10월 학력평가 #29

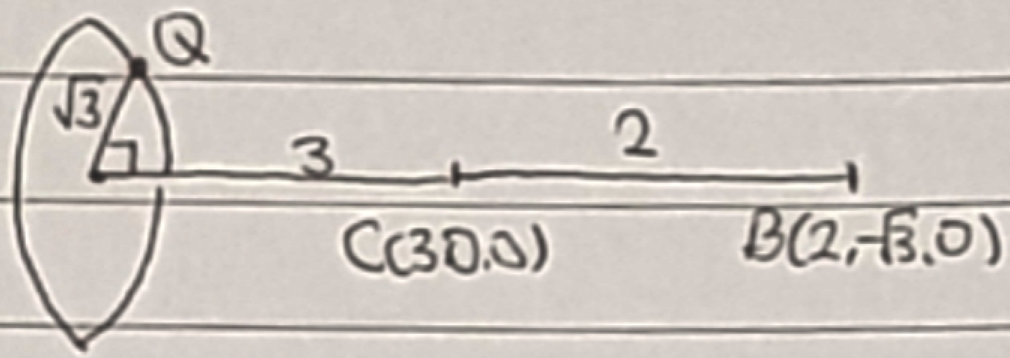
P→ A 옆에서 구로 돌아다님 (반지름 2)

$|\vec{PQ}|$의 최댓값을 원하므로, 이면

($|\vec{AQ}|$의 최댓값) + 2로 구해주면 Ok!

◦ $|\vec{CQ}| = 2\sqrt{3}$, $\vec{BC} \cdot \vec{CQ} = 6$이므로

B, C, Q의 위치관계를 그리면



$\vec{BC} = (1, \sqrt{3}, 0)$ $\vec{AB} = (3, -\sqrt{3}, -6)$

$\therefore$ $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

$|\vec{AB}| = 4\sqrt{3}$ 이므로

($|\vec{AQ}|$의 최댓값$)^2 = (4\sqrt{3}+\sqrt{3})^2 + (3+2)^2 = 100$

$\therefore$ $|\vec{AQ}|$의 최댓값 $= 10$

$\therefore$ $\vec{PQ}$의 최댓값 $= 10 + 2 = \boxed{12}$

10월 학력평가 #20

$|2^t-5|$ → $t=\log_2 5$를 경계로 깔꼬려움

∴ 구간을 나누자.

- $x<(\log_2 5)-2$ → $\int_x^{x+2}(5-2^t)dt=f_1(x)$
- $(\log_2 5)-2\le x<\log_2 5$ →

$\int_x^{\log_2 5}(5-2^t)dt+\int_{\log_2 5}^{x+2}(2^t-5)dt=f_2(x)$

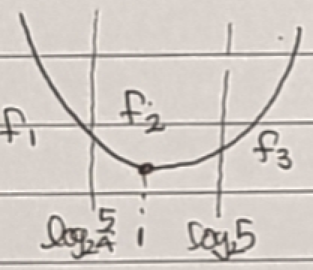
- $\log_2 5\le x$ $\int_x^{x+2}(2^t-5)\,dt=f_3(x)$

- $f_1(x)$ 미분 → -3×2^x ∴ 감소함수
- $f_3(x)$ 〃 → 3×2^x ∴ 증가함수.
- $f_2(x)$ 〃 → $5\times 2^x-10$

$x=1$에서 $f_2'(x)$가 ⊖ → ⊕로 바뀌므로

극소.

개형 그리면



∴ $x=1$에서 최소 → $f_2(1)$ 구하기.

계산하면 → $10\log_2\frac{5}{4}=m$

∴ $2^m=\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$.

10월 학력평가 #30

[준식]

(가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^{x}\sin(\pi x)$

(나) $g(x+1)=\int_0^{x}(f(t+1)e^{t}-f(t)e^{t}+g(t))dt$

(나)에서 $x=0$ 대입 → $g(1)=0$

○ 양변 미분.

$g'(x+1)= e^{x}(f(x+1)-f(x))+g(x) \cdots ①$

○ (가)에서 양변 미분.

$g'(x+1)=g'(x)-\pi(e+1)e^{x}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$

○ ①에 대입, 정리.

$g'(x)-g(x)=e^{x}(f(x+1)-f(x))+\pi(e+1)e^{x}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$

○ 우리가 원하는 건 $\int_x^{x+1}f(t)dt$ 꼴이므로

넘기고 e^{x}로 나눔.

