촌철살인

확률만

제 2 권 확률과 통계 4쇄

저자 : 최준호

무단복제 및 재배포를 엄격히 금합니다.
(Orib와 계약을 맺고 정식 ISBN을 받은 책입니다.)

티칭과 코칭

촌철살인 확률과 통계

수학자는 수학을 고민하고, 교육자는 철학을 고민한다.
이것은 완전히 다른 고민이다.

세상에는 너무 많은 수학이 있다. 한 분야의 수학을 정복하는 것도 불가능하다. 평생을 한 문제와 싸우는 교수님도 계신다. <많은 내용>이야 <구글 검색>만 하더라도 앞의 교수님이 가진 지식보다 훨씬 더 많은 지식을 찾을 수 있다.
하지만 앞의 교수님이 가진 <생각의 깊이>와 넓고 얕은 지식을 비교할 수는 없는 일이다.

수학교육자가 알아야 하는 수학은 생각보다 많지 않다. 하지만 이 많지 않은 내용을 깊이 고민해야 한다. 교육자는 배우는 이유와 목적, 그리고 방향을 제시하고 학습자가 올바로 학습할 수 있도록 설득해 줄 수 있는 철학을 연구해야 한다.
이 책은 그런 생각을 담고 있다. 즉, 수학자로서의 역할을 기대하지 말고, 수학교육자로서의 역할을 기대하며 이 책을 읽는다면 좋은 책이 될 것이다. 어려운 대학수학들도 잠깐잠깐 다루긴 하지만 그것은 온전히 고등수학을 더 제대로 이해하기 위해서 보조 도구로 다루는 것뿐이다. 이 책은 <온전한 이해>만이 가장 빠른 길이라고 믿고 있다.

장님 코끼리 만지기?

이 책을 학습할 때 주의사항이 있다. 적어도 이 책으로 공부하기로 마음을 먹었다면 <장님 코끼리 만지기식>은 하지 않았으면 한다. 이 책은 확률의 시작인 <시행과 사건>부터 시중에 나온 어떤 책도 다루지 않은 부분에 대해서 다루고 있고, 이것을 논리적으로 엄밀하게 연결시켜 <확률의 연산과 통계> 끝까지 연결되는 개념을 수록하였다.
한 페이지도 <장인정신>없이 쓰지 않았다. 공들여 쓴 몇 페이지의 내용을 고민 끝에 삭제하고 한 두 줄로 요약한 경우도 종종 있었다. 깊은 이해를 위해 필요할 수도 있지만 그 이해가 반드시 필요한 것이 아닌 '알면 좋은 것'이라면 과감하게 삭제하였다.
앞에서부터 제대로 학습한다면 생각보다 훨씬 많은 시간이 절약될 것이다.

촌철살인을 읽는 방법

- 제목을 집중하여 읽는다.
  : 제목은 본문의 내용을 함축한다. 한 단원을 읽기 전에 제목을 먼저 쭉 읽고 머릿속으로 왜 그렇게 제목을 정했는지 고민하면서 <제목으로 먼저 뼈대>를 잡는다.

- 빠르게 읽지 않는다.
  : 한 부분 한 부분 모두 고민하여 썼기 때문에 한 부분도 놓치면 안 된다. 특히 문제를 풀 수 있다고 대충 넘어가면 안 되고 해설과 <티칭> 그리고 <코칭>을 빠짐없이 읽는다.
  <공부는 예제를 가지고 하는 거야.>라는 부분은 <뼈대 개념>과 <개념의 외연>을 제대로 학습한 후 풀어본다.
  단, 풀고 나서 답만 맞추고 맞았다고 넘어가는 것이 아니라 <강의를 듣는 심정으로> 해설을 정독한다.

- 독학재수하는 학생들에게
  : 프랑스에는 걷기 프로그램인 랑도네 프로그램이라는 게 있습니다. 최근 발간된 <1만 시간의 재발견>이라는 책 제 3장에 <의욕보다 중요한 연습의 방법>부분에서 신체활동이 정신과 연결되어 있음과 그 중요성에 대해 서술하고 있습니다.
  이 부분도 정독해 볼만합니다. <유대인 도서관>도 참조해 볼만합니다. <매우 저명한 수학자, 과학자>들이 <움직이며> 어떤 내용을 공부하고 고민하는 것은 아주 쉽게 접할 수 있습니다.
  이 책은 <런닝머신>을 걸으면서 공부할 수 있는 유일한 수학책입니다. 수험생활의 성공에 가장 중요한 것은 <움직이는 것> 입니다. 단지 건강을 위해서가 아니라 움직이며 공부하면 훨씬 좋은 아이디어를 많이 떠올릴 수 있습니다. 꼭 런닝머신을 하며 이 책을 완독하고 (물론 책상에서도 추가공부를 해야겠지요.) 후기를 남기는 학생들이 있었으면 좋겠습니다.

5회독으로 만드는 사고의 틀 : 반복의 방법

1회독 : 정독 (선생님의 설명이 있을 시 약 한 달 - 하루 90분 기준)

- 한 글자도 놓치지 않고 의미를 생각해가며 꼼꼼히 읽는다. 정독의 습관이 안 된 친구들은 선생님의 도움을 얻어 수업형태로 진행해 보는 것을 추천한다. 아마 처음 읽어서는 정독을 하더라도 놓치는 부분이 많을 것이다.

2회독 : 문풀독 (약 20일 - 하루 90분 기준)

- <이해를 위한 예제>는 저자의 설명의 의도가 담긴 문제가 많기 때문에 설명을 이해하기 위해 <풀기보다는 읽어보는 것>이다. 하지만 그 의도를 명확하게 이해했다면 2회독 할 때는 <이해를 위한 예제>를 풀 수 있을 것이라고 생각한다. <~~을 보여라.>등의 서술식 예제도 본인이 한 번 설명해보고 답지를 봤을 때 논지전개방식이 일치했다면 이 책의 사고방식을 어느 정도 받아들였다고 볼 수 있다. 이것이 안 된다면 다시 한 번 그 부분을 정독하여 이해하면 된다.

