

매개변수

매개변수란 무엇인가? 매개변수는 '수단'이지, '목적'이 아니다. 예를 들어보자. 어떤 커플이 생성될 때, 그 둘을 중재해 주는 중재자가 있을 것이다. 이 때, 중재자는 커플이 형성된 후에는 바로 잊혀질 것이다. 즉, 중재자는 커플의 형성에 필요한 '수단'으로 이용된 것이지, '목적'으로 이용된 것이 아니다.

즉, 매개변수에 너무 집중하다 보면 실제 중요한 것에 focus를 놓칠 수 있으므로, 항상 'focus'를 생각하면서 문제를 해결하는 것이 좋다.

'매개변수'의 활용

A) 치환적분.

치환적분은 적분을 상대적으로 쉽게 하기 위해서 도입된 기법이다. 이를 간단하게 증명해보자.

$\int f(x)dx \rightarrow x=g(t)$ 로 치환하면, 적분 식은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \rightarrow \int f(x)dx = \int f(g(t))dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

이는 합성함수의 미분법을 적분형으로 표현한 것으로도 볼 수 있다. 치환적분의 경우, '매개변수'를 정말 잘 잡는 것이 매우 중요하다. '치환'이라는 행위 자체가 '매개변수'를 설정하는 것이다.

치환적분의 테크닉에는 여러 가지 방법들이 있는데, 그 중 유명한 몇 가지를 설명해 보고자 한다.

1) 삼각치환

$x = \sin\theta$ 또는, $x = \cos\theta$ 또는 $x = \tan\theta$ 로 치환하는 방식이다. 수학의 정석(실력편)에서 주로 다루는 테크닉이다. 일반적으로, 삼각치환은 다음 꼴이 나타나는 적분식에서 자주 쓰인다.

i) $1-x^2 \rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 의 성질에서 이용되는 방식. $x = \sin\theta$ 또는, $x = \cos\theta$ 로 치환을 시켜보면 좋다.

ii) $1+x^2 \rightarrow 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ 의 성질에서 이용되는 방식. $x = \tan\theta$ 로 치환을 시켜보면 좋다.

EX1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ 를 구하시오.

EX2) $\int_0^3 \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$ 를 구하시오.

2) 반각치환

삼각치환의 응용버전이다. $\tan \frac{x}{2} = t$ 로 치환하는 기법이다. 본 기법은 위와 다르게, 삼각함수로 표현된 적분식을 다항식으로 표현된 적분식으로 고치는 방식이다.

이 때, 이를 이용하면, 아래와 같은 변환식이 나온다.

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

이를 이용하면 의외로 쉽게 적분을 할 수가 있다.

EX) $\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2+\cos x} dx$ 를 구하시오.

3) Hyperbolic 함수 치환.

Hyperbole은 한국어로 쌍곡선이다. 즉, 쌍곡함수로 치환할 수도 있다는 것이다. 쌍곡함수는 무엇인가? 아래와 같이 쌍곡함수(hyperbolic function)을 정의한다.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

각각을 hyperbolic sin, hyperbolic cos, hyperbolic tan라고 부른다.

이 때, 세 함수는 다음과 같은 관계에 놓여있다. $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ (이 관계 때문에 hyperbolic이라는 이름이 붙게 된다. 이 때, Euler 공식($e^{ix} = \cos x + i \sin x$)을 이용하면, 삼각함수가 hyperbolic 함수와 매우 유사한 형태로 표현될 수 있다는 점을 알 수 있다, 그래서 이 함수는 유사 삼각함수라는 명칭이 따라 붙게 된다. 자세한 내용을 알고 싶으면 나에게 문의를 해라.(안할 거 안다.))

이를 이용해서 치환을 해볼 수도 있다.

i) $1+x^2 \rightarrow x = \sinh(t)$ 로 치환을 시켜보면 좋다.

ii) $x^2-1 \rightarrow x = \cosh(t)$ 로 치환을 시켜보면 좋다.

삼각치환이랑 겹치는 상황이라고 볼 수 있다. 그래서, 두 개를 적절히 잘 사용해 보아야 한다.

EX) $\int_0^3 \sqrt{x^2+1} dx$ 를 구하시오. (삼각치환이랑 비교해보기)

4) 역함수 관계

이것에 많은 비밀들이 숨겨져 있다. 지금까지 어려운 치환적분 문제의 경우 '치환'의 대상에서 어려움을 겪었다는 점을 알 수 있다. 이 때, 가끔씩 치환을 하다보면, 이상한 형태의 식을 치환하면 신기하게도 식이 깔끔해지는 괴기한 현상을 목격할 수 있다. 그런 문제들의 대부분은 역함수 치환과 깊은 관련성을 갖고 있다.

