0. 서론
많은 학생들이 행동영역이라는 말을 쓰는 것 같습니다.
보통의 경우에도 행동영역의 의미를 오해 없이 생각하시는 것 같아요.
일부의 학생들이 오해를 하는 경향이 있어 글을 쓰게 되었습니다.

행동영역은 단순한 문제풀이의 방법론이 아닙니다.

만약 문제풀이의 방법론을 외우거나, 익숙하게 만드는 데에만 초점을 두고 있었다면
당신은 잘못 공부한 것일 가능성이 매우 높습니다.

결론부터 말하자면, 행동영역은 하나의 문제의 유형에 대한 해결방법이 아닙니다.
교과서 개념의 유기적인 연결, 그리고 문제와의 타당한 연결로 이뤄지는 것입니다.
그리고 그러한 연결은, 평소에 왜?라는 질문을 의식적, 무의식적으로 계속 해본 사람에게 주어지는 것입니다.

여러분이 문제를 풀다가 막힐 때, 혹은 문제 푸는 방법을 떠올리지 못했을 때,
그 때 여러분이 믿을 수 있는 것은, 여러분이 그동안 해왔던 질문들일 수 밖에 없습니다.

서론에서부터 핵심을 알려드리자면, 지금 공부하는 이 순간부터라도 질문하세요.
행동영역을 평가원에서 정의해주고 있습니다만, 그것을 늘려주는 것은 자문자답일 것입니다.
문제풀이의 아이디어, 문제풀이의 순서, 예제풀이의 이유, 참 거짓을 판단하는 근거 등등..

모든 것들을 따져가면서 묻고 답하셔야 합니다. 이것이 이번 칼럼의 핵심입니다.

1. 행동영역의 정의
보통 수능 수학영역에서의 행동영역은 다음 4가지로 정의합니다.

계산, 이해, 추론, 문제해결

교육과정평가원에서 제시한 행동영역의 설명을 서술해보겠습니다.

다음의 내용 출처는 [2020학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내] 파일의 내용으로 평가원 사이트에 공개된 내용입니다.
출처 : http://www.kice.re.kr/sub/info.do?m=0401&s=suneung

[계산 능력 : 연산의 기본 법칙이나 성질을 적용하여 주어진 식을 간단히 하는 능력, 수학의 기본적인 공식이나 계산법을 적용하는 능력, 수학의 전형적인 풀이 절차(알고리즘)를 적용하는 능력을 의미한다.]

계산입니다. 계산의 경우에는 수학에서의 기본입니다. 연산의 기본 법칙과 성질을 적용하고, 기본 공식이나 계산을 적용하는 것, 전형적인 풀이 절차를 아는 것은 기본입니다.

많은 학생들이 오해를 하기로는 계산 능력, 즉 풀이 절차만이 행동영역이라 생각합니다.
이러한 학생들은 [닥치고 ~~]라는 말을 굉장히 좋아하는 것 같습니다.
아마 다들 알거에요. 공간도형의 경우 닥치고 단면화, 닥치고 수선..
그래프 그릴 때는 닥치고 미분.. 적분에서는 닥치고 대칭.. 이런 것들이 굉장히 많습니다.
그에 대한 이유도 같이 알아야합니다. 이에 대한 설명은 다음 세가지 능력에서 표현합니다.

[이해 능력 : **문제에 주어진 수학적 용어, 기호, 식, 그래프, 표의 의미와 관련 성질을 알고 적용하는 능력, 주어진 문제와 관련된 수학적 개념을 파악하고 적용하는 능력, 교과서에 나오는 기본 예제나 정형화된 응용문제를 해결하는 능력, 주어진 문제 상황을 수학적으로 표현하는 능력, 수학적 표현을 다른 표현으로 바꾸어 표현하는** 능력을 의미한다.]

언어를 식과 그래프, 그리고 여러 다른 표현으로 바꾸어 표현할 수 있어야 합니다.
주어진 문제와 관련한 식과 그래프, 언어가 있다면 자유자재로 바꿔쓸 수 있어야합니다.
문제가 원하는 순서대로 식과 그래프, 언어를 자유자재로 바꿔 표현해야 한다는 겁니다![1]

교과서에 나오는 기본 예제나 정형화된 응용문제를 해결하는 능력 또한 중요한 말입니다.
교과서의 기본예제 풀이는 거의 모범답안에 가까운 풀이로 이해하셔야합니다.
그러나, 많은 학생들은 교과서의 예제풀이에 대한 공부를 하지 않습니다.
가장 큰 문제로는 어떻게 공부해야할지 모르는 것입니다.[2] 물론 방법또한 질문이에요.

예제풀이의 이유를 명확하게 정리하는 것, 문제풀이에서도 예제풀이의 방식대로 적용하는 것이 결국 공부의 핵심입니다. 예를 들어, 절댓값이 포함된 부등식에서는 범위를 나눠서 절댓값을 풀었습니다. 방정식과 부등식에서의 미분의 활용에서는 방정식에서는 x축과 평행한 직선을 평행이동 하는 것, 부등식에서는 좌변으로 이항하는 이유들을 명확히 알아야해요.

---

1) 특히 수능 문항에서는 모범답안의 풀이 순서가 반드시 존재하는 경우가 많습니다.
적어도 문제가 정의한 순서는 반드시 그대로 따라가셔야하며, 어려운 문항의 경우, 왜 이 순서여야하는지 고민하길 바랍니다.
2) 사실 답은 명확한데.. 왜? 라는 말을 예제풀이 보실 때 계속 하시면 간단하게 됩니다. 근데 안하시잖아요.

[추론 능력 : **나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력, 유추를 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력, 수학의 개념·원리·법칙을 이용하여 참인 성질을 이끌어 내거나 주어진 명제의 참·거짓을 판별하는 능력, 주어진 정의를 이해하고 참인 성질을 이끌어 내는 능력, 반례를 들어 주어진 명제가 거짓임을 판단하는 능력** 등을 의미한다.
조건 명제의 증명, 삼단 논법에 의한 논리적 추론, 반례에 의한 증명, 모순법, 동치 명제의 증명, 수학적 귀납법에 의한 증명 등을 이해하는 능력과 주어진 증명을 읽고 결론을 도출하는 능력 등도 이에 해당한다.]

추론 능력은, 발견적 추론과 연역적 추론으로 나뉩니다.
발견적 추론의 경우 나열하기, 세어보기, 유추(예시들기)의 방법으로 문제 해결의 핵심원리를 발견하는 것입니다. 만약 문제에 예시가 있는 경우, 나열을 하거나 세야하는 경우 추론 능력으로 해결할 수 있습니다. 혹은, 빈칸 넣기 유형의 문제도 추론능력에 해당합니다.

연역적 추론이란 단순히 생각하면 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제라고 생각하면 됩니다.
주어진 명제의 참, 거짓을 판별하고 반례를 찾는 것입니다.

저는 수열의 경우에 한해서, [닥치고 나열]이라는 말이 성립한다고 봅니다.
교과서에서 수열의 정의는 수의 나열이며, 나열하며 규칙성을 찾는 것으로 소개합니다.
물론 자연수를 정의역으로 하는 함수라는 정의도 소개되어있으나, 먼저 나열이 기본입니다.
추론 능력을 통해 나열하여 규칙성을 발견하거나, 문제 해결의 전략을 수립해야합니다.

ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제에서는 알고있는 사실을 이용하여 모르는 것을 해결하는 방식을 통해 문제를 해결합니다. 반드시 앞 선지를 활용하여 뒤의 선지를 해결하셔야합니다. 또한, 기본개념의 충실한 이해를 통해, 문제가 요구하는 알고있는 사실을 확실하게 떠올리셔야 합니다.

[문제해결 능력 : **두 가지 이상의 수학적 개념·원리·법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력, 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력**, 실생활 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제를 해결하는 능력, 타 교과의 소재를 사용한 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제를 해결하는 능력을 의미한다.]

실생활 해결 능력과 타 교과 소재 해결능력은 보통 지수로그 단원에서 출제되는 문항입니다.

이것을 제외한 문제해결 능력, 보통 킬러라 불리는 문항에서의 문제해결 능력은 두 가지 방법으로 나눠집니다.

두 가지 이상의 개념을 연관지어 문제를 해결하는 문항과, 두 단계 이상의 사고과정을 거쳐 해결하는 문항이 그것입니다.

두 가지 이상의 개념을 연관짓는 능력은 어떻게 기를 수 있을까요?
결국 개념으로 돌아가야 하는데, 개념을 공부할 때 보통의 경우, 백지복습을 하게됩니다.
하지만, 이제는 백지복습에 더하여 개념과 개념간의 관련성을 생각해야합니다.
또한, 개념과 문제의 연결, 문제와 문제의 연결을 계속 하셔야합니다.
이전 개념으로 지금 배우는 개념을 설명하고, 이전 문제로 돌아가서 일관된 논리를 만들어야합니다. 이러한 방식의 공부는 이전부터 계속 하셨으리라 생각합니다.

두 단계 이상의 사고과정을 거쳐서 생각하려면 각 단계에서 어떤 것을 알아내야하는지 명확하게 이해해야합니다. 그러려면 각 단계에서 개념이 어떻게 쓰이는지에 대한 이해가 충분해야겠죠? 그리고 처음 단계부터 어떤 것을 해야하는지, 어떤 정보를 알아냈는지는 명확하게 해야합니다.

간단히 말하면, 자기가 뭘 하고 있는지 정도는 명확하게 해야한다는 말입니다.
많은 학생들이 자신이 무엇을 위해 풀이를 하는지조차도 모르는 경우가 매우 많습니다.[3]
개념을 정확하게 알고, 어떨 때 쓰이는지, 왜 쓰이는지를 정확하게 확인하셔야합니다.
또한, 처음 문제를 보았을 때, 어디부터 접근해야할지에 대한 이유도 명확하게 해야합니다.

