2018 년도

수학 나형
20, 21, 29, 30

교육청 문제 모음

1번

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2}, b_n = p \times (-1)^{n+1} + q$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 실수이다.)

<보기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.
ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.
ㄷ. 두 수열 $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim_{n \to \infty} \{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = 6$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

190320나 # 4182

2번

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to X, g : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 8, f(3) \neq 6$
(나) 함수 $(g \circ f)(x)$는 항등함수이다.
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) + g(x)$의 값은 일정하다.

$(f \circ f \circ f)(7)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

190321나 # 4183

3번

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 두 명제

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2 - 3x < 0$이다.',
'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x \in A$이다.'

가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

190329나 # 4191

4번

n이 자연수일 때, 함수 $f(x) = \dfrac{x + 2n}{2x - p}$이

$$f(1) < f(5) < f(3)$$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자. 자연수 n에 대하여 $p = m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = \dfrac{2x + n}{x + q}$이

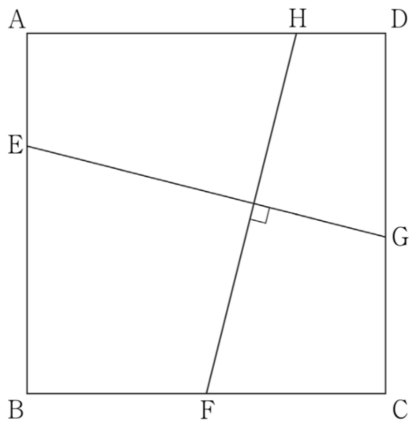
$$g(f(5)) < g(f(3)) < g(f(1))$$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

190330나 # 4192

5번

그림과 같이 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형 ABCD가 있고, 네 점 E,F,G,H가 각각 네 변 AB,BC,CD,DA 위에 있다. 선분 HF의 길이는 $\sqrt{4n^2+1}$이고 선분 HF와 선분 EG가 서로 수직일 때, 사각형 EFGH의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 765 ② 770 ③ 775 ④ 780 ⑤ 785

190420나 # 4419

6번

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

(가) $a+b+c+d=12$
(나) 좌표평면에서 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이며
두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

① 125 ② 134 ③ 143 ④ 152 ⑤ 161

190421나 # 4420

7번

전체집합 $U=\{x|x$는 10이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 S_1, S_2, S_3이

$$n(S_1) \geq 3,\ S_1 \subset S_2 \subset S_3$$

을 만족시킨다. 다음은 집합 S_1, S_2, S_3의 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수를 구하는 과정이다.

$n(S_1)=k(3 \leq k \leq 10,\ k$는 자연수 $)$인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}\mathrm{C}_k$이다.
또한 $S_1 \subset S_2 \subset S_3$이므로 집합 S_1에 속하지 않는 원소는
세 집합 $S_2-S_1, S_3-S_2, U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다.
그러므로 $n(S_1)=k$ 일 때 집합 S_1, S_2, S_3의
순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{(가)}$ 이다.
따라서 $n(S_1) \geq 3, S_1 \subset S_2 \subset S_3$을 만족시키는
순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여

$$\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}\mathrm{C}_k \times \boxed{(가)}\right) = 4^{10} - \boxed{(나)} \times 3^8$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a+f(8)$의 값을 구하시오.

190429나 # 4428

8번

두 실수 a, b에 대하여 정의역 $\{x | x \geq 0\}$인 함수

$$f(x) = \frac{-ax - b + 1}{ax + b}(ab > 0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x | x \geq 0\}$인 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2k - f(x) & (f(x) < k) \\ f(x) & (f(x) \geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} |g(x)| = \frac{1}{2}$
(나) $|g(0)| = 1$
(다) 함수 $y = |g(x)|$의 그래프와 직선 $y = -k$는
두 점 $\left(\frac{1}{28}, -k\right)$, $(\alpha, -k)$에서만 만난다. (단, $\alpha > \frac{1}{28}$)

직선 $y = m(x - 4\alpha) + \frac{3}{4}$이 함수 $y = |g(x)|$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 연속이되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다. $252M$의 값을 구하시오.

190430나 # 4429

9번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(-x) = -f'(x)$$

를 만족시킨다. $f'(1) = 0, f(1) = 2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f'(-1) = 0$

ㄴ. 모든 실수 k에 대하여 $\int_{-k}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{k} f(x)dx$

ㄷ. $0 < t < 1$인 모든 실수 t에 대하여 $\int_{-t}^{t} f(x)dx < 6t$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

190720나 # 7164

10번

함수

$$f(x) = (x - 1)|x - a|$$

의 극댓값이 1일 때, $\int_{0}^{4} f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

190721나 # 7166

11번

전체집합 $U = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\}$의 서로 다른 부분집합을 $A_i(i = 1, 2, 3, \cdots, 64)$라 하자. $n(A_i) \geq 3$을 만족시키는 모든 집합 A_i에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 구하시오. (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

190729나 # 7174

12번

함수 $f(x)=x^3-12x$와 실수 t에 대하여 점 $(a, f(a))$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속이 되는 k의 값 중에서 가장 작은 값은 0이다.

$\sum_{n=1}^{36} g(n)$의 값을 구하시오.

190730나 # 7175

13번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x)=x(x-2)(x-a)$ (단, a는 실수)
> (나) 방정식 $|f(x)|=f(0)$은 실근을 갖지 않는다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $0<a<2$이고 $f(a)>0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $|f(x)-f(2)|$가 $x=k$에서만 미분가능하지 않으면 $k<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

191020나 # 8389

14번

함수 $f(x)=\frac{k}{x}+5$ (k는 양의 상수)의 그래프를 x축의 방향으로 m $(m>0)$만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(a)=b, g(b)=a$인 서로 다른 두 실수 a, b가 존재한다.
> (나) 열린 구간 $(0, m)$에서 정의된 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$의 최댓값은 $\frac{5}{24}$이다.

$g(9)$의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

191021나 # 8390

15번

최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$이다.

(나) $\int_a^2 f(x)dx = 2, \int_a^2 |f(x)|dx = \frac{22}{9}$

$f(k) = 0$이고 $k < a$인 실수 k에 대하여 $\int_k^2 f(x)dx = \frac{q}{p}$이다.
$p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

191029나 # 8398

16번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t가 다음 조건을 만족시킨다.

등식 $f(a)+1 = f'(a)(a-t)$를 만족시키는 실수 a의 값이 6 하나뿐이기 위한 필요충분조건은 $-2 < t < k$이다.

$f(8)$의 값을 구하시오. (단, k는 -2보다 큰 상수이다.)

191030나 # 8399

빠른 정답표

1번. ③	2번. ②	3번. 28	4번. 320	5번. ③
6번. ②	7번. 93	8번. 19	9번. ⑤	10번. ①
11번. 144	12번. 82	13번. ③	14번. ②	15번. 25
16번. 39				