이에 대해서 자세히 탐구해보도록 하자. (f, g 는 서로 역함수 관계에 있는 함수이다.)

i) $\int g(x)dx$ 에서 $x=f(t)$ 로 치환하면 $\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt = \int tf'(t)dt$ 가 된다.

ii) $\int g'(x)dx$ 에서 $x=f(t)$ 로 치환하면 $\int \frac{1}{g'(x)}dx = \int \frac{1}{g'(f(t))}f'(t)dt = \int (f'(t))^2 dt$ 이다.

두가지 관계로부터 수많은 치환적분 식들을 합리적으로 설명해 볼 수 있다. 아래의 예시들은 우리를 수없이 괴롭혔던 실력정석 연습문제들이다.

들어가기 전에 삼각함수의 역함수에 대해 잠시 탐구해보고 가자. 삼각함수의 역함수는 arc를 붙여서 arc삼각함수라고 부른다. (역삼각함수) 삼각함수의 경우 모든 구간에서 증가함수가 아니기 때문에 통상적으로는 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 정의

를 한다. 이 때, 역삼각함수 자체값은 고등과정으로는 구하기 쉽지 않을뿐더러 구할 의미조차 없다. 그러나, 역삼각함수의 도함수는 의외로 단순한 모형이다. 이는 실력정석 미적분2 연습문제에도 소개되어 있다. 증명과정은 정석을 참조하면 되므로 여기에는 결과값만을 적어두겠다.

(1) $y = \sin^{-1}x$ 의 도함수는 $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

(2) $y = \cos^{-1}x$ 의 도함수는 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 이다.

(3) $y = \tan^{-1}x$ 의 도함수는 $y' = \frac{1}{1+x^2}$ 이다.

이를 이용하면 삼각치환의 원리를 매우 간단하게 설명해 볼 수 있다.

EX1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ 를 구하시오.

EX2) $\int_0^3 \frac{1}{(x^2+9)^2} dx$ 를 구하시오.

위 두문제는 각각 사례 ii, 사례 i 에 해당되는 것들이다. 자세한 설명은 생략하겠다.

Hyperbolic 치환또한 역함수 관계를 이용한 치환이다. 이 경우는 hyperbolic함수의 특성($\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$)을 이용하는 방식처럼 보일 수도 있는데, 역함수 치환과 큰 관련이 있다. 아래는 hyperbolic함수의 역함수를 정리해 둔 것이다.

① $y = \sinh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (단, $-\infty < x < \infty$)

② $y = \cosh^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ (단, $x \geq 1$)

③ $y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (단, $-1 < x < 1$)

EX3) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 에서 $\sinh\theta$ 로 치환하여 부정적분 값을 구해보시오.

EX4) $\int_0^3 \sqrt{x^2+1} dx$ 를 구하시오.

위 두문제는 각각 i 이랑 ii 에 속하는 문제들이다. 이유는 알아서 생각해 보아라. 어렵지 아니하게 발견할 수 있을 것이다. (각각의 역함수를 미분해 보아라. 예쁜 식이 튀어나올 것이다.)

이 정도의 논의를 마치면, 이제 조금 더 어려운 적분에 대해서 탐구해 볼 수 있다.

아래 두 문제는 실력정석 연습문제19-5에서 따온 것이다. 이 문제는 최상위권 학생들도 제대로 풀지 못하여 찢찢매는 문제들이다. 그런데, 위의 논의를 이용하면 굉장히 쉽게 문제를 풀 수 있다.

$$\text{EX5)} \int \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$$

$$\text{EX6)} \int \sqrt{x+\sqrt{x^2+3}} dx$$

굉장히 어려운 문제들이다. 그런데, 위의 논의를 거친 자들은 의외로 문제를 쉽게 풀 수 있다.