3회독 : 정리독 (약 20일 - 하루 90분 기준)

- 처음 공부하면서 바로 정리하는 것은 위험하다. 어느 정도 책 전체의 구조가 머릿속에 들어왔을 때 책의 구조도를 그리면서 정리해 본다. 일명 마인드맵이라고 불리는 이 방법은 일단 한 번 정리해 두면 까먹었을 때 다시 복습하기 매우 유용하다.

- 구조도를 그리면서 일명 <keyword>를 선별하게 되는데 이 단어를 통해서 이 책의 많은 부분을 연상할 수 있게 된다. 이렇게 단어를 선별하는 과정에서 <글의 요지>를 더 정확하게 이해하게 되며 만들고 수정하는 과정에서 <1회독, 2회독>에서도 놓친 부분을 다시 한 번 점검하게 된다. 검사해 줄 수 있는 선생님이나 친구가 있으면 더욱 좋다.

4회독 : 예측독 (약 7일 - 하루 90분 기준)

- 위에 까지만 해도 충분히 잘했다. <4회독>과 <5회독>은 절대로 오래 걸리지 않으므로 주기적으로 반복하길 바란다. <예측독>이란 말 그대로 서문을 읽으면서 글의 내용과 주제가 예측되어지는 상황이다. 한 번 더 꼼꼼히 점검하되 본인의 생각과 일치함을 확인하고 넘어가면 된다.

5회독 + : 스킵독 (약 20분)

- 최종 단계이다. <예측독>까지 해서 어느 정도 실력의 확신이 들 때, <주 1회 or 격주 1회>정도 20분 정도 투자하여 전체를 훑어보는 것이다. 여기까지 오면 어떤 <확률과 통계>의 문제를 만나더라도 접근에서 막히는 일은 없을 것이다. 그리고 감에 의존해서 문제를 푸는 느낌도 없을 것이라 확신한다.

위의 시간은 개인의 집중력과 역량 차이에 따라 변동 될 수 있다.
본인의 실력에 따라 기간을 조금 더 길게 혹은 조금 더 짧게 설정하여 공부하길 바란다.

티칭과 코칭

: 단 한 권의 책도 단 한 페이지도 장인정신 없이는 책을 쓰지 않습니다.
세계적 수학교육 출판기업이 될 때까지 끊임없이 진보합니다.

촌철살인 : 확률과 통계

확률과 통계			
#2. 확률	Part 1. 확률의 기본 이론	수학적 확률 - 직관에 의존한 논리	
		통계적 확률	
		기하학적 확률	
		확률의 덧셈 정리 (확률 덧셈의 정당성 부여)	
	Part 2. 확률의 계산 1	조건부 확률 - 직관에 의존한 논리	
		시행의 독립과 종속 VS 사건의 독립과 종속	
		확률의 곱셈정리 (확률 곱셈의 정당성 부여)	
		강 풀 조건부와 계산적 조건부	
		결국 효율성의 문제	
	Part 3. 확률의 계산 2	독립시행의 확률	
		확률부분과 경우의 수 부분	
		종속시행의 확률?	
#3. 통계	Part 1. 이산확률분포	이산확률분포	
		이항분포	
	Part 2. 연속확률분포	연속확률분포	
		정규분포	
		이항분포와 정규분포의 관계	
	Part 3. 통계적 추정	모표균 추정	
		모비율 추정	

이 책이 두꺼워진 이유는 다른 책이 두꺼워진 이유와는 조금 다릅니다.
아는 것을 정리한 것이 아닌 알아야 하는 것을 정리하였습니다.
엄청나게 많은 내용을 넣어놔서 두꺼워진 것이 아니라 알아야 하는 것을 최대한
자세하게 설명해서 두꺼워졌습니다.

알면 좋은 것들을 넣어둔 것이 아닙니다.
반드시 알아야 하는 것을 넣어놨습니다.
이 책은 사전이 아닙니다.

아는 만큼 보인다.

이 책의 내용 중 모르는 것이 있다면 반드시 학습해야 합니다.
만약 많이 보지 못했다고 생각되는 내용이 있다면 본인이 많이 하지 않았거나 아니면
알지 못해서 지금까지 수없이 봤음에도 불구하고 인지 못하고 넘어갔음이 분명합니다.
이 책은 공식이 아닌 공식에 담긴 사고방식을 설명하는 책입니다.

꽃 - 김춘수 -

내가 그의 이름을 불러주기 전에는
그는 다만
하나의 몸짓에 지나지 않았다.

내가 그의 이름을 불러주었을 때
그는 나에게로 와서
꽃이 되었다.

내가 그의 이름을 불러준 것처럼
나의 이 빛깔과 향기에 알맞은
누가 나의 이름을 불러다오
그에게로 가서 나도
그의 꽃이 되고 싶다.

우리들은 모두
무엇이 되고 싶다.
나는 너에게 너는 나에게
잊혀지지 않는 하나의 의미가 되고 싶다.