기본중의 기본이지만 일부 학생들은 문제풀이의 방법만을 공부하며, 그 이유에 대한 질문을 덜하고는 합니다. 그리고 제가 전하고자하는 말은 결국 기본으로 돌아가라는 말입니다.
기본 개념에 충실하고, 예제풀이의 이유를 파악하며, 개념과 개념 사이의 관계를 알고, 문제풀이의 도구의 사용법과 이유를 명확하게 하는 것이 수학공부의 핵심입니다.

이제부터 평가원이 제시한 예제와 기출문제를 보면서 그 내용을 한번 더 파악해봅시다.
이후에 수록될 문항은 기출문제, EBS 문제 등이 수록되어있으며, 출처는 문항마다 기록되어 있습니다. 수록된 문항의 해설은 제가 작성하였으며, 비영리적 목적으로 작성했습니다.

---

3) 안그럴 것 같죠? 실제로는 문제 풀다가 어느 순간 보면, (내가 왜 이런 연산을 하고있었지?) 하는 경우가 정말 많습니다. 복잡한 문제일수록 내가 지금 뭘 하고 있는지, 어떤 개념을 써서 뭘 알고 싶은지를 명확하게 해야합니다. 특히 처음 문제를 접근하는 도입부에서는 더욱 그렇습니다. 처음 접근에 대한 이유를 풀 때 당시에는 몰라도 정리할 때 알아야해요.

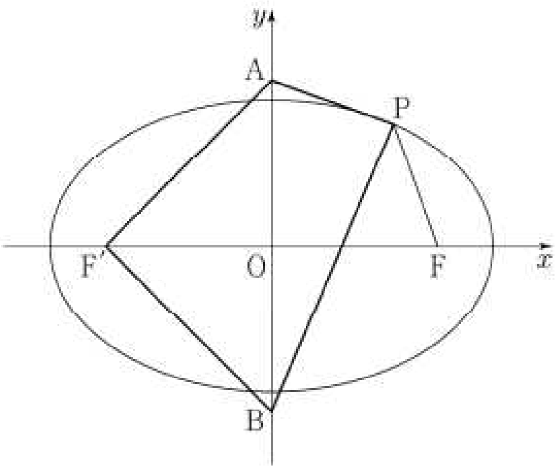
2. 이해 능력

Q1)

수학적 개념 · 원리 · 법칙을 이해하고 적용하기

예시 문항

◉ 좌표평면에서 두 점 A(0, 3), B(0, −3)에 대하여, 두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 P가 $\overline{AP}=\overline{PF}$를 만족시킨다. 사각형 AF′BP의 둘레의 길이가 $a+b\sqrt{2}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $\overline{PF}<\overline{PF'}$이고 a, b는 자연수이다.) [4점]



(2019학년도 수능 9월 모의평가 수학 가형 27번)

[이 문항은 타원의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 문항을 해결하기 위하여 학생은 타원의 정의, 타원의 방정식을 문제 상황에 적용하여 문제 해결에 필요한 조건들을 구할 수 있어야 한다. 또한 이와 같은 유형의 문제를 해결하기 위해서 학생들은 수학적 개념·원리·법칙에 대한 이해를 바탕으로 이를 적용하여 문제 상황을 재조직하고 표현할 수 있도록 학습할 필요가 있다.]

이 문항의 경우, 타원의 정의를 이용하는 문제입니다. 수학적 개념·원리·법칙에 대한 이해능력을 평가하는 문항입니다. 타원이 보이면 두 초점과의 거리의 합이 장축의 길이로 일정하다는 것을 알 수 있으며, 구하는 것은 사각형의 둘레의 길이입니다.

사각형의 둘레와 두 초점 사이의 길이의 합은 관계가 없어보입니다. 사각형은 초점을 꼭짓점으로 가지지 않습니다. 이 상황에서 어떻게 타원의 정의를 쓸 수 있을까요?[4]

타원의 정의를 쓰려면 $\overline{\mathrm{PF}}$와 $\overline{\mathrm{PF'}}$에 대한 정보가 필요합니다. 우리가 아는 것은 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$라는 조건 뿐입니다. $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PF'}}$면 좋을 것 같습니다. 그 경우 타원의 정의도 이용해서 둘레의 길이를 구할 수 있을겁니다. 나머지 두 변은 길이가 정해져있으니까요. 하지만, 실제로 그런지는 알 수 없습니다.

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PF}}$조건 뿐만 아니라 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로, 두 변의 길이가 같은 두 삼각형 $\triangle\mathrm{ABP}$와 $\triangle\mathrm{FF'P}$가 눈에 보이는 것은 이제 당연합니다. $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PF'}}$임을 증명하기 위한 과정이므로 SSS합동이 아닌 SAS합동인지 생각해보아야하며, $\angle\mathrm{PAB}$와 $\angle\mathrm{PFF'}$가 같은지만 살펴보면 됩니다. 삼각형 $\triangle\mathrm{APF}$는 이등변삼각형이며, $\triangle\mathrm{AOF}$는 직각이등변삼각형입니다. 즉, SAS합동이 성립하므로, $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PF'}}$이며, 타원의 정의를 이용해서 문제를 해결할 수 있습니다.

즉, 이 문제는 타원의 개념을 아는 상태에서, 어떻게 그 성질을 이용할까에 대한 고민의 답을 구하는 과정이었던 것입니다. 기본적인 개념, 성질은 기억하고 활용해야합니다.

이제, 예제풀이와 문제풀이의 관련성을 기출문제를 통해 살펴보도록 합시다.

Q2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 극한값은?

(출처 : 2010학년도 6월 평가원 27번)

우리가 기본적인 공식을 모르고 접근한다면, 이러한 문제에서 공식을 때려 박다 망할 수도 있는 것입니다.

이 문제의 경우 어떻게 풀어야겠습니까?

① $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{\Delta}-1}{\Delta}=1$ 꼴을 만들어야 하는데, -1이 보이지 않네? 어떻게 해야할까?

② $e^{1-\tan x}$로 분자를 묶어볼까? $\lim_{x\to 0}\dfrac{(e^{\tan x-\sin x}-1)e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$

로 푸시면 바로 풀리는 것입니다!

당연히 예제풀이를 보았다면, 이러한 생각을 이젠 하셔야합니다.

---

4) 이러한 질문이 제일 중요합니다. 질문하세요.

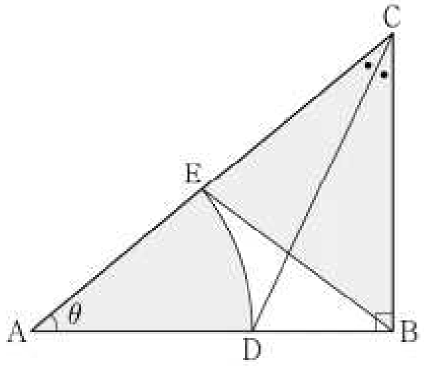
개념 적용의 이유와 예제풀이의 이유, 풀이과정 모두 질문하셔야 실력이 늡니다.

Q3)

수학적 언어(용어, 기호, 식, 표, 그래프 등)의 의미를 이해하고 표현하기

예시 문항

◉ 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에서 $\angle C$ 를 이등분하는 직선과 선분 AB 의 교점을 D, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$ 인 원과 선분 AC 의 교점을 E 라 하자. $\angle A=\theta$ 일 때, 부채꼴 ADE 의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BCE 의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)}$ 의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

(2019학년도 수능 수학 가형 18번)

[이 문항은 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 문제에서 ‘그림과 같이’라는 문구가 있는 경우 그림은 해당 문제의 정보를 담고 있으므로, 이 문항을 해결하기 위하여 학생은 주어진 그림에서 점과 선분의 위치 등과 같은 정보를 파악하고, 이를 이용하여 도형의 넓이를 표현할 수 있어야 한다. 또한 이와 같은 유형의 문제를 해결하기 위해서 학생들은 용어, 기호, 식, 표, 그래프 등의 의미를 이해하고, 주어진 문제 상황을 수학적 언어로 표현하여 문제 해결에 필요한 조건을 구할 수 있도록 학습할 필요가 있다.

일반적으로 문제에서 ‘그림과 같이’라는 문구가 있는 경우 그림은 해당 문제의 정보를 담고 있으며, 이 문구가 없는 경우 그림은 보조 자료이다. 수능에서 ‘그림을 보는 능력’은 고등학교 교육과정을 정상적으로 이수한 학생이라면 갖출 수 있는 수준을 요구한다.]

극한 문제에서는 특히 그림의 상황을 수식으로 표현하는 것이 가장 중요합니다.
그림의 상황은 문제에서 정의된 상황이므로, 문제에서 설명하는 순서 그대로 선분의 길이를 세타에 관한 식으로 나타내면 됩니다. 다시한번 설명하자면 문제에서 설명하는 순서를 충실히 참고하여 식으로 나타내시면 됩니다.

예를 들어, 위 문항의 경우에는, 삼각형의 한 내각 C를 이등분하는 선과 AB의 교점을 D라 했습니다. C를 이등분한 각과 AD의 길이를 먼저 구해주는 것이 좋겠습니다. AD의 길이는 반지름이므로, AC의 길이에서 반지름을 빼주면 CE의 길이가 나오게됩니다.

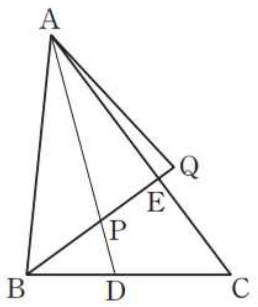
반지름과 각을 알 때 부채꼴의 넓이를 구할 수 있고, $\triangle \mathrm{BCE}$는 CE의 길이와 BC의 길이, 그리고 각 C를 알면 구할 수 있게 됩니다.

문제에 주어진 상황을 수학적으로 표현하는 것은 문제에서 정의한 순서대로 하는 것이 좋습니다. 이 문제의 경우에도, D를 정의한 후에 그것을 이용해서 원을 만들어 AC와의 교점을 찾아 E로 정의했습니다. 정의한 순서대로 찾아가야 정확하게 상황을 이해할 수 있겠습니다.