EX5)의 문제의 경우 원함수를 잘 살펴보자. 원함수는 정의역이 양수인 실수이며 증가함수이다. 즉, 이 함수는 역함수를 가진다. 이 때, $g(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ 라고 생각하면, $f(x) = (1-x^2)^2$ 이다. 그러면, $\int g(x)dx$ 에서 $x=f(t)$ 로 치환하면 $\int g(x)dx = \int g(f(t))f'(t)dt = \int tf'(t)dt$ 가 된다. 다항식의 적분은 매우 쉬우므로 이 쪽에서 풀이는 그만 적어도 될 듯 하다. 원함수의 역함수의 종류가 아름다운(?) 다항식이었기에 가능했던 문제이다. 이 문제를 통해, 특정함수의 적분이 잘 안될 경우 그 원함수의 역함수 유무를 따져본 다음 역함수를 구해보아 그 형태를 관찰해보는 방식도 괜찮을 듯 하다. 다만, 무조건 원함수만을 고집할 이유는 없다. 이에 대해서는 EX6에서 다루어 볼 것이다.

$\int \sqrt{x+\sqrt{x^2+3}} dx$ 에서 원함수는 $\sqrt{x+\sqrt{x^2+3}}$ 이다. 이 원함수 또한 증가함수이므로(미분해보면 안다..) 역함수가 존재할 것이다. 그런데, 그 형태가 그렇게 예쁘지는 않다는 점을 쉽게 알 수 있다. 이럴 땐, 원함수를 이루고 있는 것을 살펴보자. $x+\sqrt{x^2+3}$ 을 살펴보면, 이것의 역함수는 꽤나 예쁜 모양으로 나온다는 점을 알 수 있다.

($y = \frac{x^2-3}{2x}$) 이를 조금 분석적으로 접근해보면, $\int \sqrt{g(x)} dx$ 에서 $x=f(t)$ 로 치환해보면, $\int \sqrt{t} f'(t)dt$ 가 나온다는 점을 알 수 있다. 이 또한 다항함수 형태임을 알 수 있고 더 이상의 설명은 생략하겠다.

여기서, 다르게 치환하는 방법도 있다. $y = \ln \frac{1}{\sqrt{3}}(x+\sqrt{x^2+3})$ 은 $\sqrt{3} \sinh x$ 의 역함수이다. 이를 분석적으로 접근해보면, $\int \sqrt{3} e^{g(x)} dx$ 를 풀어야 한다고 생각하면 된다. $x=f(t)$ 로 치환해보면, $\int \sqrt{3} e^t f'(t)dt$ 로 고쳐 쓸 수 있다. 이 때 $f'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(e^t + e^{-t})$ 이므로 이 또한 적분은 깔끔하게 된다.

위에서 논의했듯이 상당한 부분의 치환적분은 역함수의 관계로부터 나오는 것이다. 어려운 부정적분 문제의 경우 원함수 또는 원함수의 일부의 역함수를 면밀하게 탐구해 볼 필요성이 있다.

반각치환의 경우는 너무 설명이 길어지므로 생략하겠다. 궁금하면 개별적으로 google을 검색해 보면 될 것이다.

B) 평면운동

평면운동을 분석할 때에 일반적으로 매개변수를 적용한다. 평면운동은 2차원 운동이기에, 변수가 2개 (x,y)가 생겨난다. 즉, x, y를 매개해주는 특정한 매개변수가 필요하다는 점을 시사해준다. 매개변수와 관련되어 수능에 출제될 때, 가장 출제될 확률이 높은 단원으로, 실제로 2016년 시행된 6월 모의평가 29번에 킬러문항으로 등장한 바 있다. 이런 점을 비추어 볼 때, 본 파트는 유심히 봐야 할 필요성이 충분히 느껴진다.

다음은 평면운동과 관련된 몇 가지의 식이다.

1차원에서의 운동(변위 graph를 f 라고 하면)

$$\text{속도 } v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \Rightarrow \text{속력 } |v| = |f'(t)|$$

속도를 미분하여 가속도를 구함

$$\text{가속도 } a = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t) \Rightarrow \text{가속도의 크기 } |a| = |f''(t)|$$

2차원에서의 운동(변위를 (f,g) 라고 하면)

$$x\text{방향의 속도 } v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

$$y\text{방향의 속도 } v_y = \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

$$P\text{의 속도} \Rightarrow \vec{v} = (v_x, v_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (f'(t), g'(t))$$

$$P\text{의 속력} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$$

앞에서 구한 P 의 속도 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (f'(t), g'(t))$ 를 미분하여
가속도를 구하게 됩니다.

$$P\text{의 가속도: } \vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) = (f''(t), g''(t))$$

$$P\text{의 가속도 크기: } |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{(f''(t))^2 + (g''(t))^2}$$

이 때, 이동거리는 속력을 시간에 대해 적분한 것이므로, 곡선의 길이(이동거리)는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$\int |\vec{v}| dt = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

이는 구분구적법으로도 증명 가능하다. 그것은 뒤의 문제에서 다루어 보겠다.