$f(x+1)-f(x)=e^{-x}(g'(x)-g(x))-\pi(e+1)(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)$

○ 양변 부정적분

$\int_x^{x+1}f(t)dt = g(x)e^{-x}+(e+1)(\cos\pi x-\pi\sin\pi x)+C$

○ $x=0$ 대입 (C 구하기)

$\frac{10}{9}e+4=g(0)+e+1+C$

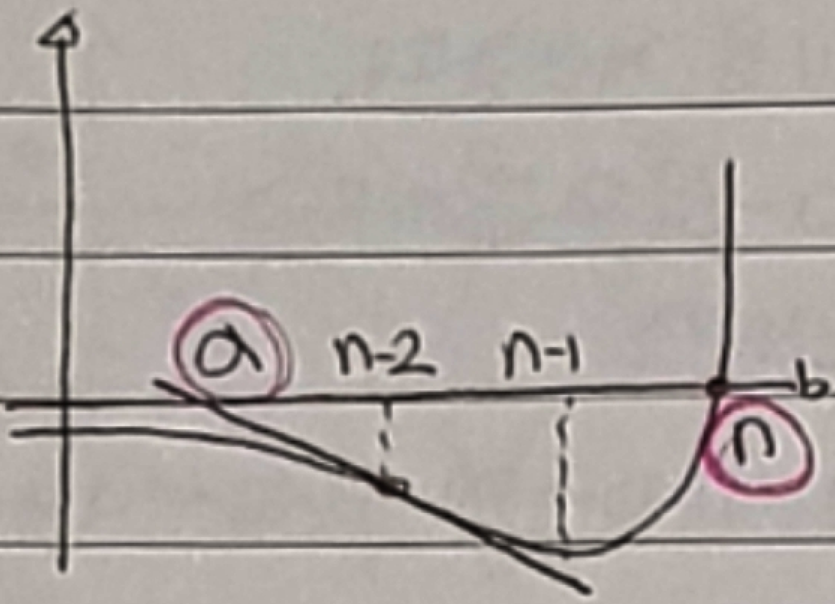
○ (가)에 0 대입 → $g(1)=g(0)=0$

$\therefore C=\frac{e}{9}+3$

○ 1~9까지 대입, 모두 더하기.

$\int_1^{10}f(x)dx=-(e+1)+(e+27)=\boxed{26}$

If) 변곡접선이 보였다면.



$x=n-2$인 점에서 그은 변곡접선 의 x절편에서

→ $f(n)=1$.

$x=n$에서 → $f(n)=1$

10월 학력평가 #21

[짚고 갈 것]

$y=(x-n)e^x$ 는 변곡점이 하나.

따라서 접선 개수 = 접점 개수

ㄱ. 접점을 $(t, 0)$이라 합시다.

접선식은 $y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$

→ (0,0) 지남. $x=0$, $y=0$ 대입.

$t^2-nt+n=0$ 이 튀어나오고,

$n=4$ 이므로 $(t-2)^2=0$ ∴ $t=2$.

$f(4)=1$. (참)

~~ㄴ.~~ $f(n)$이란, 접선식에 $(a, 0)$을 대입한

$(a-t)(t-n+1)+(t-n)$

$=-t^2+(a+n)t-na+a-n=0$

에서 t에 대한 이차식의 근의 개수 입니다.

판별식 D 의 값에 따라 0, 1, 2로 달라지는데,

봅시다.

☆ $D_1=(a+n)^2-4an+4a-4n$

$=a^2-2an+n^2+4a-4n$

$D_1=0$ 이어야 $f(n)=1$이겠죠?

☆ $D_1=0$을 만족하는 n의 개수가 1이라는 말은,

n에 대한 이차방정식

$n^2-2(a+2)n+a^2+4a=0$ 의 근이 한개,

즉, 여기의 판별식 $D_2=0$ 이라는 말이죠.

센스있게 $D_2/4=4$ 임을 알 수 있습니다.

그러므로 a에 관계없이,

$f(n)=1$인 n은 두개가 있겠습니다.

(거짓)

ㄷ. 판별식 D_1으로 다시 돌아갑니다.

예를 들어 $f(1)$을 계산할 때,

$D_1=a^2+2a-3$ 의 값에 따라

$f(1)$이 정해지죠.

$D_1>0$ → 2개, $D_1=0$ → 1개, $D_1<0$ → 0개

이런 식으로요.

