2011학년도 서울대 정시논술 자연계 문항 4번(수리) 분석과 예시답안

[가] 우리 주변에서 발생하고 있는 여러 가지 현상들 중에는 과거에 일어났던 일에 영향을 받는 경우가 많이 있다. 이러한 현상을 수학적으로 표현해 보면 시간에 따른 적분에 의존하고 있음을 알 수 있다. 예컨대, 환자에게 약물을 투여하면 약물의 효과는 일정한 시간이 지난 후에야 나타나게 된다. 시간이 충분히 지난 후 약물 농도가 평형상태로 수렴하는지, 만일 수렴한다면 평형상태가 주어진 초기 조건과 시간 지연에 의해 어떻게 달라지는지를 예측하는 것은 약물의 생체 적용에 있어 중요한 문제 중 하나이다.

시간 지연에 따른 약물 농도의 변화는 수학적 모델링 과정을 통해 예측해볼 수 있다. 투여한 약이 작용 부위에 도달하는 시간을 지연 시간 T라고 하자. 측정을 통해 구간 $[-\mathrm{T},0]$에서 시간에 따른 작용 부위의 약물 농도 값을 얻었을 때, 구간 $[0,\infty)$ 에서 약물 농도 $f(t)$를 구하는 것은 매우 어려운 일일 수도 있지만, 우리가 관심을 갖고 있는 평형상태의 존재성과 평형상태로의 수렴성은 수학적으로 접근해볼 수 있다.

접근

논제 상황을 유도하기 위해 별 의미가 없는 '흥미로운' 도입부를 제시하였다. 결국 (가)에서 말한 평형상태로의 수렴성을 논제 (3)에서 직접 해보게 된다.

[나] 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 정의된 연속함수 $f(t)$가 $f(a)<f(b)$를 만족할 때, 임의의 실수 $c\in(f(a),f(b))$를 택하면 $f(\alpha)=c$ 인 점 $\alpha\in(a,b)$가 존재한다는 사실을 연속함수의 '중간값의 정리' 라고 한다. 이러한 α는 여러 개 존재할 수도 있는데 그 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, α_1은 아래의 성질을 만족한다.

$t<\alpha_1$일 때는 $f(t)<c$이고, $t=\alpha_1$일 때는 $f(t)=c$이다.

접근

제시문에서 연속함수의 '평균값의 정리'를 제시하였다. 누구나 다 아는 내용이나, '아래의 성질'로서 약간 변형된 평균값 정리를 알려주고 있다. 교과 과정에서 충분히 유추 가능한 내용이긴 하나, 배울 때 저런 식으로 배우지는 않으므로 논제 해결에 '아래의 성질'이 100% 사용될 것으로 추측가능하다. 또한, [나]를 읽으면서 이러한 성질도 당연히 만족함을 생각해 볼 수 있다.

<유추 성질>

이러한 α들 중 가장 큰 값을 α_N이라 하면, $t>\alpha_N$일 때는 $f(t)>c$이고, $t=\alpha_N$일 때는 $f(t)=c$이다.

하지만 결과적으로 보면 이러한 성질이 쓰이는 것은 아니다.

1.

T_1을 $0<\mathrm{T}_1<1$인 실수라고 하자. 함수 $g(t)$ $(-\mathrm{T}_1\le \mathrm{t}\le 0)$와 함수 $f(t)$ $(t\ge -\mathrm{T}_1)$는 다음 관계식 (1), (2)를 만족하는 연속함수들이다.

$$f(t)=g(t)\qquad(-\mathrm{T}_1\le \mathrm{t}\le 0)\tag{1}$$

$$f(t)=-\int_{t-\mathrm{T}_1}^{t}f(s)ds\qquad(t\ge 0)\tag{2}$$

구간 $[-\mathrm{T}_1,0]$에서 함수 $|g(t)|$의 최댓값을 M_1으로 정의할 때, 연속함수 $f(t)$가 다음 부등식을 만족함을 보여라.

$$|f(t)|\le M_1\ \ (t>0)$$

(단, 구간 $[a,b]$에서 연속함수 $h(t)$에 대해서 부등식 $\left|\int_a^b h(t)dt\right|\le\int_a^b|h(t)|dt$ 이 성립한다.)