C) 3차원 입체의 체적

구분구적으로 부피를 구하는 경우에도 매개변수의 역할은 매우 중요하다. 3차원 입체의 경우 변수가 세 개 (x,y,z) 가 있는데, 이를 매개변수 하나를 기준으로 엮어버리면 상대적으로 문제를 풀기 쉬워지기 때문이다. 그러한 이유에서 구분구적법을 이용한 문제를 풀 때에 '조각'을 설정하는 작업에서 매개변수의 역할은 정말 중요해진다. 매개변수를 어떻게 잡느냐에 따라 조각의 모양과 형태가 달라지고, 그것은 대체로 문제를 해결할 수 있는지에 대한 여부를 결정하기 때문이다. 입체를 들어가기 전 2차원 '넓이'에 대해 먼저 탐구해 봄으로써 매개변수와 조각에 대한 감각을 증진시켜보도록 하자. 조각을 자를 때에는 매개변수를 설정하는 것이 일반적인 방법이다.

EX1) 반지름이 1인 원 위에 동일한 간격의 $2n$ 개의 점 $P_0, P_1, \dots, P_{2n-1}$ 을 택하고, $P_{2n} = P_0$ 로 간주한다. $k=1, 2, \dots, 2n$ 에 대해 선분 P_0P_{k-1} 과 선분 P_0P_k 그리고 $\widehat{P_{k-1}P_k}$ 로 둘러싸인 영역으로 원을 나누는 방법을 이용하여 원의 넓이를 구하시오. (단, 부채꼴의 넓이 공식은 이용하지 말 것)

EX2) 중심각이 θ 이고 반지름이 1인 부채꼴 OAB가 주어져 있고, 호 \widehat{AB} 와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. 호 \widehat{AB} 의 중점을 M이라 하고, 삼각형 ABM의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $T(\theta)$ 를 θ 에 대한 식으로 표현하고, $S(\theta)$ 를 θ 에 대한 함수의 무한급수 형태로 표현하시오. 그리고 이를 이용하여 극한 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ 의 값을 구하시오.

EX3) 도전문제: 매개변수 θ 로 나타낸 곡선 C가 다음과 같이 주어져있다.

$$C: \left(\left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 - \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right)$$

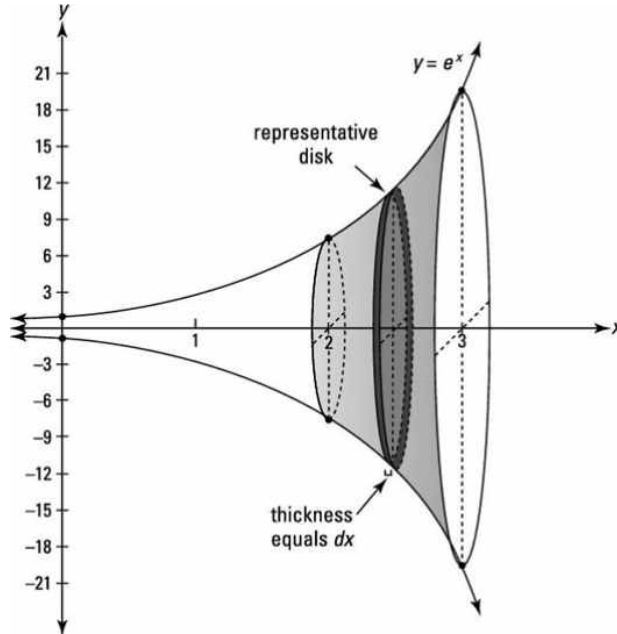
$0 \leq \theta \leq \pi$ 일 때, 곡선 C와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. (2013 성균관대학교 수시)

이제 2차원에서의 훈련은 끝났고, 그 감각을 이용해서 3차원에서의 문제를 해결해 보도록 하자.

여러 입체 중 가장 simple한 입체는 회전체이다. 회전체는 axis에 대해서 회전대칭성을 띄기 때문에 상대적으로 부피를 구하기가 쉽다. 회전체의 부피를 구하는 두가지 방법을 살펴보겠다.