잊혀지지 않는 의미가 되기 위해서 어떤 개념에는 반드시 이름이 있어야 한다.
이름이 없으면 잠깐 스쳐가는 하나의 몸짓에 지나지 않을 것이다.
비단 한국의 수학만 그런 것은 아니라고 생각한다.
공식에는 이름이 있지만 그 공식이 담고 있는 사고방식에는 이름이 없기 때문에 결국 우리는 머릿속에 공식만 남는다.
수학이 실제 생활에서 필요한 이유는 <공식>을 쓰기 때문이 아니다.
<그 공식이 담고 있는 사고방식>이 우리가 어떤 정보를 받아들이고 판단하는 데 중요한 역할을 하기 때문이다.
앞으로 배우게 되는 경우의 수에서 전체를 생각하여 부분으로 가는 사고방식이나
기준을 설정해서 상황을 고정하고 변하는 것들만 관찰하는 사고방식은 비단 수학에서만 필요한 사고방식이 아니다.
과학에서도 원인과 결과를 정확히 관찰하기 위해 관찰의 초점인 <조작변인>을 제외하고 전부 통제한다.
우리가 실생활에서 기계가 작동이 되지 않을 때 무조건 서비스 센터를 찾아가는 것은 개인에게도 기업에게도 굉장히 비효율적이다.
이때 우리는 몇 가지 실험을 거쳐 안 되는 이유를 찾게 되는데 이런 작은 행동들에도 너의 사고방식이 영향을 준다.
수학은 이런 사고방식을 아주 단순화해서 문제를 통해 반복적으로 연습하는 것이다.
사고방식도 마치 근육처럼 단련하고 연습해야 잘 사용할 수 있기 때문이다.
이것이 바로 사고력(力)에 <힘 력>자를 쓰는 이유일 것이다.

공식은 단지 그 사고방식을 사용하는 과정에서 계산을 조금 줄여준다거나 조금 빠르게 해줄 뿐이다.

촌철살인 #0. 이 책의 학습방향

수학은 직관에 의존한 논리이다.

- 직관이란 <경험을 통한 예측>이다. 즉, 경험 없이는 아무런 직관도 생기지 않는다. 우리가 수많은 문제를 풀어보면서 직접 연습하는 이유도 바로 이러한 직관력을 기르기 위함이다. 필자는 <수학>에 있어서 정말 중요한 <직관>이라는 부분이 적절하고 체계적으로 설명되어 있는 학습서를 보지 못했기 때문에 적절한 비유를 통해서 그것을 설명하고자 한다. (저명한 물리학자이자 하버드대 교수인 'Gerald Holton'이 "은유는 미지의 세계로 가는 유일한 다리"라고 언급한 것처럼, 적절한 비유는 난해한 개념을 확실히 이해시켜 주는 것에 있어서 매우 중요하다.)
  또한 이런 직관에 해당하는 개념들은 보통 <구체적 용어화>가 되어있지 않기 때문에 <인지>하는 것 또한 어렵다.
  그래서 그냥 <헷갈린다, 어렵다, 실수했다> 등으로 생각하기 마련인데 이러한 부분은 구체적으로 <용어화>시킴으로서 이 책을 공부하고 난 후에는 왜 틀렸고 무엇에 의해 풀어야 하는지 정확하게 말할 수 있을 것이다.

생각의 방향과 바른 고정관념

- 모든 것이 그렇듯 완벽한 이론이란 없다. 어차피 완벽에 가까운 이론일수록 너무 추상적이어서 쓸모가 없다.
  그러므로 우리는 <생각의 방향>을 정해야 한다. 그 <생각의 방향>이 모든 문제를 풀 수 없음은 당연하다.
  수학에서 <고정관념>을 버려야 한다고 하지만 이것은 공허한 구호에 불과하다. 오히려 수학은 <올바른 고정관념>을 가져야 하고 그런 <고정관념>으로 풀리지 않는 도전적인 문제를 통해서 <개념의 외연>을 넓혀가야 한다.
  그래서 10문제 중 9문제에 적용할 수 있는 <생각>이라면 개념화시켜 학습할 충분한 가치를 가지고 있다.

- 이 책은 완벽하지 않다. 완벽을 추구하는 책이 아니다. 올바른 고정관념과 직관을 기르도록 하는 것이 이 책의 목표이다.
  추상적이지만 근본적인 이론들을 적절한 비유를 통해 제시하고 구체적인 언어로 만들어 학습할 수 있도록 이 책을 구성하였다.

1권을 집필한 후... 누군가의 리뷰

다음 책 리뷰 - <제목 : 확률통계 교과과정의 출발 경우의 수에 대한 고민>

제목에 끌려 선택한 책입니다.
현장에서 쌓은 실전의 지식으로 깊은 사유 끝에 만들어진 수학책입니다.
단순하게 확률과 통계 부분만 정리하는 문제집이나 개념서가 아니며
“풀이”를 넘어서 정독하게 하는 수학책의 의미가 있습니다.
확률에 대해 고민하는 경험 있는 강사나 교사들에게
자신의 공부 방법이 풀이보다는 근본적인 개념을 파고드는 학생이나
다른 풀이에 대해 관심 있는 분들에게 권합니다.
(라엘과생명나무 님)