다음은 EBS 수능완성에 수록된 문항입니다.
Q4)

16 ▸ 9050-0280

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$인 삼각형 ABC에서 변 BC를 $3:4$로 내분하는 점을 D, 변 AC를 $3:2$로 내분하는 점을 E라 하고, 직선 AD와 직선 BE의 교점을 P라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$인 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$일 때, $\cos(\angle \mathrm{BAC})$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{11}{15}$ ⑤ $\frac{13}{15}$

(출처 : 2020학년도 수능 대비 EBS 수능 완성 수학 영역 수학 가형 P.120, 16번 문항)
문제풀이의 순서를 생각해봅시다.
구하는 것은 각 BAC이며, 내적을 이용하여 각을 구하는 것을 생각할 수 있습니다.

즉, AB벡터와 AC벡터를 생각하는 편이 좋겠습니다. 각각 $\vec{b}$와 $\vec{c}$라고 정의합시다.
정의하기로는 변 BC를 3:4로 내분하는 점을 D, 변 AC를 3:2로 내분하는 점을 E라고 합니다. $\vec{b}$와 $\vec{c}$로 나타내면 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}$이며, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{3\vec{c}}{5}$입니다.

직선 AD와 직선 BE의 교점을 P라 하면
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\times\dfrac{4\vec{b}+3\vec{c}}{7}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\,\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\vec{b}+l\left(\dfrac{3\vec{c}}{5}-\vec{b}\right)$이므로,

$\vec{b}$와 $\vec{c}$의 비가 4:3이 되려면 $l=\dfrac{5}{9}$, $k=\dfrac{7}{9}$ 여야하며, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$입니다.

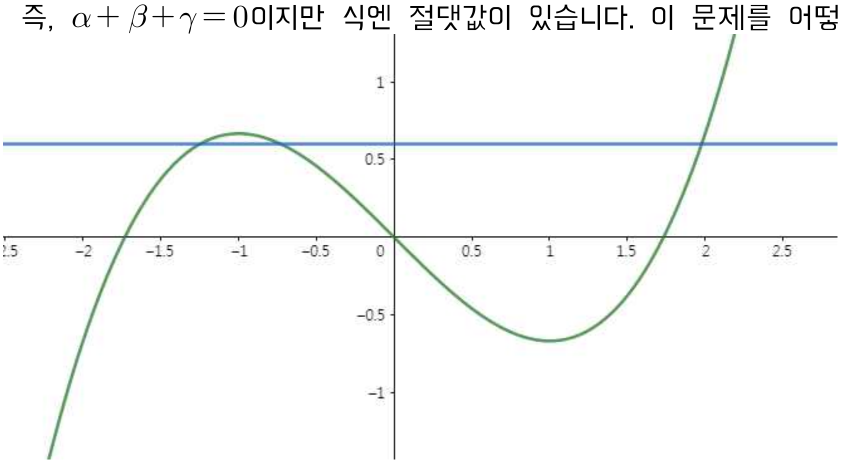
$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\dfrac{5}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$ 입니다. 이렇게 문제가 제시한 순서대로 D,E,P,Q를 정의해주면 됩니다. (마무리는 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{EQ}}\right|=2\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|$로 계산해주면 쉽게 답을 구할 수 있습니다.)

이렇게 문제가 제시한 순서대로 정의하고 구하는 것이 좋습니다.
그림이 정의된 순서대로 그려졌고, 그 상황 안에서 구하는 것을 찾는 것이 의도입니다.
시험의 출제자는 문제의 모범답안을 만들어둘 수 밖에 없으며, 당연히 정의한 순서대로 모범답안을 만들 수 밖에 없어요.

문제 상황을 분석할 때는 문제가 제시한 순서를 충실하게 따라주세요.
그 이후의 약간의 생각만으로도 충분히 해결할 수 있을거에요.

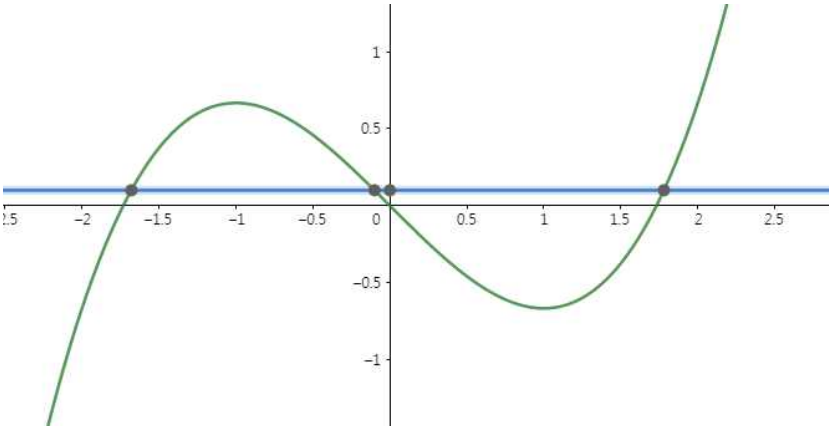
Q5) x에 대한 삼차방정식 $\dfrac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.
(출처 : 2005학년도 수능 수학 가형 24번)

이 문항은 삼차방정식의 세 근의 합이 이차항의 계수임을 이용해 해결해야 합니다.
즉, $\alpha+\beta+\gamma=0$이지만 식엔 절댓값이 있습니다. 이 문제를 어떻게 해결하면 좋을까요?

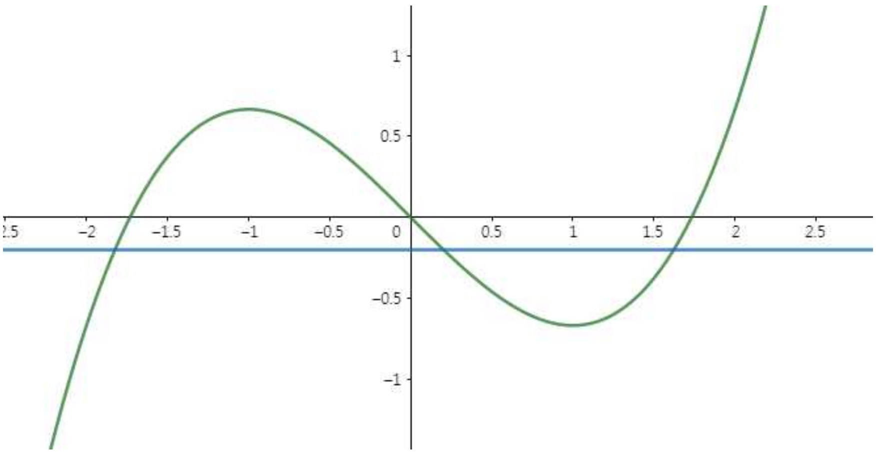


실제 문제 상황은 이렇습니다. 왠지모르게 k가 0일 때 합이 제일 작아보입니다.
그러나 그 검증은 어려운 상황입니다. 어떻게 해야할까요?
절댓값을 풀 수 있다면 $\alpha+\beta+\gamma=0$을 사용할 수 있습니다.

절댓값을 풀기 위해서, α, β, γ가 존재하는 위치를 한번 살펴봅시다.



k가 0 이상인 상황에서는 α, β가 0보다 작으며, γ가 0보다 큽니다.
이 경우, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma$입니다.
k가 0일 때, γ가 제일 작습니다. 즉, 최솟값은 $2\sqrt{3}$입니다.



반대로 k가 0 이하인 상황에서는 α가 0보다 작으며 β, γ는 0보다 큽니다.

즉, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha+\beta+\gamma=-2\alpha$이며, k가 0일 때, α가 제일 큽니다.
즉, 최솟값은 $2\sqrt{3}$입니다. 이상으로 답은 12입니다.

사실 간단합니다. 수많은 예제에서는 절댓값을 먼저 풀고 식을 정리하면서 문제를 풀었습니다. 이 문제에서도 마찬가지로 절댓값을 어떻게 풀어줄까를 생각해보면, k가 0 이상일 때와 0 이하일 때 절댓값이 풀린다는 것을 매우 쉽게 파악할 수 있습니다.

Q6) 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

(출처 : 2015학년도 수능 수학 A형 21번)

첫 계산에서 $h(x)=f(x)-f'(x) \geq 0$으로 만들어야하는 이유는 예제풀이에 있습니다.

부등식을 어떻게 증명할까?

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하는 것을 증명할 때는 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

또한, 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하고, 주어진 구간에서 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보이면 된다.

예제 2

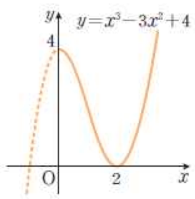
$x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3 \geq 3x^2-4$가 성립함을 보여라.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2+4$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x \geq 0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	4	↘	0 (극소)	↗



따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때, 극소이고 최소이다. 즉, 최솟값이 $f(2)=0$이므로 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3-3x^2+4 \geq 0$$

이다. 따라서 $x \geq 0$일 때, 부등식 $x^3 \geq 3x^2-4$가 성립한다.

풀이 참조

(출처 : 고등학교 수학 미적분 1 교과서)

풀이의 이유는, 하나의 함수로 만들어서 함수의 그래프를 그릴 수 있는 것에 있습니다.

이 때, 0보다 크다는 것을 증명하기 위해선, x축을 기준으로 위에 있기만 하면 됩니다.

이 방법에는 장점이 있습니다. 두 개의 그래프를 그리고 교점을 찾지 않아도 됩니다!

하나의 그래프와 x축의 관계만으로 충분히 부등식에 접근할 수 있다는 것이에요.

이렇듯, 예제풀이의 이유를 알고 활용하실 때, 실력이 늘게 됩니다.

Q7)

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?

(출처 : 2012학년도 수능 수학 가형 19번)

① -3　② $-\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{15}{4}$　⑤ 6

먼저 문제를 풀기 전에 예제를 먼저 보도록 하겠습니다.

방정식 $\ln x-kx=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

풀이 방정식 $\ln x-kx=0$에서　$\ln x=kx$, $\dfrac{\ln x}{x}=k$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수이다.

