$에서 $\frac{3}{2}x=3$ $x=2$이므로

두 함수 $y=-2x+6$, $y=-\frac{1}{2}x+3$의 그래프의

교점은 $(2,2)$이다. 그래프로 나타내면 다음 그림과 같다.



$g(x)$의 역함수가 존재하므로 $g(x)$는 일대일대응이고 주어진 조건에 의해 $g(x)$는 감소함수이다.

곡선 $y=g(x)$와 곡선 $y=g^{-1}(x)$은 점 $(2,2)$이외에 서로 다른 두 점에서 만나고, 그 두 점은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=g(x)$와 $y=g^{-1}(x)$의 세 교점의 x좌표의 합이 6이므로

$\alpha<2$인 실수 α에 대하여 세 교점은

$(\alpha, 4-\alpha)$, $(2,2)$, $(4-\alpha, \alpha)$가 된다.

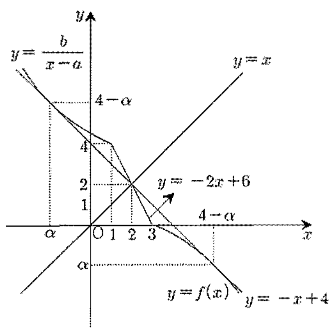
두 점 $(\alpha, 4-\alpha)$, $(4-\alpha, \alpha)$의 중점의 좌표가 $(2,2)$이므로 세 교점

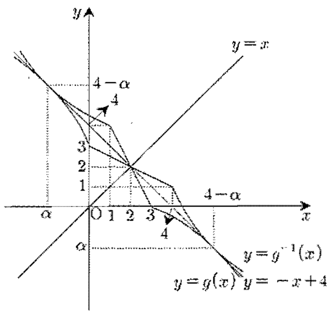
$(\alpha, 4-\alpha)$, $(2,2)$, $(4-\alpha, \alpha)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+4$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 그래프와 그 역함수 $g^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서만 만나려면 두 함수

$y=\frac{b}{x-a}$, $y=f(x)$의 그래프가 함수

$y=-x+4$의 그래프와 각각 한 점에서 만나야 한다.





$g(x)$가 연속함수이므로

함수 $y=\frac{b}{x-a}$는 점 $(1,4)$를 지나야 한다.

$4=\frac{b}{1-a}$, $b=4-4a$ …㉠

두 함수 $y=\frac{b}{x-a}$와 $y=-x+4$의 그래프가 한 점에서 만나므로

$\frac{b}{x-a}=-x+4$,

$-x^2+(a+4)x-4a=b$,

$x^2-(a+4)x+4a+b=0$,

$x^2-(a+4)x+4=0$ …㉡ (㉠에 의해)

$D=(a+4)^2-16=a^2+8a=a(a+8)=0$

$a=0$ 또는 $a=-8$

(1) $a=0$인 경우

㉠에서 $b=4$이므로 함수 $y=\frac{b}{x-a}$는 $y=\frac{4}{x}$이다.

㉡에서 $x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$x=2$

따라서 두 함수 $y=\frac{4}{x}$와 $y=-x+4$는 점 $(2,2)$에서 만나므로 문제의 조건에 맞지 않다.

(2) $a=-8$인 경우

㉠에서 $b=36$이므로 함수 $y=\frac{b}{x-a}$는

$y=\frac{36}{x+8}$이다.

㉡에서 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$

$x=-2$

따라서 두 함수 $y=\frac{4}{x}$와 $y=-x+4$는 $(-2,6)$에서 접한다.

두 함수 $y=g(x)$와 $y=g^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(-2,6)$, $(2,2)$, $(6,-2)$이고 함수 $y=g(x)$는 연속함수이므로 이차함수 $y=f(x)$는 점 $(3,0)$을 지나고 직선 $y=-x+4$와 점 $(6,-2)$에서 접한다.

$f(x)-(-x+4)=k(x-6)^2$

$f(x)=k(x-6)^2-x+4$

$f(3)=9k+1=0$에서 $k=-\frac{1}{9}$이므로

$f(x)=-\frac{1}{9}(x-6)^2-x+4$

따라서 $f(9)=-\frac{1}{9}(9-6)^2-9+4=-6$이므로

$|f(9)|=6$

• 영어 영역 •

정 답

1	④	2	①	3	④	4	②	5	③
6	④	7	⑤	8	①	9	④	10	③
11	③	12	②	13	②	14	③	15	②
16	④	17	③	18	⑤	19	⑤	20	③
21	⑤	22	③	23	①	24	④	25	⑤
26	③	27	③	28	③	29	⑤	30	④
31	①	32	②	33	⑤	34	②	35	③
36	④	37	③	38	④	39	③	40	②
41	②	42	⑤	43	④	44	⑤	45	②

해 설

1. [출제의도] 짧은 응답 고르기

[출처] 2019. 영어듣기 실전모의고사 3회 1번

M: Lisa, what do we need to do to prepare for the workshop next month?
W: First, we need to find and reserve a nice conference room.
M: All right. What size room do you think we need for the workshop?
W: I think we need one that fits at least 100 people.

[어구] prepare for ~을 준비하다 reserve 예약하다 conference room 회의실 fit 맞다 at least 최소한

[해설] 남자가 워크숍을 위해 필요한 회의실의 크기가 어느 정도라고 생각하는지 여자에게 묻는 말에 대한 여자의 응답으로 가장 적절한 것은 ⑤ '적어도 100명을 수용할 수 있는 회의실이 필요하다고 생각해요.'이다.

2. [출제의도] 짧은 응답 고르기

[출처] 2019. 영어듣기 실전모의고사 4회 2번

W: Hi, Brian. I didn't expect to see you at the hospital.
M: Hi, Erica. I'm here to get the results from a recent checkup.
W: Me, too. Well, not mine but my mom's. I help her get a checkup every year.
M: You're such a good daughter.

[어구] recent 최근의 checkup 건강 검진

[해설] 매년 어머니가 건강 검진을 받으시도록 돕는다는 여자의 마지막 말에 대한 남자의 응답으로 가장 적절한 것은 ① '매우 착한 따님이시군요.'이다.

3. [출제의도] 담화의 목적 파악하기

[출처]2019. 영어듣기 실전모의고사 5회 3번