네이버 책 리뷰 - <제목 : 좋아요 진짜로>

책이 너무 좋네요 저는 현재 고2 자연계학생인데요 처음 공부할때 헷갈리거나 잘못생각되기 쉬운 부분들을 정확하게 집어주면서 충분한 예제들과 친절한 해설들이 개념들이 머리속에 박히도록 해줘서 너무 좋아요 예를들면 책에 나와있는 분할적 사고는 보통 다른책에서는 분명하게 집어주지 않아서 익숙해지는데 시간이 오래 걸리는데 자세하게 써져있어서 시행착오하면서 시간을 낭비하는걸 많이줄여주는게 정말 좋습니다. 처음에 확통 공부할때 개인적으로 경우의 수를 논리적으로 세는것이 많이 헷갈려서 몸에 익힐때 까지 시간이 정말 오래걸렸었는데 이책은 그부분을 용어도 붙여서 자세히 알려줘서 인상적이었어요 또 가르쳐만 주고 마는것이 아니라 풍부한 예제들로 개념을 몸에 익혀주는것도 정말 좋았어요. 처음 공부할때 이 책으로 공부했다면 얼마나 좋았을까 하는 생각이 가득합니다ㅠㅠ 그렇지만 물론 한번 공부했었다고 해도 얻어갈게 적다는건 절대 아닙니다ㅎㅎ 책 구성에대한 이야기도 하고 싶습니다. 저는 내용도 마음에 들지만 구성도 정말 마음에 들었거든요 정석이나 개념원리에 길들여진 저는 처음 책을 펼쳤을때는 약간 어색한 느낌도 없잖아 있었습니다. 하지만 ㅎㅎ 익숙해지는데 걸린 시간은 정말 짧았습니다ㅎㅎ 처음에 개념설명과 공식 증명부분으로 뼈대를 쌓고 충분히 많은 예제들로 몸에 익숙하게 해주는데 예제 하나하나가 자세하게 설명해주고 있어서 너무 좋습니다. 또 너무 오바해서 지저분하게 설명하거나 하는것도 없이 필요한 부분들을 이해하기 쉽게 설명하고 있다는 점도 좋았습니다. 개념의 외연 부분도 단원을 이해하는데 큰도움이 되네요 또 마지막에 기출문제들로 다시 싹 정리해줘서 그것도 좋았습니다. 마지막으로 분량에 대한 이야기를 하자면요 저도 사실 처음에는 너무 많은 거 아닌가 하는 생각이 들었습니다. 하지만 직접 풀어 보니 결코 아니더라구요 ㅎ 다른책에서는 조금 직관적으로 이해하고 넘어가야 해서 이해하는데 오래 걸릴수 있는 부분을 용어를 붙여서 친절하게 설명하다보니 길어질수 밖에 없었던거 같습니다. 또 예제들이 정말 풍부하고 하나하나의 예제들이 정말 친절해서 분량이 길어진거였습니다. 책을 직접 풀어 보시면 아시겠지만 집중해서 책을 따라가다보면 시간가는줄을 모르고 꽤 많은 분량을 해내게 합니다. 친절하고 세세한 설명으로 막히는 부분이 없어서 가능했습니다. 그래서 오히려 분량이 많아 보이지만 시간적인 측면에서 훨씬 크게 절약됩니다. 시간이 부족한 고등학생 입장에서 정말 큰 이점일수 밖에 없습니다. 또 페이지수는 많지만 어떤 페이지도 최선을 다해 집필하지 않은 부분이 없었습니다. 정말 모든 예제에 최선을 다해 풀이를 써주신게 느껴집니다. 또 그렇다고 막 불필요하게 많은 교육과정을 벗어나는 지저분한 공식들 같은 것은 없습니다. 정말 알짜배기 책입니다. 만약 확통 기본서를 찾고 계신다면 저는 망설임없이 촌철살인 확률통계를 추천드립니다. 그리고 10월 출판예정인 미적분2 정말 기대됩니다 ㅎㅎ 개인적으로 마음에 쏙드는 책이라서 승승장구하면 좋겠습니다. 화이팅 ㅎㅎ
(오르비 닉네임 : 이불 님 / 경상북도 포항시)

네이버 책 리뷰 - 〈제목 : 수학공부에 정말 도움 많이 받았습니다.〉

처음엔 단순히 경우의 수에서 애매모호한 개념정립이 안되서 공부한 교재였는데 하다보니까 확통단원 뿐만이 아니라 수학공부 전반에 대해 많이 생각하게 해주는 책이었습니다.

책에는 문제보다 많은 정말 다양한 예제들이 나와있는데 그 풀이과정을 따라가다 보면 경우의 수에서 사용되는 논리의 전개에 익숙해지고 조건들을 파악하는 힘이 길러지는데 2회독쯤 하게 되면 문제를 보는 직관이 생기게 됩니다. 이게 순열과 조합 단원에서 헤메면서 잡아먹는 시간을 효율적으로 줄여줍니다. 단순히 양치기를 통해서 '감'을 잡는 것보다 훨씬 구체적이고 확실하게 개념이 어떻게 활용되어지는 지를 알려준다는 게 이 책의 장점이라고도 볼 수 있습니다.

책을 공부하다보면 중간중간에 저자의 수학에 대한 철학과 나름의 공부법 등이 나오는데 모든 책에나 나오는 말들이지만 곱씹어볼만한 가치가 있는 조언들도 많습니다. 특히 수학을 독학하시는 분들이 참고할만한 글들이라고 생각합니다. 단순히 양치기가 아닌 수학에 접근하는 길을 알려준다고 할까요.
마지막으로, 인강이나 몇 권의 개념서를 정독하고 나서도 뜬구름 잡는 거 같던 개념들을 이제 하나의 논리적 도구로서 사용할 수 있게 만들어준 저자에게 감사하단 인사를 남깁니다.
(오르비 닉네임 : TheAnecdote(수능전과목만점) 님 / 경상남도 진주시)

네이버 책 리뷰 - 〈제목 : 정말 좋은 책입니다.〉

일단 자세한 해설과 이미지로 개념을 확실하게 이해하는데 큰 도움을 줍니다.
다른 개념서 같은 경우에는 어느 정도의 적절한 설명과 관련된 문제를 통한 개념 이해 위주라면
이 책은 개념 설명에서부터 이미 문제를 풀 실력이 거의 완벽하게 길러진다고 볼 수 있습니다.
개념이 머리 속에 확실하게 정립되기 때문에 문제를 푸는 것은 그냥 단순한 복습 밖에 안된다고 할 수 있겠네요.
그렇다고 문제 수준이 낮은 건 아닙니다. 제일 중요한 개념이 확실하게 이해되기 때문에
문제가 그만큼 상대적으로 쉬워지는 거겠죠.