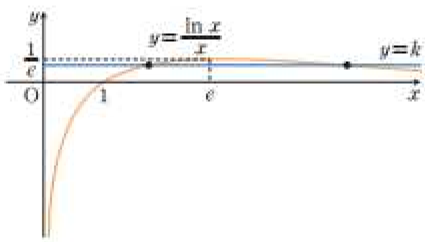
$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하고, $f'(x)=0$인 x의 값을 구하면　$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$

즉, $x=e$

한편, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이다.

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$ (극대)	↘



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<\dfrac{1}{e}$이다.

(출처 : 미래엔 미적분 2 교과서)

이 문제에 대하여 예제는 왜 $\ln x = kx$ 그대로 그리지 않고

$\dfrac{\ln x}{x} = k$로 변형해서 표현했을까요?

이 이유는 몇 가지가 있습니다.

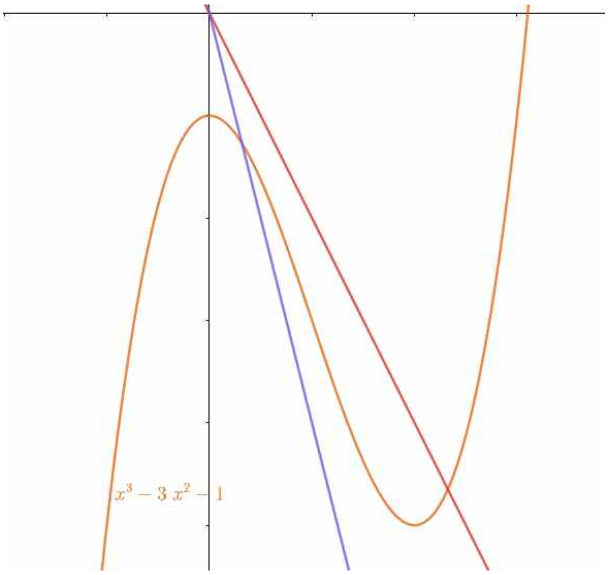
① 교과서에서는 평행이동을 배웠으며, 회전이동을 배우지 않았습니다.

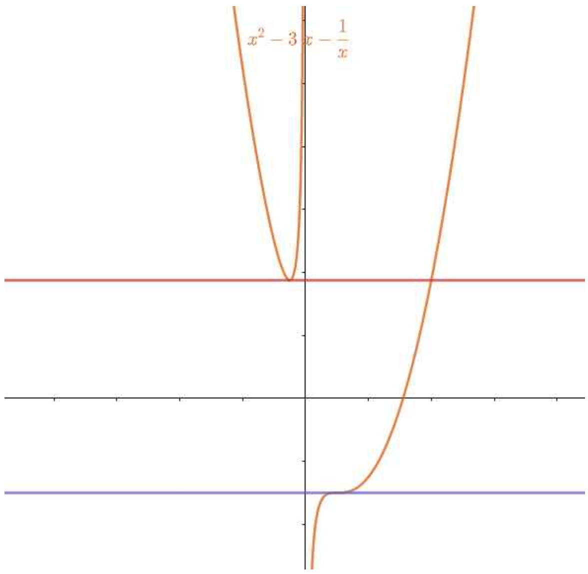
② 교과서에서는 미분 가능한 함수가 극값을 가질 때, $f'(x) = 0$이라 합니다.

y=k는 x축과 평행한 직선이기 때문에 미분계수가 항상 0이며, 극값에 접합니다.

극값에 접하는 곳에서 실근이 변할 가능성이 있기 때문에, 개수 파악이 용이합니다.

이제 기출문제를 푸는 두 가지 방법을 보여드리겠습니다.





예제풀이의 이유를 안다면, 오른쪽의 풀이의 이유도 알게되는 것입니다. 앞으로 다른 풀이를 쓰게되더라도, 예제풀이의 이유정도는 반드시 정리하는게 문제풀이에도 도움이 될 것입니다.

Q8)

21. 좌표평면에서 두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(2, 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 직사각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

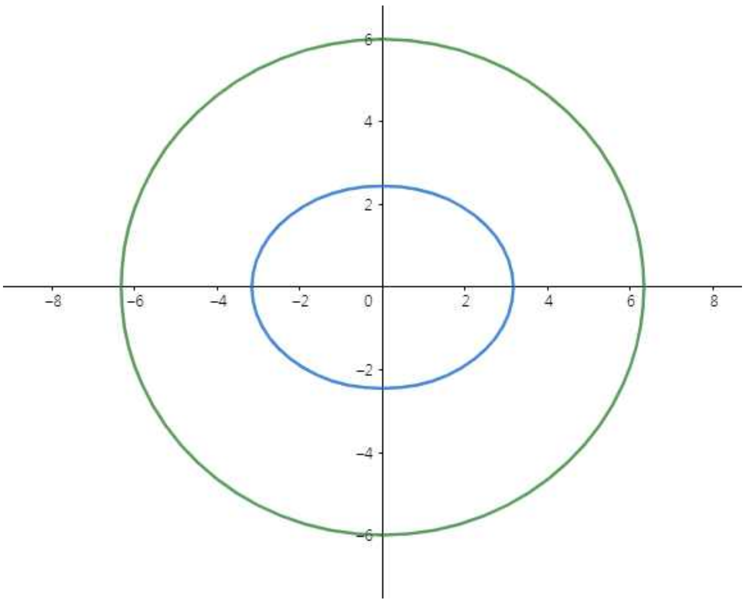
직사각형 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값은 점 P의 좌표가 $(0, 6)$일 때 최대이고 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$일 때 최소이다.

① $\frac{200}{19}$ ② $\frac{210}{19}$ ③ $\frac{220}{19}$ ④ $\frac{230}{19}$ ⑤ $\frac{240}{19}$

(출처 : 2020학년도 9월 평가원 수학 가형 21번)
만약, 직사각형을 움직이는 점 P에 대하여 원점과 P 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다면, 우리는 동심원을 그려가면서 문제에 접근했을 것입니다.

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 길이의 최대와 최소는 어떻게 생각해야할까요?
원은 중심에서부터 거리가 일정한 점들의 집합입니다.
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 일정한 점들의 집합은 타원이었습니다.
점 P의 좌표가 $(0,6)$일 때의 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$값은 $4\sqrt{10}$이며, $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$일 때의 값은 $2\sqrt{10}$입니다.

즉, 초점을 A,B라 하며 장축의 길이가 $4\sqrt{10}$, $2\sqrt{10}$인 타원을 그려야하겠습니다.



여러분께서는 두 초점과의 거리의 합이 일정한 도형이 타원임을 알고있습니다.
그리고 동심원을 그려가면서 중심과의 거리를 어림하기도 했었습니다.
마찬가지로 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최대와 최소는 타원과 밀접한 관련이 있음을 알아야합니다.
타원 위의 점들은 모두 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$가 일정하고, 장축의 길이가 길어지면 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$값이 커집니다.
즉, 두 타원 사이의 영역은 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 값이 $2\sqrt{10}$과 $4\sqrt{10}$ 사이인 특징을 가진 점들입니다. 즉, 직사각형은 두 타원으로 둘러싸인 영역 안에 존재하며, $(0,6)$과 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$을 지납니다.

이 이후에는 두 타원의 영역 안에 직사각형의 넓이의 최대를 상상해서 구해주면 되겠습니다. $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$에서 작은 타원에 접하고, $(0,6)$을 지나고 접선에 평행한 직선을 그으면 최대 넓이의 직사각형을 쉽게 상상하실 수 있을겁니다.

정리해봅시다.

① 정의에 집중하면 풀리는 경우가 있다.

② 문제가 표현한 순서대로 값을 표시해주자.

③ 예제와 문제를 그냥 풀지만 말고, 예제풀이의 이유를 명확하게 하자.

매우 간단하지요? 하지만 많은 학생이 교과서를 자주 보지 않습니다.
아무래도 정의와 예제풀이에 대해서 부족한 학생이 있을텐데, 시간이 오래 걸리지도 않는 아주 간단한 것이므로 한번만 정리해주세요.

3. 추론능력

Q1)

수학의 개념 · 원리 · 법칙을 이용하여 참인 성질을 이끌어 내거나 주어진 명제의 참 · 거짓을 판별하기

예시 문항

열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$ 가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

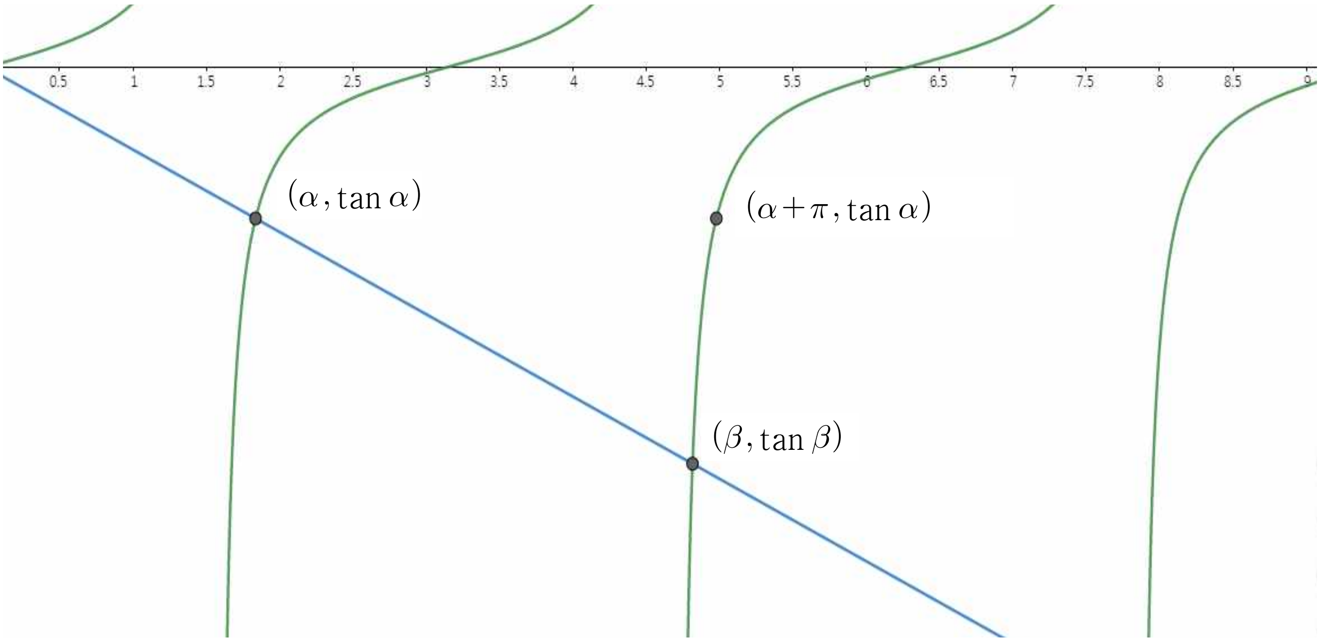
(2019학년도 수능 9월 모의평가 수학 가형 20번)

[이 문항은 삼각함수의 미분을 이해하고 활용할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 문항을 해결하기 위하여 학생은 삼각함수의 미분을 이용하여 <보기>에 제시된 명제의 참,·거짓을 판별할 수 있어야 한다. 또한 이와 같은 유형의 문제를 해결하기 위해서 학생들은 주어진 조건에서 나타나는 성질을 이용하여 <보기>의 명제가 참임을 연역적으로 추론하거나 명제를 만족하지 않는 반례를 찾을 수 있도록 학습할 필요가 있다.]