접근

제시된 함수들의 조건을 읽어 보면 $f(0) = -\int_{-T_1}^{0} g(s)ds$ 이므로 논제의 부등식이 당연히 성립한다. 그러나 임의의 t에 대하여 성립함을 보여야 하므로 아주 작은 양수 h에 대하여 $f(h)$를 생각해 보면, $|f(0)| \le M_1$ 이므로 양의 x축 방향으로 '조금' 이동한 $\lim_{h\to 0}|f(h)|$ 또한 M_1이하일 것이다. 이러한 식으로 계속 나가면 모든 양수 t에 대하여 주어진 부등식이 성립한다고 볼 수 있는데, 답안을 이런 식으로 작성할 수는 없다. 조금씩 이동해 간다고 어떤 상수 t에 도착할 수 있는 것도 아니며, $\lim_{h\to 0}|f(h)| \le M_1$임도 단지 직관에 의한 추측에 불과하기 때문이다.

직관에 의해 당연한 명제이나 엄밀한 증명 방법이 떠오르지 않는 경우, 대부분 귀류법을 사용한다. 귀류법은 창의적인 여타 증명법과 달리 시작과 끝에 무엇을 해야 하는지 정해져 있고, 명제가 당연하면 당연할수록 가정을 부정했을 때 모순 또한 당연하게 도출될 것이 기대되기 때문이다.

이러한 사실을 몰랐다면 다음과 같은 발상도 가능하다.
"제시문 [나] 의 성질이 논제해결에 무조건 쓰이게 될 것이므로, $f(a) < f(b)$를 만족해서 어떤 c가 사이에 존재하도록 함수 $f(x)$를 만들어보자." 라고 생각한다면, 적절한 함숫값 c가 M_1밖에 없음을 알 수 있다. 그러므로 자연스럽게 귀류법이 떠오른다.

예시답안

어떤 양수 t_0가 있어서 $|f(t_0)| > M_1$이라고 가정하자. 한편 $|f(0)| = \left|\int_{-T_1}^{0} f(s)ds\right| \le \int_{-T_1}^{0} |f(s)|ds = T_1 M_1 < M_1$ $(\because 0 < T_1 < 1)$ 이므로, 제시문 [나] 의 중간값 정리에 의해 구간 $(0, t_0)$에서 $|f(\alpha)| = M_1$을 만족하는 α가 적어도 하나 이상 존재한다. 이러한 α들 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $t < \alpha_1$일 때는 $|f(t)| < M_1$이고, $|f(\alpha_1)| = M_1$이다. 그러나 $|f(\alpha_1)|$을 정의에 따라 계산하면

$$|f(\alpha_1)| = \left|\int_{\alpha_1 - T_1}^{\alpha_1} f(s)ds\right| \le \int_{\alpha_1 - T_1}^{\alpha_1} |f(s)|ds \le M_1 T_1 < M_1$$

이 되므로, 중간값 정리의 결과인 $|f(\alpha_1)| = M_1$과 모순된다. 그러므로 가정이 잘못되었고, $\therefore |f(t)| \le M_1$ $(t > 0)$ 을 만족한다.

2.

논제 1과 같은 상황에서 수학적 귀납법을 이용하여 0이상의 모든 정수 n에 대하여

$t \ge nT_1$일 때, $|f(t)| \le T_1^{n+1} M_1$ 임을 보여라.

접근

문제에서 대놓고 수학적 귀납법을 이용하라고 하였다. 수학적 귀납법 문제는 대부분 간단하므로, 상대적으로 부담감 없이 접근 가능하다. 수학적 귀납법의 원칙은 다음과 같다.