다양한 문제를 통해서 단순한 개념 이해가 아니라 고차원의 문제를 풀 실력이 향상되는게 느껴집니다.
이 교재를 본 후 다른 기출 문제집을 풀어보니 확실하게 실력이 향상되었음을 느꼈습니다.
촌철살인을 공부하기 전에는 기출을 풀어봐도 이해가 안되거나 풀었어도 애매한 경우가 많았는데
지금은 너무나 쉽고 재미있게 문제를 풀고 있는 제 자신을 발견하게 되네요.

다른 여러 교재로 개념도 제대로 이해하지 못하게 되어 문제를 풀어도 애매해 하는 불행한 일을 겪지 마시고
이 책으로 처음부터 확실한 개념을 정립하여 확통에 자신감을 갖게 되시길 바랍니다.
차차 다른 단원에 관련된 책도 출판된다고 하니 책이 출판되면 모두 구입하여 공부할 생각입니다.
앞으로 출판될 책도 이런 식으로 수학을 확실하게 이해하는데 도움이 되는 교재이길 바랍니다.

(오르비 닉네임 : 쿡리 님 / 대전광역시 서구)

촌철살인 확・통	2. 확률
Part 1. 수학적 확률	#1. 시행과 사건
	#2. 수학적 확률
	#3. 통계적 확률과 기하학적 확률

촌철살인 #1. 개수로 구하는 비율

확률이란 전체에서 부분이 차지하는 비율

- 전체에서 일부가 차지하는 비율을 통해서 우리는 확률을 느끼고 계산한다.

  <Part 1. 수학적 확률>에서는 이 비율을 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구할 수 있는 상황에 대해서 주로 다룬다.

  직관적이고 구체적인 상황이 주어지는 만큼 개념적으로는 가장 쉬운 내용이다.
  하지만 경우의 수를 구하기 어렵거나 복잡한 상황이 주어진다면 문제는 아주 어려울 수도 있다.
  경우의 수를 충분히 공부한 학생이라면 누구나 정복할 수 있다.

시행과 표본공간 그리고 사건

- <시행, 표본공간, 사건>은 확률에서 가장 먼저 나오는 용어이다. 만약 처음 들어보는 용어라면
  그냥 <그런 것이 있구나!>정도로 생각하고 넘어가자. 어차피 바로 뒤에서 나온다.
  <Part 1. 수학적 확률>에서는 <시행, 표본공간, 사건>의 진정한 의미를 느끼기 어렵다. 단지, 확률을 정의하기 위해
  설명하는 용어 정도로 인지하는 경우가 가장 많고 이 단원에서는 모든 확률을 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구하기 때문에
  <경우의 수>만 잘하면 확률을 잘 할 수 있다고 생각하는 경우가 많다.

- 하지만 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률은 구하는 것은 그 자체로 목적이 아니다.

  결국에는 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구한 확률을 기반으로 $\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$로 확률을 구하거나 <비율의 연산>을 통해서 확률을 구해야 한다.
  이것이 우리가 배우는 확률의 목적이며 이것을 잘하기 위해 반드시 <시행, 표본공간, 사건>을 조금 더 구체적으로
  나누고 이해하는 것이 필요하다. 이를 위해 <촌철살인 확률과 통계 2>에서는 더욱 엄밀한 용어를 만들어 사용한다.
  (현재 교육과정에서 제시하는 용어들로 모든 상황을 설명하기에는 조금 추상적이기 때문에 확률을 제대로 이해하고 풀고 있다고 생각하는 학생이 적다.)

- 이 책에서는 <시행>을 상황별로 <4가지>로 나누어 생각한다. 또한 그에 따른 <사건>도 추가로 구분한다.
  또한 <Part 2. 확률의 계산 1>에서는 <시행, 표본공간, 사건>에 대해 교과서와는 다른 방법으로 설명한다.
  이것은 교과서의 내용을 모두 포용함과 동시에 확률을 더 구체적으로 느낄 수 있게 해줄 것이다.

- <Part 1. 수학적 확률>에서는 위와 같은 구분이 없어도 <경우의 수 능력>만 있다면 충분히 해결가능하다.
  하지만 확률의 최종 목적지에 정확하게 도착할 수 있도록 미리 기본적인 용어들을 정확히 숙지해야 한다.
  그것을 위해 문제들마다 시행과 사건을 구분하는 설명들을 티칭을 통해서 추가해두었다.
  (용어를 숙지하는데 많은 시간이 필요치 않다. 당장 문제 푸는 데에는 필요가 없다고 하더라도 반드시 용어를 숙지하고 넘어갈 것을 추천한다.)

MAP

뼈대가 되는 기본 개념

#1 시행과 사건

- <시행, 표본공간, 사건>에 대해 기존의 교과서 방식보다 조금 더 자세하고 구체적으로 나눈다.
  이 용어들은 간단한 문제를 푸는 것에 있어서 지금 당장 크게 중요하지는 않더라도, 나중에 복잡한 문제를 풀 때 그 중요성이 드러나므로 미리 숙지하고 넘어갈 수 있도록 각 문제의 해설부분에 설명을 첨부하였다.

1. 시행과 사건 - 기본용어와 의미 (교과서 설명방식)

1) 시행

- 동일한 조건에서 반복할 수 있고 그 결과가 우연에 의해서 지배되며 일반적 결과가 예측되어 가능한 모든 결과를 집합으로 표현할 수 있는 실험을 시행이라 한다.
  (너무 진지하게 받아들일 필요 없다. 그냥 주사위 던지기 같은 것들이 시행이다.)