ㄱ. 선지는 굉장히 쉽습니다. 미분하면, $f'(x)=-\sin x+2\sin x+2x\cos x$입니다.
정리하면 $f'(x)=\sin x+2x\cos x$이며, 이 식의 값이 0이 될 때를 찾는 것입니다.
$\sin x+2x\cos x=0$을 양변에 cos x를 나누어 변형하면 $\tan x=-2x$입니다.
주기함수이므로 ㄱ 선지는 맞습니다. 이 식을 만족하는 x값을 α, β라 합니다.
($x=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$일 때는, 대입했을 때, 좌변이 0이 되지 않으므로 나눌 수 있습니다.)

ㄴ.

이 상황을 그림으로 표현하면 다음과 같습니다.



우리는 $y=\tan x$ 그래프의 한 주기만을 그릴 수 있습니다.
그 후 주기에 따라 붙여 넣어주는 것입니다.

그림을 보면, 한 주기 안에 β, $\alpha+\pi$가 있음을 확인할 수 있으며, $\beta < \alpha+\pi$ 입니다.
위로 볼록인 부분에 있으므로 $f''(x)<0$인 상태입니다.
그 때 도함수의 값은 x값이 증가할 때 감소합니다.

즉, $g'(\alpha+\pi) < g'(\beta)$가 성립함을 알 수 있습니다.

ㄷ. 아무것도 알 수 없는 식입니다.
ㄴ의 결과와 연관지어보면, 분모에 x의 변화량이 있는 것 같다는 느낌이 듭니다.
즉, 기울기의 느낌이 강하게 들지만, 아직까지는 잘 모르겠습니다.[5)]

우리는 ㄱ에서 $\tan x = -2x$를 만족하는 x값이 α, β인 것을 알았습니다.
즉, $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{(\alpha+\pi)-\beta} = \dfrac{-2\alpha+2\beta}{(\alpha+\pi)-\beta} = \dfrac{2(\beta-\alpha)}{(\alpha+\pi)-\beta}$이며,
이것은 두 점 $(\alpha+\pi, \tan\alpha)$, $(\beta, \tan\beta)$의 평균변화율입니다. $\sec^2\alpha$는 $\alpha+\pi$에서의 미분계수일 것입니다. 즉, 평균변화율과 미분계수의 대소비교입니다. $[\beta, \alpha+\pi]$ 구간 안의 평균값의 정리를 만족하는 임의의 C는 $\alpha+\pi$보다 작으므로, $\dfrac{2(\beta-\alpha)}{(\alpha+\pi)-\beta} = g'(c) > g'(\alpha)$

5) 하지만, 기울기라는 느낌은 반드시 들어야합니다. 그동안 개념을 배우면서 가장 많이 이야기했던 개념입니다.

즉, 부호는 반대여야 합니다.
보통의 ㄱ, ㄴ, ㄷ 문제는 앞선 선지를 통해서 다음 선지를 추론하는 경우가 대부분입니다.
선지를 파악하는 데 쓰이는 개념들은 간단한 기본개념들입니다.
함수와 방정식, 이계도함수와 도함수의 관계, 삼각함수의 주기성, 그리고 평균값의 정리 등 입니다.

기본개념과 그 이전의 선지를 이용하여 어떻게 접근해야할지 생각해보세요.
특히, ㄷ 선지를 틀리는 이유는, 기울기에 대한 상상을 잘 안했기 때문입니다.
ㄴ 선지의 내용을 조금만 본다면 $\alpha+\pi-\beta$가 무엇인지 약간이라도 떠올렸을 것입니다.

Q2)

21. 함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, a, b는 상수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

(출처 : 2020학년도 9월 평가원 수학 나형 21번)
이 문항의 경우, 반드시 ㄱ,ㄴ,ㄷ 선지를 연결지어서 해결하는 문항입니다.
ㄱ선지에서는 함수 g(x)가 곱의 미분법 꼴임을 관찰할 수 있고 당연한 선지입니다.
ㄴ선지를 보면 $f(-1)=f'(-1)=0$이므로, $-a+b=0$, $1+a=0$, 즉, $a=b=-1$입니다.

$$\int_0^1 g(x)dx=[h(x)]_0^1=0-(-f(0))=b=-1$$이므로 ㄴ은 맞는선지입니다.

ㄷ선지를 봅시다.

선지를 보면 $f(0)=0$일 때, 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 실근을 하나 이상 가진다고 하였습니다.
사잇값 정리를 생각해보면 0일때와 1일때의 부호가 바뀌면 반드시 하나 이상의 실근을 가진다는 것을 우리는 알고있습니다.
한번 대입해봅시다. $g(0)=f(0)-f'(0)=0-a=-a$
$g(1)=f(1)=1+1+a=a+2$ 이므로, α에 따라서 달라집니다.
즉, 사잇값 정리로 확신할 수 없으므로 ㄷ은 틀린 선지입니다.

라고 하면 낚이신겁니다.

실제로 모두 맞는 선지입니다. 이제 ㄷ선지를 파악하는 방법을 알아봅시다.
힌트는, h(x)에 있습니다. ㄱ에서 $h(x)=(x-1)f(x)$이면, $h'(x)=g(x)$라고 하였습니다.
만약, $f(0)=0$이라면, $h(0)=h(1)=0$이 됩니다. 즉, $h(x)=(x-1)f(x)$에 대하여 열린 구간 $(0,1)$ 사이에서 롤의 정리가 성립합니다. 즉, $h'(x)=0$인 x가 열린 구간 $(0,1)$에서 존재하고 방정식 $g(x)=0$을 만족하는 x 또한 존재하게 되는 것입니다.

즉, 이러한 문항에서 각 선지와의 연관을 잘 살펴보는 것은 정말 중요합니다.
만약, ㄷ선지 하나만 보고 판단한다면 사잇값 정리로 증거가 부족하기 때문에 자칫하다가는 틀린 선지로 생각하기 쉽습니다. 반드시 $h'(x)=g(x)$의 관계를 살펴보시고 롤의 정리 또한 떠올려야 문제를 풀 수 있습니다.

이 문항은 가장 최근의 모의고사의 21번 문항이었습니다.
아마도 ㄱㄴㄷ선지의 연결을 평가원이 특별히 강조한 것이 아닌가 생각이 듭니다.

Q3)

문제 해결 과정을 이해하고 빈 곳에 알맞은 값이나 식을 추론하기

예시 문항

다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$의 치역 A가 $n(A)=4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

(i) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다. 따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(ii) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다. 따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.

(iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 498 ② 502 ③ 506 ④ 510 ⑤ 514

(2019학년도 수능 9월 모의평가 수학 가형 18번)

[이 문항은 주어진 조건을 만족하는 함수의 개수를 구하는 과정을 추론할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 문항을 해결하기 위하여 학생은 원소의 개수가 유한개인 집합을 분할하여 문제를 해결하는 과정에서 빈 곳의 의미를 이해하고 알맞은 수를 구할 수 있어야 한다. 또한 이와 같은 유형의 문제를 해결하기 위해서 학생들은 수학에서 활용되는 다양한 문제 해결 방법을 이해하고 문제 해결 방법에 따른 문제 해결 과정을 완성할 수 있도록 학습할 필요가 있다.]

특히 이러한 확률과 통계 빈칸넣기 문항이 요즘 많이 나옵니다. 이러한 문항에 대한 실력을 조금 더 늘리려면 어떻게 해야할까요? 이러한 유형의 문제는 문제 해결 과정을 이해

하는 것이 핵심입니다. 즉, 밑의 문제해결 과정이 없더라도 문제를 해결할 수 있으면 추론 또한 이해할 수 있게 됩니다.

기출문제를 공부할 때, 먼저 문제해결 과정을 보지 않고 해결하려 해봅시다. 그 후, 문제를 보면서 어떤 내용이 들어갈지 생각해보는 방식으로 실력을 향상시킬 수 있습니다.[6)]

먼저 치역의 원소의 개수가 4개이고, 모든 원소의 합이 홀수인 경우를 생각합시다.
치역에서 홀수인 원소의 개수가 홀수개여야 합니다. 홀수는 3개, 짝수는 2개 있습니다.
홀수인 원소의 개수가 1개, 3개면 되는데, 1개이면 짝수의 개수가 2개이므로 4개가 되지 않습니다.

즉, 홀수 3개, 짝수 1개로 치역이 이루어져 있습니다. 짝수 1개를 고르는 경우의 수는 2개입니다.