$f(n)$에서 $D_1=a^2+(4-2n)a+n^2-4n$

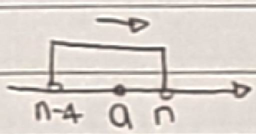
$=(a+4-n)(a-n)$

이므로,

$n-4<a<n$: $f(n)=2$

$a=n-4$ or n : $f(n)=1$

$a<n-4$, $a>n$: $f(n)=0$ 이 됩니다.



a는 가만 있고 자연수가 1씩 평행이동 하므로,

「$n=3$일 때 경계에 걸쳐야 5를 만들 수 있습니다.」

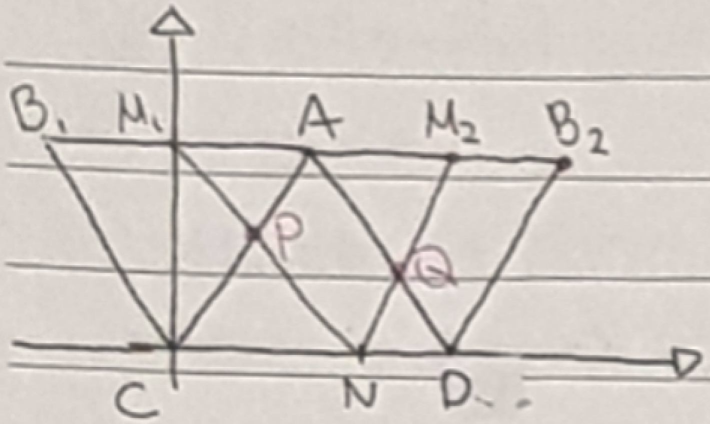
(2 두개, 1 한개, 0 두개)

∴ $a=3, -1$ (참)

[답 : ㄱ, ㄷ]

닮음을 안 보였는데요?

oㅋ...   <좌표>



① P 구하기.

$\overline{M_1N}$의 직선 : $\frac{4}{3}x+\frac{2}{\sqrt{3}}y=1$

$\overline{AC}$의 직선 : $y=\sqrt{3}x$

교점 P

$\therefore P\left(\frac{3}{10}, \frac{3\sqrt{3}}{10}\right)$.

② Q 구하기.

$\overline{M_2N}$의 직선 : $y=2\sqrt{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$

$\overline{AD}$의 직선 : $y=-\sqrt{3}(x-1)$.

교점 Q

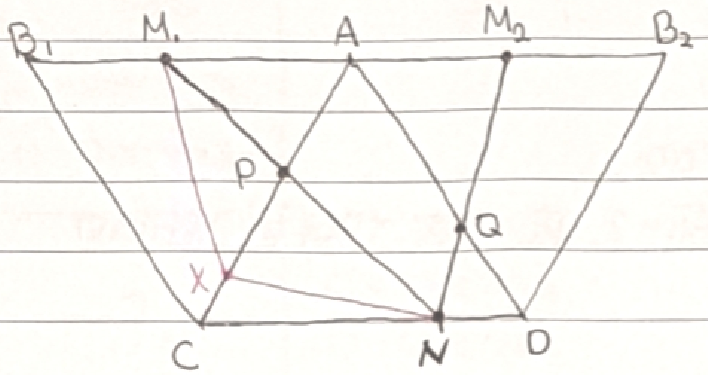
$\therefore Q\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

쉽게 구할 수 있고, 내분비율 또한 깔끔히 나옵니다.

10월 모의평가 #19

선분 $\overline{MP}$, $\overline{PN}$, $\overline{MQ}$, $\overline{QN}$은 모두 옆면 위에 있습니다.

입체로 보기 불편하니 평면(전개도)으로 펼치면,



(B_1과 B_2, M_1과 M_2는 접으면 만납니다).

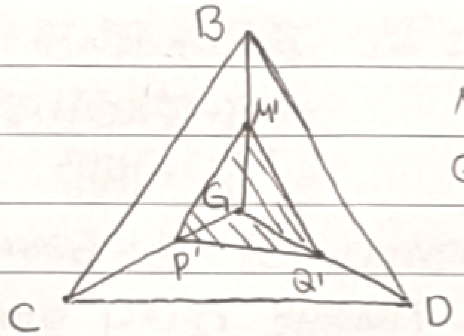
P, Q가 $\overline{MN}$ 위의 점이 되는 이유는, 다른 X를 잡을 때 삼각부등식에 의해

$\overline{MX}+\overline{XN} > \overline{MN}$이기 때문입니다.

평행한 선 $\overleftrightarrow{AB}$와 $\overleftrightarrow{CD}$에 대하여 닮음을 써줍시다.

$\therefore$ P는 $\overline{AC}$의 $2:3$ 내분점, Q는 $\overline{AD}$의 $2:1$ 내분점

$\triangle MPQ$의 정사영을 구하기 위해 각 점을 평면 BCD로 내리면



P'은 $\overline{CG}$의 $3:2$ 내분점

M'은 $\overline{BG}$의 중점

Q'은 $\overline{DG}$의 $1:2$ 내분점.

$\triangle M'P'Q' = \triangle GP'Q' + \triangle GM'Q' + \triangle GM'P'$ 에서 각 삼각형에

[넓이] $= \frac{1}{2}ab\sin\theta$ 의 공식을 이용, 계산하면

$\triangle M'P'Q' = \sqrt{3}/15$.