- 자연현상(지진, 파도 등)이나 사회현상 (A대학 입학경쟁률 등)은 동일한 조건에서 반복할 수 없고 일반적인 결과를 예측할 수 없다. 시행이 되기 위해서는 주사위 던지기나 동전 던지기처럼 반복할 수 있고, 모든 가능한 결과가 예측되어 집합으로 표현될 수 있고 개수를 셀 수 있어야 한다.

2) 표본공간

- 시행에 따른 가능한 모든 결과를 집합으로 나타낸 것이다.
- Sample space의 약자를 따서 보통은 S로 표현한다.

3) 사건

- 표본공간의 부분집합으로 시행에 따른 특정 결과이다. (표본공간은 시행에 따른 가능한 모든 결과였다.)
  ⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 정육면체 주사위를 한 번 던져서
  짝수가 나오는 사건을 A라고 할 때
  표본공간은 $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이고 사건 A는 $\{2,\ 4,\ 6\}$이다.

- 혹시나 'S의 부분집합 중 $\{2\}$나 $\{2,\ 4\}$와 같은 사건도 짝수의 눈이 나오는 사건이 아닌가?'라고 묻는다면 '아니다.' 짝수의 눈이 나오는 사건이라고 한다면 짝수의 눈에 해당하는 모든 결과를 원소로 갖는 집합을 뜻한다.

참고) 곱집합

- 순서쌍을 원소로 갖는 집합이고 $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$으로 표현한다.
  ⇨ 예를 들어 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{4,\ 5\}$라면 $A \times B = \{(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5)\}$
  $B \times A = \{(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3)\}$
  앞으로 우리가 구해야 하는 확률은 주로 곱집합에 해당하는 상황을 다룬다.

코칭 처음에는 원칙대로 집합을 이용해서 표본공간을 표현하지만 나중에는 대부분 표를 이용해서 표현할 것이다.
표를 이용하여 같은 성질이 있는 원소끼리 모아서 표현하면 표본공간을 관찰하거나 사건을 분석하기에 용이하기 때문이다. 물론 표본공간이나 사건을 구해야 하는 (사소한) 문제가 나온다면 집합으로 표현하는 것이 원칙이다.

티칭 표본공간과 사건의 느낌

- 공통점 : 표본공간과 사건은 모두 집합으로 표현된다.
- 차이점 : 표본공간은 문제에서 상황(시행)이 제시되어 있으면 그것에 대한 결과로서 직관적으로 느껴지는 집합이다.
  사건은 그냥 정해지는 것으로 〈짝수의 눈이 나오는 사건〉 〈소수의 눈이 나오는 사건〉과 같이
  (원인 → 결과)로서 직관적으로 예측되는 집합이 아닌 조건에 따라 인위적으로 정해지는 비직관적 집합이다.

⇨ 그래서 문제를 읽다보면 표본공간은 직관적으로 느껴지고 사건은 그냥 정해진다.

001 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 정육면체 주사위를 한 번 던지는 시행에서 다음을 구하여라.
(1) 표본공간 S (2) 홀수의 눈이 나오는 사건 A

- 표본공간과 사건은 집합으로 표시한다.
  표본공간과 사건을 직접 구하는 이런 문제는 너무 쉬워 시험에 나올 가능성이 적다.

정답은 (1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (2) $A = \{1, 3, 5\}$

2. 시행의 구분

- 표본공간을 구체적으로 느끼기 위해서 시행을 정밀하게 구분해보자.

1) 단순시행 (시간순서 無)

- 한 번의 시행에서 <하나의 양>을 원소로 갖는 표본공간이 나오는 시행을 말한다.
  하나의 양이라는 것은 아래에 나오는 <순서쌍>과 비교해서 이해하면 된다.

⇨ 예를 들어 주사위를 던지는 시행에 대한 표본공간은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$인데 이 각각의 원소들이 하나의 양이다.

2) 복합시행 (시간순서 無)

- 한 번의 시행에서 <순서쌍>을 원소로 가지는 표본공간이 나오는 시행을 말한다.
  이것은 바로 아래에서 시간의 순서가 있는 시행이 모여 하나의 시행을 이루는 경우와 비교할 수 있다. 이 경우도 표본공간은 <순서쌍>을 원소로 가진다.

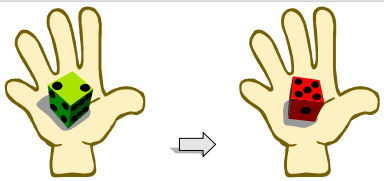
⇨ 예를 들어 주사위 2개를 동시에 던질 경우 나올 수 있는 모든 가능한 결과는
$\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,(1,\ 6),\ (2,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}$으로 표현될 수 있다. - 표본공간의 각 원소가 순서쌍이다.

3) 독립적 선후시행 (시간순서 有)

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 주사위를 두 번 던져서 (두 번 던지는 것은 시간의 순서가 있다.)
나올 수 있는 모든 가능한 결과는 $\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,(1,\ 6),\ (2,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}$으로 표현될 수 있다.
이 시행에서 먼저 주사위를 던지는 행위를 <선 시행>이라 하고
다음에 주사위를 던지는 시행을 <후 시행>이라고 할 경우,
<선 시행>의 결과가 <후 시행>에 영향을 주지 않는다. 이때 이 각각의 시행을 <독립시행>이라고 한다.

- <독립적 선후시행>은 시간의 순서가 있는 여러 번의 독립시행들이 모여 만들어진 시행이다.
  <독립적 선후시행>에 의한 실제 표본공간을 S라 할 때,
  <선 시행>에 따른 표본공간을 S_1, <후 시행>에 따른 표본공간을 S_2라고 표현할 것이다.
  (만약, 이후에도 시행이 더 일어난다면 $S_3,\ S_4,\ \cdots$)

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 주사위를 두 번 던질 때,
<선 시행>에 따른 표본공간을 S_1, <후 시행>에 따른 표본공간을 S_2라고 하면
$S_1 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\quad S_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\quad S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,(1,\ 6),\ (2,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 6)\}$
물론, 이 조건에서 <실제 표본공간>은 S이다. S_1이나 S_2는 나중에 사건을 분석하기 위해 필요한 개념이다.