이제 치역의 원소의 개수가 4개인 경우를 생각해봅시다.
정의역의 원소가 대응이 되는 Y값의 집합을 치역이라 하기 때문에 대응을 시켜주어야합니다.
치역은 4개이기 때문에, 정의역의 원소 5개 중 2개는 같은 Y값에 대응됩니다.
즉, 이 경우는 ${}_5C_2$입니다. 그 후 2개의 x값과 나머지 3개의 x값을 y값에 대응시키면 치역은 아까 정해졌기 때문에 4!이 나옵니다.

즉 전체의 경우의 수는 2×10×24=480입니다,

이제, 문제의 풀이와 비교해봅시다. 문제의 풀이 중, 정의역의 원소를 4개의 집합으로 분할하는 과정이 있습니다. 제 풀이는 정의역의 원소 5개 중 같은 Y값에 대응하는 X값을 정해주었습니다. 분할의 경우와 뽑는 경우가 같은지 확인해보면, 집합의 분할의 경우, 원소 2개의 경우만 뽑아주면, 나머지 3개는 3개의 부분집합으로 결정되기 때문에 적절합니다.

이런 간단한 문제에서도 문제해결 과정 없이 스스로 문제해결을 하는 연습을 길러야합니다. 그래야 시험장에서는 문제해결 과정을 참고하며 좀 더 수월하게 이해할 수 있을거에요.

---

6) 말이야 쉽지 어렵다는 것을 알고있습니다. 하지만, 평가원의 의도는 이것이 맞습니다. 전체 과정을 이해하고 빈칸에 알맞은 것을 넣을 수 있는가를 묻고있습니다.

Q4).점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x$ $(x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기 순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

(출처 : 2019학년도 수능 수학 가형 20번)

이 문제에서는 개념의 나열만 해드리겠습니다. 한번 보시고 분석해보세요!

어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각각의 수를 그 수열의 **항**이라고 한다. 일반적으로 수열을

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

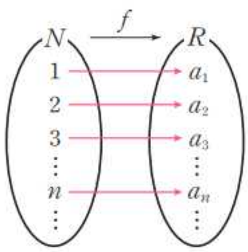
과 같이 나타내고, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다.

(수열은 수의 나열 : 한번 나열해서 값을 구해 규칙을 찾아본다.)

자연수 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$에 수열의 각 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$을 차례로 대응시키면 이 대응은 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수

$$f: N \longrightarrow R,\ f(n)=a_n$$

으로 볼 수 있다. 이때

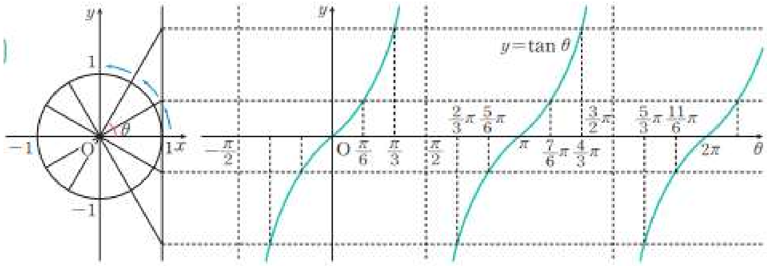


$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ \cdots,\ f(n)=a_n,\ \cdots$$

이다. 따라서 수열의 제n항 a_n이 n에 대한 식 $f(n)$으로 주어지면, n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하여 수열의 각 항을 구할 수 있다.

(수열은 자연수를 정의역으로 하는 함수 : 함수로 접근해서 문제를 해석해본다.)

(출처 : 고등학교 수학 2 교과서)



한편, 각 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)의 동경과 단위원의 교점의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않는다. 따라서 함수 $y=\tan\theta$의 정의역은 $\theta\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이며 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프의 점근선이다. 또한, 함수 $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, π간격으로 함숫값의 변화가 반복되므로 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 성질

① 정의역은 $\theta\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고,
치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프의 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

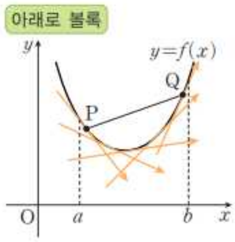
③ 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(주기가 π인 주기함수이므로, 주기만큼 평행이동할 때, y값이 같다.)

구간 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여

(i) 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록 또는 위로 오목하다고 한다. 이때 이 구간에서 $f'(x)$는 증가한다.
한편, $f''(x)>0$이면 $f'(x)$가 증가하므로 $f''(x)>0$이 되는 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하게 된다.



(이계도함수는 도함수의 도함수 : 도함수의 활용에서의 증가, 감소 개념을 이용할 수 있다.)

(출처 : 고등학교 미적분 2 교과서)

사고의 순서를 나열해보면,

⓪ 한번 나열해보자. $\{a_n\}$의 값을 잘 모르겠다. 나열해서 답을 찾을 수가 없네?

① 수열을 함수로 해석할 수 있네!
② 탄젠트는 주기함수니까 주기만큼 평행이동해서 그래프가 겹치겠네?
③ 4개의 주기에 걸쳐서 a_n이 존재하는 경우를 본적이 없으니까, 주기 이용해서 평행이동하자.
④ 과연 $a_{n+1}+a_{n+2}>a_n+a_{n+3}$ 이라는 식을 그대로 써서 파악할 수 있을까?
⑤$a_{n+1}-a_n>a_{n+3}-a_{n+2}$로 표현하면 x값의 변화량이네? $\tan a_n = a_n+\frac{\pi}{2}$를 만족하므로 함숫값의 변화량일 수도 있겠네?[7)]
⑥ 평균값의 정리와 이계도함수의 개념을 이용해서 두 점 사이 기울기를 비교하는 부등식을 만들어보자.

의 순서로 진행됩니다.

특히 이 문항은 탄젠트 함수의 분석이 필요함을 언제부터 느끼는지에 관건이 있습니다.
그렇다해도 먼저 나열이 우선입니다.
나열을 해도 $\{a_n\}$의 규칙을 찾지 못하기 때문에 함수로 접근하게 되는 것일 뿐입니다.

이렇게, 추론의 문항은 참, 거짓을 판단하고 조건을 최대한 활용해서 문제를 풀어야합니다.
우리가 모르고 있는 형태를 최대한 아는 형태로 바꾸고, 기존의 개념을 최대한 활용하는 것이 문제풀이의 핵심이 됩니다.

정리하자면,
① 제발 ㄱㄴㄷ 문제는 각 선지의 내용을 파악하고 다음 선지에 활용하자.
② 빈칸 넣기 문제의 경우, 문제 상황의 해법을 제시한 풀이를 보지않고 떠올려보자.
③ 수열은 나열, 삼각함수는 주기성.. 등의 개념들의 특징을 정리하고 활용하자.

---

7) 사실 조금 더 첨언해보자면, 이 문항은 동일 년도 시행된 9월 평가원 20번을 충실하게 공부했어야 쉽게 풀리는 문제였습니다. 그때도 기울기 분석을 하는 것이 핵심이었고, 지금의 문제상황도 $a_{n+1}-a_n>a_{n+3}-a_{n+2}$이 x의 변화량 혹은 y의 변화량, 둘다 될 수 있다는 점에서 기울기의 의심을 했어야합니다. 생각해보면, 이렇게 기출문제와의 연결 또한 ㄱㄴㄷ선지 연결하는 것 만큼 중요한 것 같습니다.

4. 문제해결 능력

Q1)

문제 상황을 분석하여 관련된 모든 수학적 개념 · 원리 · 법칙을 찾아보고, 그것의 의미와 관련 성질을 확인하고 종합적으로 적용하여 문제 해결하기

예시 문항

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}\left(3, \frac{1}{2}, 2\right)$와 평면 $z=1$ 위의 세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$이

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \frac{11}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = -\frac{7}{4}$$

을 만족시킨다. 점 $(0, k, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1, -6, 0)$인 직선을 l이라 하고, 직선 l에 의해 나누어지는 xy평면의 두 영역을 각각 α, β라 하자.
세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$에서 xy평면에 내린 수선의 발이 모두 α에만 포함되거나 모두 β에만 포함되도록 하는 양의 정수 k의 최솟값을 m, 음의 정수 k의 최댓값을 M이라 할 때, $m-M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

(2019학년도 수능 9월 모의평가 수학 가형 29번)

[이 문항은 벡터의 내적으로 표현된 조건을 이해하고 주어진 조건을 만족하는 상수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 평가하는 문항이다. 이 문항을 해결하기 위하여 학생은 벡터의 내적이 방향벡터, 직선의 방정식, 수선의 발과 같은 다양한 수학적 개념·원리·법칙과 연계되어 있음을 파악하고, 이로부터 얻은 조건들을 종합할 수 있어야 한다. 또한 이와 같은 유형의 문제를 해결하기 위해서 학생들은 관련된 여러 가지 수학 개념·원리·법칙을 복합적으로 활용하여 문제 상황을 분석하고, 다양한 조건을 찾아 이를 종합하여 문제를 해결할 수 있도록 학습할 필요가 있다.]

이러한 문제를 분석할 때, 우리는 어떤 개념을 어떤 순서로 적용할지에 대해 생각해야합니다.

문제의 모범답안의 순서는 반드시 존재합니다. 이 또한 그 이유가 존재합니다.

간혹 여러분은 문제풀이의 순서나 원칙이 없이 마구잡이로 푸는 경향이 있습니다.

그 경우, 운이 좋으면 쉽게 풀리고 잘 풀리겠지만, 항상 잘 풀리는 것은 아닐 것입니다.

문제풀이의 순서또한 왜 그러한 순서로 풀어야하는지 자문하셔야합니다.

항상 1등급, 혹은 100점을 맞는 학생은 이러한 훈련이 굉장히 잘 되어있는 경우가 많아요.

이 문항의 경우, 위치벡터를 이용해 벡터를 표현할 수 있음을 여러분께서는 아실 것입니다. 위치벡터는 원점을 시점으로 고정시킨 벡터로써, 위 문제의 내적은 모두 원점이 시점인 벡터를 대상으로 하고있습니다. 종점의 좌표 하나만으로 벡터를 결정할 수 있음을 교과서에서 배운 적이 있으실거에요. 내적해보도록 합시다.