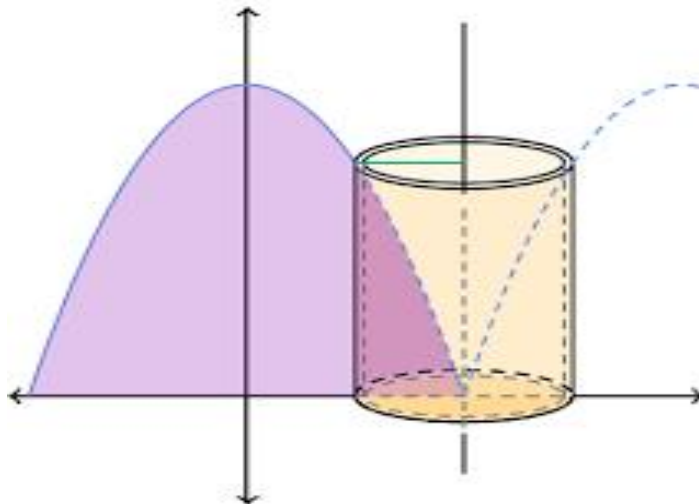
method1) disk method

고등학교 교육과정에서 주로 다루고 있는 방식이다. 아래 그림을 참조해보자.



고등학교에서 배우는 회전체 공식은 disk method에서 기인한 것이다. 어려운 내용은 아니므로 자세한 설명은 생략하겠다.

method2) shell method



shell method는 다소 생소한 기법이다. 직사각형 조각을 긴 변에 대해서 회전시킨 것이다. Shell method로부터 파푸스-굴딘 정리가 유도된다. 증명과정은 문제로 남겨두겠다.

EX1) 좌표공간에 세 점 $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(0,1,1)$ 이 주어져 있고, 세 점 A,B,C 를 포함하는 평면에서 삼각형 ABC 와 그 내부의 영역을 T 라고 하자. 영역 T 를 x 축 둘레로 회전시켜서 얻어지는 회전체의 부피를 구하시오. (2011 고려대학교 수시)

EX2) 도전문제: 곡선 $y=x^2(0 \leq x \leq 1)$ 을 직선 $y=x$ 를 축으로 회전시킨 회전체의 부피를 구하시오. (2011 울산대학교 수시 변형)

EX3) 구간 $[a,b]$ 에서 치역이 양수인 연속함수 $f(x)$ 가 주어져있다. 구간 $[a,b]$ 를 n 등분한 하나의 구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 을 밑변으로 하고, $f(x_i)$ 를 높이로 하는 직사각형을 y 축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 구하시오. 그리고 이를 이용하여 곡선 $y=f(x)$ 을 $x=a, x=b$, x 축으로 둘러싸인 영역을 y 축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피에 대한 공식을 유도하시오. (파푸스-골딘 정리)

위의 예시는 '회전체', 즉 axis를 기준으로 회전대칭성을 띄고 있는 물체에 대해서 탐구를 해 본 것이다. 그런데, 대부분의 입체는 회전대칭성을 띄지 않는다. 그런 경우에는 어떤 매개변수를 기준으로 하는 축을 잡아서 적분을 시켜 주면 된다. 그것을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$V = \int_{t_0}^{t_1} S(t) dt \quad (S(t) \text{는 한 '조각'})$$

위 식은 '수학의 정석'에서 소개하고 있는 '일반입체 체적'이다. 실제로 고등학교 과정에서는 저 식 하나만 알아도 모든 문제가 다 해결가능하다. 그런데, t를 무엇을 잡느냐에 따라 문제 해결여부가 갈린다. 그런 부분은 충분한 연습을 할 필요가 있다. 다음 문제들은 일반입체에서 매개변수를 잡는 '감각'을 향상시키기 위해 넣어두었다. 문제를 세심히 음미하면서 감각을 익혀보도록 하자.

입체의 부피를 구할 때 유용한 '원리' 하나를 소개하고자 한다.