	
복합시행	독립적 선후시행

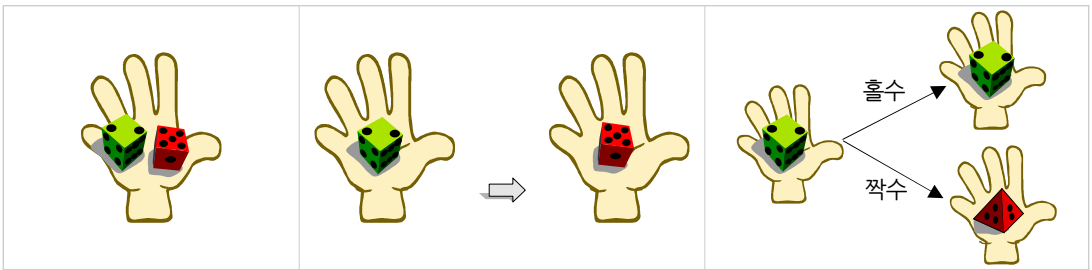
4) 종속적 선후시행 (시간순서 有)

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 정육면체 주사위를 던져
홀수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 새겨진 정육면체 주사위를 던지고,
짝수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4가 각 면에 새겨진 정사면체 주사위를 던지는 시행에서 모든 가능한 결과는

$$\{(1,\ 1),\ \cdots,(3,\ 1),\ \cdots,\ (5,\ 1),\ \cdots,\ (5,\ 6),\ (2,\ 1),\ \cdots,\ (4,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 1),\ \cdots,\ (6,\ 4)\}$$

으로 표현될 수 있다.
이 시행에서 먼저 주사위를 던지는 행위를 <선 시행>이라 하고
다음에 주사위를 던지는 시행을 <후 시행>이라고 할 경우,
<선 시행>의 결과가 <후 시행>에 영향을 준다. 이때, 이러한 각각의 시행을 <종속시행>이라고 한다.

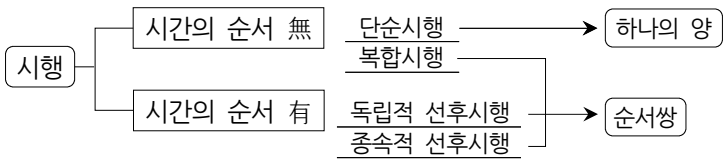
- <종속적 선후시행>은 시간의 순서가 있는 여러 번의 종속시행들이 모여 만들어진 시행이다.
  <종속적 선후시행>에 의한 실제 표본공간을 S라 할 때,
  <선 시행>에 따른 표본공간을 S_1, <후 시행>에 따른 표본공간을 S_2라고 표현한다.



복합시행	독립적 선후시행	종속적 선후시행

코칭 <복합시행>과 <독립적 선후시행 or 종속적 선후시행>의 관계
<복합시행>은 항상 <독립적 선후시행 or 종속적 선후시행>으로 바꾸어 생각할 수 있는데
지금 당장 이것을 생각할 필요는 없다. 나중에 책의 뒷부분에서
<Part 2. 비율의 면적화>에 관한 내용을 학습하고 <Part 3. 비율의 마법>을 통해 이해하면
<복합시행>과 <독립적 선후시행 or 종속적 선후시행>의 관계를 활용해 <수학적 확률>을 쉽게 풀 수 있다.

코칭 도식화



개념의 용어화

: 우리의 뇌는 추상적인 것에 구체적인 단어를 대응시켜 기억을 한다. 그래서 그런 단어를 keyword라고 하는 것이다. keyword가 없는 기억은 휘발성이 강하다. 우리에게 각자 이름이 있는 것처럼 개념에도 이름이 있어야 한다. 그 이름을 바탕으로 우리는 개념을 기억하고 사용할 수 있다.

표본공간을 올바로 관찰하기 위해서는
반드시 <시행을 구분>한다.
단순시행 복합시행
독립적 선후시행 종속적 선후시행

002 이해를 위한 예제

주머니에 1, 2, 3이 적힌 크기와 모양이 같은 3개의 공이 있다. 다음 시행에 따른 표본공간을 집합으로 표현하고 <단순시행>, <복합시행>, <독립적 선후시행>, <종속적 선후시행>으로 구분하여라.

(1) 이 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다.
(2) 이 주머니에서 2개의 공을 꺼낸다.
(3) 이와 같은 주머니가 2개 있을 때, 각각의 주머니에서 동시에 한 개의 공을 꺼낸다.
(4) 이 주머니에서 1개 씩 2번 공을 꺼낸다. (단, 꺼낸 공을 다시 넣는다.)
(5) 이 주머니에서 1개 씩 2번 공을 꺼낸다. (단, 꺼낸 공을 다시 넣지 않는다.)