<수학적 귀납법 증명의 원칙>

보이고자 하는 식을 변형하려고 하지 말고, 이미 만족하는 식을 어떻게 이용할지만 생각한다.

예시답안

$n = 0$일 때, $|f(t)| = \left|\int_{t-T_1}^{t} f(s)ds\right| \le \int_{t-T_1}^{t} |f(s)|ds \le M_1 T_1$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

이제 $n = k$일 때 $t \ge kT_1$이면 $|f(t)| \le T_1^{k+1} M_1$ 을 만족한다고 가정하자.

이 때, $t \ge (k+1)T_1$이면, $|f(t)| = \left|\int_{t-T_1}^{t} f(s)ds\right| \le \int_{t-T_1}^{t} |f(s)|ds$ 인데 s의 범위가 $t - T_1 \le s \le t$ 이므로 $s \ge kT_1$을 만족한다.

$\therefore |f(s)| \le T_1^{k+1} M_1$ 이고, 위 부등식에 대입하면 $|f(t)| \le T_1^{k+2} M_1$이므로 $n = k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 논제 2가 증명되었다.

$\mathit{3.}$ 약물의 효과를 알아보기 위해, 쥐에 특정한 약물을 투여하는 실험을 진행하였다. $f(t)$를 시간 t에서 쥐의 특정 부위의 약물 농도라고 하자. $0<\mathrm{T}_2<1$일 때 구간 $[-\mathrm{T}_2,0]$에서 연속인 농도함수 $g(t)$를 측정하고, 또한 $t>0$일 때 $f(t)$의 변화에 관한 아래의 관계식을 세웠다.

$$f(t)=g(t) \qquad (-\mathrm{T}_2\le t\le 0) \tag{3}$$

$$f(t)=-\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds+g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds \qquad (t\ge 0) \tag{4}$$

이 관계식들로부터 연속함수 $f(t)$가 시간이 지남에 따라 상수인 평형상태 E_∞로 수렴한다고 가정하고 E_∞를 추측해보자. 시간 t가 충분히 크면, 구간 $(t-\mathrm{T}_2,t)$에서 $f(t)$가 E_∞에 근접하므로 식 (4)로부터 아래 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}E_\infty &\approx -\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} E_\infty ds+g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds \\ &=-\mathrm{T}_2E_\infty+g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds\end{aligned}$$

이로부터 E_∞을 아래와 같이 두고 실제로 $f(t)$가 이 값으로 수렴함을 보이고자 한다.

$$E_\infty=\frac{1}{1+\mathrm{T}_2}\left\{g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds\right\}$$

접근

문항 3이지만 일종의 제시문 역할을 하고 있다. 제시문 [가]에서 지적한 약물의 농도 수렴값을 실제로 구하고자 하는 논제이다. 논제를 읽기 전, 주어진 함수가 어떤 것인지 자세하게 생각해 볼 필요가 있다.

일단 전체적으로 보면 논제 1에서 주어진 함수와 비슷한 양상을 띠고 있다는 것은 쉽게 파악할 수 있으나, 구조가 훨씬 복잡해 보이므로 논제 1, 2와 연결짓기가 쉽지 않다. 그러나 $f(t)$의 정의식에서 다음과 같이 뒷부분은 E_∞로 표현할 수 있으며,

$$g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds=(1+\mathrm{T}_2)E_\infty$$

이 항은 적분의 양 끝이 상수이므로 단지 상수에 불과하고 E_∞또한 단순히 수렴값이므로 상수라는 것을 잊어서는 안 된다.
이러한 사실을 알았다면, 식 (4)를 다음과 같이 변형해볼 수 있다.

$$f(t)=-\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds+g(0)+\int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds=-\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds+(1+\mathrm{T}_2)E_\infty$$

3-1.