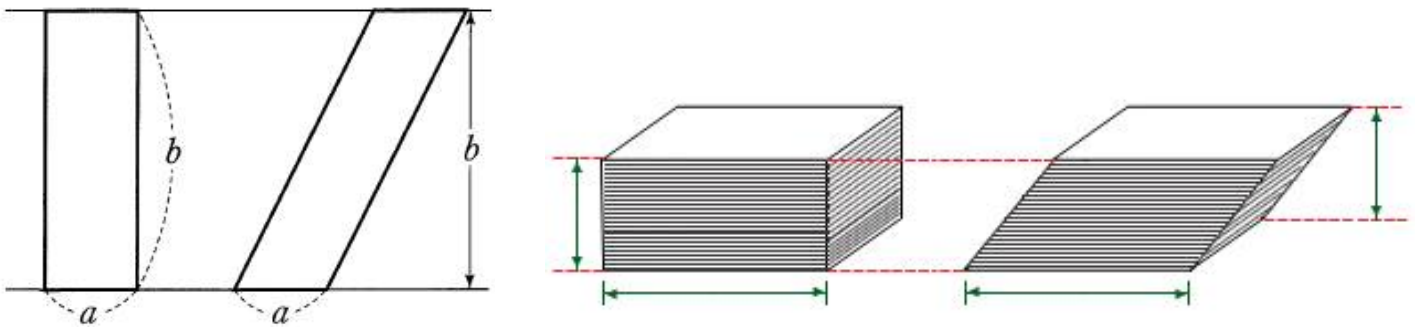
※카발리에리 원리(Cavalieri principle)

엄청나게 어려운 정리는 아니고, 상당히 intuitive한 정리이다.

카발리에리의 원리(Cavalieri's principle)는 이탈리아의 수학자인 보나벤투라 카발리에리가 발견한 수학 원리로, **경계면으로 둘러싸인 두 입체 V, V'를 하나의 정해진 평면과 평행인 평면으로 자를 때, V, V'의 내부에 있는 잘린 부분의 면적의 비가 항상 m:n이면 입체 V, V'의 부피의 비도 m:n이 된다는 수학적 원리이다.**

다시 말해 '어떤 두 개의 평면도형을 정직선에 평행인 직선으로 나누었을 때, 도형 내에 있는 선분의 비가 항상 m:n 일 때는, 그 2개의 도형의 넓이 의 비도 m:n과 같다.'라는 것이다. 또한, 이 원리를 입체인 경우로 확장하면 '단면의 비가 일정하면, 전체의 비도 똑같다'라고 간단하게 말할 수도 있다. 여기서 전체란 무한한 개수의 단면을 합쳐놓은 것이므로 부피라고 추측하는 것은 합리적이며 당연한 것이다. 이 원리를 m=n인 특정한 상황에 적용시키면, '2개의 입체에서 한 평면에 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 항상 같으면 2개의 입체의 부피는 같다'라고 할 수 있다. 이 원리를 기초로 하여 각종 입체의 부피를 광범위하게 구할 수 있게 되었으며, 부피를 잘게 쪼개어 적분하는 구분구적법의 시초가 되기도 하였다.

직사각형과 평행사변형의 넓이



3차원 입체의 경우 또한 매개변수를 잘 잡는 것이 중요하다. 차원만 높아졌을 뿐이지 2차원과 크게 다를 것은 없다. 그 점에 입각하며 3차원 입체의 체적을 구하는 문제들을 해결해 보자.

EX1) 도전문제: 밑면이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD이고, 윗면이 정사각형 EFGH인 정육면체가 있다. 정육면체에 포함되어 있는 입체 중에서 밑면이 정사각형 ABCD이고 꼭짓점이 E인 사각뿔을 T_1 이라 하고, 밑면이 정사각형 ABCD이고, 꼭짓점이 G인 사각뿔을 T_2 라 하자. 그리고 T_1 과 T_2 의 공통영역을 T라고 하자.

- (1) 정사각형 ABCD와 평행한 평면으로 입체 T를 자른 단면을 이용하여 입체 T의 부피를 구하시오.
- (2) 정육면체의 옆면인 정사각형 ABFE와 평행한 평면으로 입체 T를 자른 단면을 이용하여 입체 T의 부피를 구하시오.

EX2) 도전문제: 좌표공간에 밑면이 $x^2 + y^2 \leq 1$ 인 원이고, 꼭짓점이 $(t, 0, 1)$ 인 원뿔(내부포함)을 C_t 라 하자. 입체 C 가

$$C = \{P \mid -1 \leq t \leq 1 \text{인 어떤 } t \text{에 대하여 } P \in C_t\}$$

이 때, C 의 부피를 구하시오.

위 논의를 끝으로 매개변수에 대한 논의를 마치고자 한다. 나머지 내용은 테크니적인 내용들이므로 워크북을 풀어봄으로써 실력을 증진하면 될 것이다. 여기까지 따라온다고 정말 수고했다.

-끝-

이 부분은 수능수학과 논술수학을 혼용해서 만든 자료니깐 찬찬히 훑어보는게 좋을 것이다. 나중에 큰 도움이 될 거라고 확신한다.