Z성분은 항상 1이므로 $\mathrm{P}_1(a_1,b_1,1)$, $\mathrm{P}_2(a_2,b_2,1)$, $\mathrm{P}_3(a_3,b_3,1)$로 좌표를 잡고 내적해보면,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (3,\frac{1}{2},2) \bullet (a_1,b_1,1) = 3a_1 + \frac{1}{2}b_1 + 2 = \frac{11}{3}$, $\therefore 3a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{5}{3}$

입니다. 마찬가지로 내적을 진행해보면,

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = (3,\frac{1}{2},2) \bullet (a_2,b_2,1) = 3a_2 + \frac{1}{2}b_2 + 2 = 1$, $\therefore 3a_2 + \frac{1}{2}b_2 = -1$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = (3,\frac{1}{2},2) \bullet (a_3,b_3,1) = 3a_3 + \frac{1}{2}b_3 + 2 = -\frac{7}{4}$, $\therefore 3a_3 + \frac{1}{2}b_3 = -\frac{15}{4}$

보통의 문제풀이의 경우, 직선의 방향벡터가 $(1,-6,0)$인 것을 포착합니다.
잘 모르겠지만, x값과 y값의 계수의 비가 6:1인 것도 보입니다.

그렇다면, 직선의 방정식을 한번 세워보고 그것과 내적 값의 결과를 비교해볼 수 있을까요? 잘 모르겠지만 한번 해보도록 합시다.

$\frac{x}{1} = \frac{y-k}{-6}, z=0$ 이라는 직선이 나옵니다. 정리하면 $6x+y=k$인 xy평면 위의 직선입니다.

내적의 결과를 보면, $3a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{5}{3}$, $3a_2 + \frac{1}{2}b_2 = -1$, $3a_3 + \frac{1}{2}b_3 = -\frac{15}{4}$이며,

이 식들을 두배하면 $6a_1 + b_1 = \frac{10}{3}$, $6a_2 + b_2 = -2$, $6a_3 + b_3 = -\frac{15}{2}$입니다.

각각, $k = \frac{10}{3}$, $k=-2$, $k=-\frac{15}{2}$일 때 정사영이 직선 $6x+y=k$위에 위치하게됩니다.

양의 정수의 최솟값은 4이며, 음의 정수의 최댓값은 -8이므로 답은 12가 됩니다.

사실 이 문제의 해법은 너무나도 간단합니다. 문제의 상황을 이해한 후, 공통점을 포착해

서 밀고 나가는 것입니다. 이 문제를 풀지 못하는 가장 큰 이유는 문제의 상황을 제대로 수식으로 나타내지 못하는 것, 문제의 길이에 쫄아버리는 것을 들 수 있습니다. 아는 것을 차근차근 정리해서 써내려가면 잘 모르겠지만 무언가의 방향이 보일 것입니다.

이번에는 문제가 원하는 순서에 대해 조금 더 파악해보겠습니다.

Q2)좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left\lvert \overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}} \right\rvert = \left\lvert \overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}} \right\rvert = 2$
(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_k} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}} \right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi \ (k=1,\ 2,\ 3)$

$\left\lvert \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \right\rvert$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

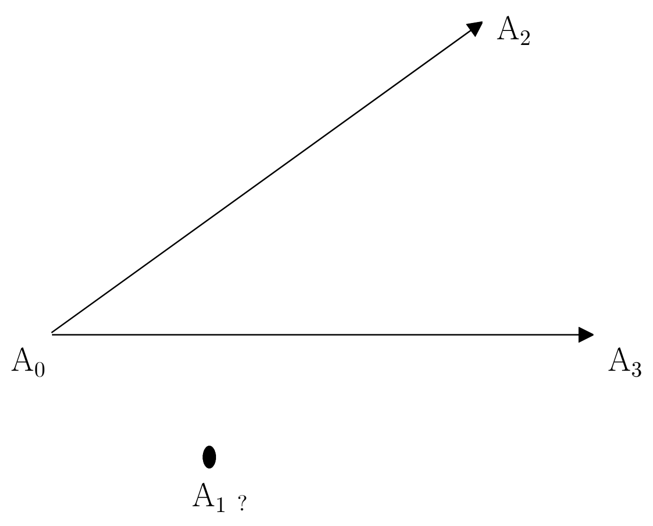
(출처 : 2013학년도 9월 평가원 수학 가형 29번)

이 문제를 분석할 때 맨 처음 대입할 K의 값은 무엇이겠습니까?
당연하게도 k=3일겁니다. (나)에서 제일 많이 주어진 조건이니까요.
대입을 통하여 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$의 길이또한 파악할 수 있으며, $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$과 다른 벡터와의 관계도 알 수 있습니다.

그렇다면, 그림을 그릴 때 어떤 벡터를 제일 처음 그려야할까요?
당연하게도 $\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}$ 벡터여야합니다. 그것을 기준으로 정보가 주어졌으니까요.

그림을 그릴 때 이 벡터를 제일 잘 보이게 표현해야합니다.

x축과 평행하게 그리면 좋겠습니다.



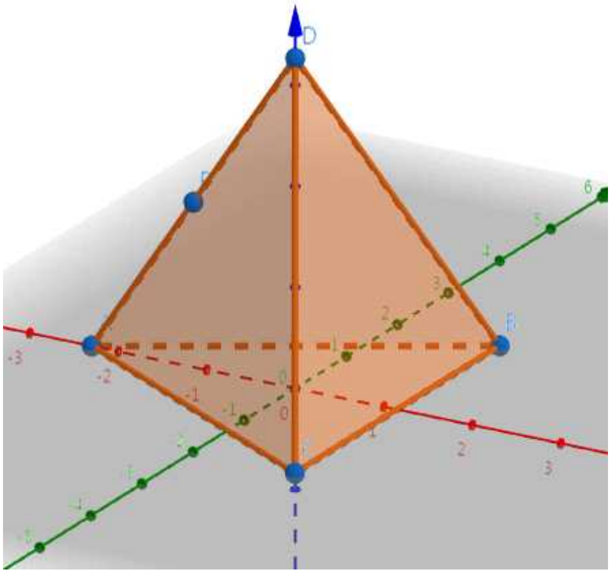
이런 식으로, 문제풀이에는 문제가 제시하는 순서가 존재할 수 있습니다.
문제를 분석할 때, 그 순서를 고려하고 있는지를 점검해보세요.
가장 중요한 것은, 순서가 있다면 그 이유 또한 고려하고 있는가 생각해보는 것입니다.

Q3) 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)
(출처 : 2017학년도 수능 수학 가형 29번)
이 문제는 좌표를 잡는 문제입니다. 정사면체 ABCD에서 AD의 중점은 P로 정해져있으나, Q는 BCD위의 점이며, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직이 되게 하는 점입니다.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 정해져있는 벡터입니다. Q는 계속 움직이는 점이므로, 우리는 점 Q가 어디에 있을지를 상상해야합니다. 과연 Q의 자취는 무엇일까요? 지금 상황에서는 삼각형 BCD위의 점인 것 외에는 알 수 없습니다.

정의에 따르면 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$는 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 수직입니다. 점 O를 지나고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 수직이라면 우리는 평면의 방정식을 정의할 수 있으며, 그 위에 Q가 있으리라 짐작할 수 있습니다. 평면 BCD와 이루는 도형은 반드시 교선, 즉 선분이 될 수 밖에 없겠습니다. 평면의 방정식을 정의할 때의 아이디어를 통해서 Q가 두 평면의 교선 위에 있음을 파악할 수 있었으며, 이제 평면의 방정식을 구하기 위해 좌표를 잡아야합니다.

이제보면, 보통 무게중심은 G로 놓게 되는데, 굳이 O로 표현한 이유 또한 생각할 수 있습니다. O가 원점인 좌표를 놓으라는 의도가 되겠지요. 또한 정사면체는 좌표를 잡는 것이 가능한 기본적인 공간도형입니다. 이렇게, 문제풀이의 첫 아이디어 또한 개념을 떠올리면 알 수 있는 힌트가 주어지는 경우가 있습니다.

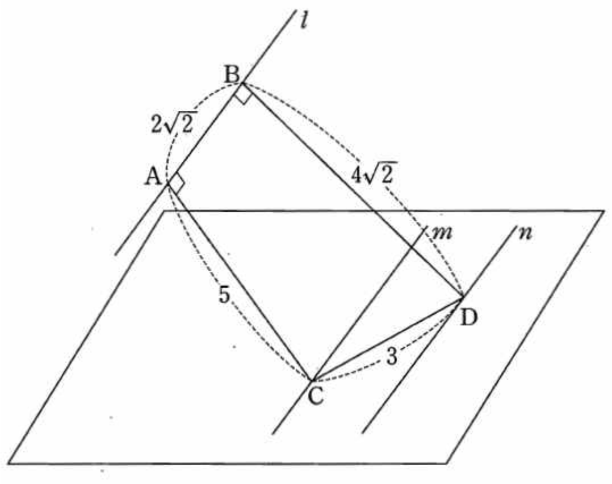
우리는 이제 Q점이 O를 지나며 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 법선벡터로 하는 평면과 BCD와의 교선 위에 있다는 사실을 알고있습니다. 그렇다면, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 최대한 간단하게 형성되고, BCD의 평면의 방정식도 최대한 간단하게 표현하는 것이 좋겠습니다. O를 원점으로 잡는 것은 물론이며, A좌표와 D좌표는 x 혹은 y좌표의 성분이 0일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 가장 간단하게 나옵니다. 또한, 그 경우에는 BC 선분도 축과 평행하게 배열되므로, 가장 간단하게 평면을 나타낼 수 있습니다.



그렇게 할 때 그림은 위와 같이 그려지게 됩니다. 이렇게 그리는 것은 너무나 당연합니다. 구하는 것에 초점을 맞추고, 제일 잘, 쉽게 보이도록 해준 것 뿐입니다.