구간 $[-\mathrm{T}_2,0]$에서 함수 $|g(t)-E_\infty|$의 최댓값을 M_2라고 하자.

$t\ge n\mathrm{T}_2$일 때, $|f(t)-E_\infty|\le \mathrm{T}_2^{n+1}M_2$ 임을 보여라.

접근

이 논제가 3번 전체를 이해하는데 결정적인 힌트를 주고 있다. 방금 전에 논제 2를 보고 온 사람이라면, 같은 문제라는 것을 알 수 있는데, 단지 다른 것은 $g(t),f(t)$ 대신에 $g(t)-E_\infty, f(t)-E_\infty$ 를 사용하고 있다는 점이다. 이러한 특징과 논제 3의 제시문을 관찰할 결과로서, 자연스럽게 치환을 생각해낼 수 있다. 굳이 치환을 하지 않더라도, $g(t)-E_\infty, f(t)-E_\infty$를 하나의 함수로 보려는 시도를 할 수 있을 것이다. 이러한 생각을 가지고 보면 관계식 (3)은 다음과 같이 변형가능하다.

$$f(t)-E_\infty=g(t)-E_\infty \qquad (-\mathrm{T}_2\le t\le 0)$$

관계식 (4)또한 E_∞를 양변에 빼려는 시도를 할 수 있으나, 우변이 같은 꼴로 잘 표현되지 않는 것을 알 수 있다. 그러나 좌변을 $f(t)-E_\infty$로 만들었으면, 우변의 적분식 안의 함수 또한 $f(t)-E_\infty$로 변형해야 한다는 것을 간과해서는 안 된다.

$$\therefore f(t)-E_\infty=-\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds+\mathrm{T}_2E_\infty=-\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)-E_\infty ds \qquad (t\ge 0)$$

예시답안

E_∞는 상수이므로 식 (3)과 (4)는 각각 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$f(t)-E_\infty = g(t)-E_\infty \qquad (-\mathrm{T}_2 \le t \le 0) \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} f(t)-E_\infty &= -\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds + g(0) + \int_{-\mathrm{T}_2}^{0} g(s)ds - E_\infty \qquad (t \ge 0) \qquad (4) \\ &= -\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s)ds + (1+\mathrm{T}_2)E_\infty - E_\infty \\ &= -\int_{t-\mathrm{T}_2}^{t} f(s) - E_\infty ds \end{aligned}$$

그러므로 함수 $f(t)-E_\infty$와 $g(t)-E_\infty$는 논제 1에서의 $f(t)$와 $g(t)$의 성질을 만족한다.

$\therefore$ 논제 2의 결과에 의해, $t \ge n\mathrm{T}_2$일 때 부등식 $|f(t)-E_\infty| \le \mathrm{T}_2^{n+1}M_2$ 가 성립한다.

3-2.

t가 무한대로 감에 따라 $f(t)$가 E_∞로 수렴함을 보여라.

접근

논제 3은 위와 같은 식 변형만 착안이 가능했다면 1분 안에 풀 수 있는 매우 간단한 문제였다. 하지만 논제의 제시문이 너무 길고, 적분식을 마치 상수가 아닌 복잡한 함수처럼 보여지게 만들었으므로 제시문만 보고는 착안이 쉽지 않았다. 논제와 제시문을 잘 연결시키고, 앞 논제의 결과를 항상 사용할 생각을 하고 있어야겠다.

예시답안

논제 $3-1$의 결과식의 양 변에 극한을 취해 보자.

$$\lim_{n\to\infty}|f(t)-E_\infty| \le \lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_2^{n+1}M_2$$

그런데 $0<\mathrm{T}_2<1$이므로 부등식이 우변이 0으로 수렴한다. E_∞는 상수에 불과하므로 우변으로 이항하면,

$$\therefore \lim_{n\to\infty} f(t) = E_\infty \text{ 를 얻는다.}$$