Q4)[8] 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다.
직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를

θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

(출처 : 2011학년도 수능 수학 가형 25번)

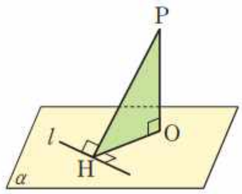
이면각의 정의에 의해, 두 평면이 이루는 교선은 직선 CD입니다.
이제, CD에 대해 삼수선의 정리를 이용해서 이면각을 구하면 되겠지만 아무런 조건이 없습니다..

또한, A와 B에 바로 평면에 수선의 발을 내려도 아무런 효과가 없습니다.
$\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$ 이므로, m, n을 포함하는 평면과는 관련이 없는 조건입니다!
삼수선의 정리에서 평면에 수선의 발을 내려야하는데, l을 포함하는 평면이 안보이기도 하구요.

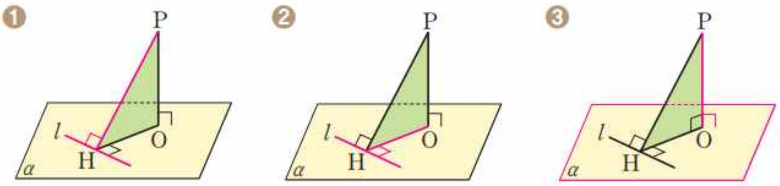
8) 이 문항은 그림을 그리기 너무 어려워서..ㅠㅠ 한번 그려보시면서 풀어보시길 바랍니다.

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l, 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 점 O에 대하여 다음이 성립한다.

이것을 **삼수선의 정리**라고 한다.



삼수선의 정리



❶ $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$

❷ $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$이면 $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

❸ $\overline{\mathrm{PH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$이면 $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

이 때, 우리가 먼저 보아야할 것은, 서로 평행한 세 직선 l, m, n이라는 조건입니다!

<u>**평행하므로, 엇각과 동위각이 같습니다!**</u>

$\overline{\mathrm{AC}}\perp m$ 입니다. l, m은 <u>평행하기 때문</u>입니다.

$\overline{\mathrm{BD}}\perp n$ 입니다. l, n은<u> 평행하기 때문</u>입니다.

이제, A와 B에서 m, n을 포함하는 평면에 수선의 발을 내릴 수 있습니다.

그것을 A'와 B'라 하면, $\overline{\mathrm{AA'}}$와 $\overline{\mathrm{BB'}}$는 각각 m과 n에 수직이므로,

m에 수직인 두 직선 AC와 $\mathrm{AA'}$는 A라는 점에서 만나므로, **만나는 두 직선은 평면**을 이루며

그 평면위에 있는 **직선 $\mathrm{A'C}$는 m에 수직**이며, 또한 n에도 수직입니다. 평행하니까요.

n에 수직인 두 직선 BD와 $\mathrm{BB'}$는 B라는 점에서 만나므로, **만나는 두 직선은 평면**을 이루며

그 평면위에 있는 **직선 $\mathrm{B'D}$는 n에 수직**이며, 또한 m에도 수직입니다. 평행하니까요.

m, n에 수직이라는 사실 없이는, 삼수선의 정리를 쓰기가 너무나도 애매합니다.

l은 구하는 평면과 관계도 없기도 하구요.

그러므로, 먼저 해야 할 것은 조건을 잘 보고 평행선과 엇각을 잘 파악하는 것입니다.

m, n에 대한 정보는 구하는 것에도 맞고, 삼수선의 정리도 쓸 수 있겠지요!

Q5)이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 k $(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$이다.

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다.

k의 값을 구하시오.

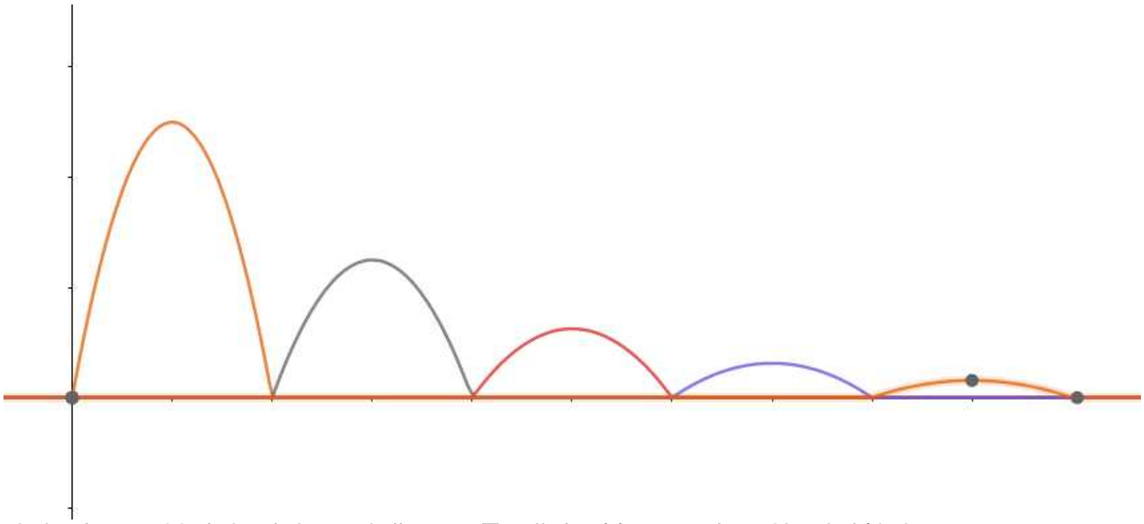
(출처 : 2018학년도 수능 수학 나형 30번)

이 문제의 처음 아이디어를 간단하게 말씀드리겠습니다.

이 문제가 불편한 이유는 (나)의 식 때문입니다. $f(x)-x$가 n만큼 평행이동한 건 알겠는데 거기에 $\dfrac{1}{2}$씩 곱해지고 또 x가 더해지네요? $0 \le x < 1$ 구간에는 $g(x)=f(x)$입니다.

한번 x를 좌변으로 넘기고 $g(x)-x$를 이용해서 문제를 풀어볼까?

라는 생각이 들고 실제로 그렇게 풀면 성공입니다. 물론 아직까지 확신이 들지는 않습니다.



이런 식으로 형성이 됩니다. 이제 h(x)를 생각해봅시다. 식도 참 이상합니다.

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$인데, 잘 감이 잡히지 않습니다. 그래프 그린 것은 $g(x)-x$이므로 h(x)에서도 x를 빼볼까 하는 생각을 해볼 수 있습니다.

$h(x)-x=\begin{cases} g(x)-x \ (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ x-g(x) \ (5 \le x < k) \end{cases}$이므로, 굉장한 발견을 하였습니다!

$g(x)-x$와 $x-g(x)$의 관계는 x축 대칭입니다. x축 대칭한 함수를 그려나가면 됩니다!

나중에 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$임을 적용할 때도 마찬가지입니다. $y=x$그래프의 0부터 n까지의 적분값은 $\frac{n^2}{2}$이며, $2a_n$은 $h(x)-x$를 0부터 n까지 적분한 값에서 n^2을 더해준 값입니다. 그런데 문제에서는 다시 n^2을 빼주므로, $h(x)-x$를 0부터 n까지 적분한 값의 두배가 $\frac{241}{768}$이라는 말입니다. 즉, 여러분이 x를 좌변으로 이항할 수 있다면, 이 문제의 확신은 문제를 풀어가면서 반드시 생길 수 밖에 없도록 되어있습니다.

이후의 계산은 등비수열의 합과 등비급수의 개념을 이용해서 해결하시면 되겠습니다.

이렇게 보면, 문제풀이의 순서가 확실히 있어보이지요?
만약 이 문제를 못풀었거나 헷갈렸다면, 처음 아이디어에 대한 답을 반드시 하세요.
이 문항에서는 식 자체의 모양을 맞춰줄 필요가 있었던 문항입니다.

이번 능력의 정리는 굉장히 간단합니다.

문제풀이의 순서가 있을 수 있다는 사실을 기억하세요.

순서가 있다면, 그러한 순서로 풀어야할 이유도 있습니다.
문제풀이 순서를 외우는 것이 중요한 게 아닙니다.
왜 그런지 아는 것이 가장 중요한 것이에요.

왜 이 순서대로 풀어야하지? 에 대한 질문도 같이 병행하세요.
왜 이렇게 풀어야하지? 라는 질문만 해왔다면
순서에 대한 고려도 한번 해보시는게 맞습니다.

5. 정리

여러분이 문제를 풀 때, 맨 처음 무엇을 건드릴지, 그리고 그 다음에는 어떻게 생각할지에 관해 나름대로의 기준을 정해야합니다. 이를 위해서는 개념이 왜, 어떻게 쓰이는지에 대해서는 확실하게 하셔야합니다. 또한 문제풀이 안에서도 왜 이런 순서로 문제를 풀어야할까에 대한 답을 계속 고민하셔야합니다.

결과적으로, 왜? 라는 질문은 계속, 끊임없이 하셔야합니다.[9] 그에 대한 답을 명확하게 낼 수 있을 때에야 비로소 고정 1등급, 혹은 100점의 점수가 나오는 것 같습니다.

이러한 사항들은 행동영역이라는 특별한 언어에서 비롯한 것이 아닙니다.
당연하게도 수학은 생각하는 과목이기 때문입니다.
생각과 고민은 질문에서 나오기 때문입니다.

즉, 여러분이 행동영역에 관해 심각하게 받아들이면서, 정작 질문을 하지 않는다면
그것은 굉장히 본질에 어긋난 공부라는 생각을 하고있습니다.

아주 간단한 이야기겠지만, 질문하십시오. 그리고 계속 그에 대한 답을 알아가십시오.
그것이 여러분의 실력을 향상시킬 수 있는 유일한 방법입니다.

누군가가 자주 말하곤 하겠지만, 수학적인 센스라고 표현하는 것들 또한 모두 질문하세요.
누군가에게는 감각일 수 있겠으나, 이 또한 이유를 찾고 답하는 과정으로 늘 수 있습니다.

9) 사실 이 문장이 핵심입니다. 거의 모든 공부에 있어서 이 문장만큼 적절한 것을 찾지 못하겠습니다.