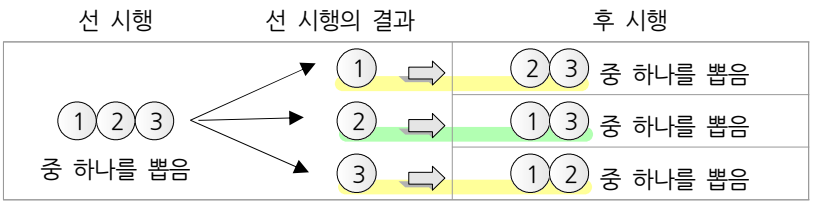
(1) 이 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다.
- 하나의 양을 원소로 가지는 단순시행이며
  $S = \{1,\ 2,\ 3\}$

(2) 이 주머니에서 2개의 공을 꺼낸다.
- 순서쌍을 원소로 가지지만 시행은 시간순서 없이 한 번만 발생하므로 복합시행이며
  $S = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)\}$

(3) 이와 같은 주머니가 2개 있을 때, 각각의 주머니에서 동시에 한 개의 공을 꺼낸다.
- 순서쌍을 원소로 가지고, 시행은 시간순서 없이 한 번만 발생한다.
  즉, 복합시행이며 $S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)\}$

(4) 이 주머니에서 1개씩 2번 공을 꺼낸다. (단, 꺼낸 공을 다시 넣는다.)
- 순서쌍을 원소로 가지고, 시행은 시간의 순서에 따라 두 번 연속으로 발생하며 꺼낸 공을 다시 넣기 때문에 <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받지 않는다.
  즉, 독립적 선후시행이며 $S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)\}$

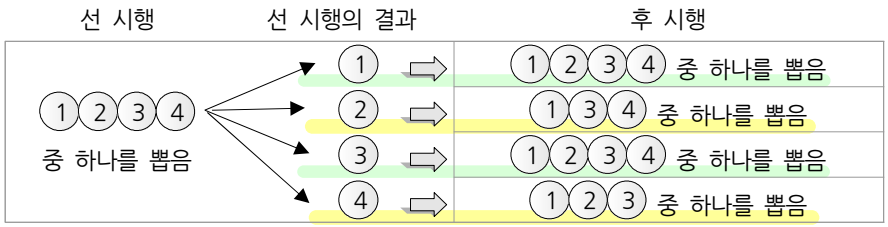
(5) 이 주머니에서 1개 씩 2번 공을 꺼낸다. (단, 꺼낸 공을 다시 넣지 않는다.)
- 순서쌍을 원소로 가지고, 시행은 시간의 순서에 따라 두 번 연속으로 발생하며 꺼낸 공을 다시 넣지 않기 때문에 <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는다.



즉, 종속적 선후시행이며 $S = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2)\}$

003 이해를 위한 예제

주머니에 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내 홀수의 눈이 나오면 공을 다시 넣은 후 같은 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고 짝수의 눈이 나오면 다시 넣지 않고 한 개의 공을 꺼낸다. 이 시행에 따른 표본공간을 집합으로 표현하고 <단순시행>, <복합시행>, <독립적 선후시행>, <종속적 선후시행> 중 어떤 시행인지 설명하여라.



- 순서쌍을 원소로 가지고, 시행은 시간의 순서에 따라 두 번 연속으로 발생하며 위의 표와 같이 <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는다. 즉, 종속적 선후시행 이며 표본공간은

$S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\}$

3. 사건의 종류와 관계

1) 사건의 종류

① 근원사건 : 더 이상 세분할 수 없는 사건

⇨ 근원사건은 원소가 1개인 집합이다. 즉, 근원사건의 개수 = 원소의 개수

② 전사건 (=전체집합) : 반드시 일어나는 사건

⇨ 전사건은 표본공간과 같다.

③ 공사건 (=공집합) : 절대로 일어나지 않는 사건 - 예를 들면 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위를 던져 5가 나오는 사건

④ 여사건 (=여집합)

⑤ A, B 두 사건의 합사건 $(A \cup B)$: A 또는 B가 일어나는 사건

⑥ A, B 두 사건의 곱사건 $(A \cap B)$: A, B가 동시에 일어나는 사건

2) 사건의 관계

- 앞에서 직관적으로 이해했던 <독립시행, 종속시행>과는 달리 <독립사건, 종속사건>은 지금 당장은 완전히 이해할 수 없다. 나중에 정의되는 <조건부 확률>을 통해서 수식적으로 파악하는 것이다. 당장은 이런 용어가 있다는 것과 정의만 알고 넘어간다. (단, 배반사건은 쉬운 개념이므로 바로 이해한다.)

① 배반사건의 관계 : 두 사건이 교집합이 없는 경우

⇨ 공사건은 모든 사건과 배반사건이다. / A와 A^c 은 배반사건의 관계이다.

② 독립사건의 관계 : 두 사건이 서로 일어날 확률에 영향을 주지 않는 사건의 관계

③ 종속사건의 관계 : 두 사건이 서로 일어날 확률에 영향을 주는 사건의 관계

3) 시차에 다른 사건의 분류

- 독립적 선후시행 또는 종속적 선후시행에서 발생하는 사건을 <시차>에 따라 용어를 구분해보자. 이것은 고등과정에서 사건을 다루는 정식용어는 아니지만 시행과 사건을 분석하는 데 도움이 된다.

① 선행사건 : 시간순서 상 앞에 발생하는 사건으로 <선 시행 : S_1>에서 발생하는 사건을 말한다.

② 후행사건 : 시간순서 상 뒤에 발생하는 사건으로 <후 시행 : S_2>에서 발생하는 사건을 말한다.

③ 전행사건 : <선 시행과 후 시행>을 동시에 고려해야 하는 사건으로 <시행 : S>에서 발생하는 사건을 말한다.

⇨ 예를 들어 주사위를 두 번 던졌을 때, 첫 번째 던진 주사위에서 짝수의 눈이 나오는 사건은 <선행사건>
두 번째 던진 주사위에서 홀수의 눈이 나오는 사건은 <후행사건>
두 주사위의 눈의 합이 5인 사건은 <전행사건>이라고 부르기로 한다.

- <선행사건>이라도 <선 시행의 표본공간인 S_1>에서 구하면 안 되고 S에서 구해야 하므로 순서쌍으로 표현된다. <선행사건>과 <후행사건>은 수학의 정식용어가 아닌 사건을 언어적으로 표현했을 때 느껴지는 느낌이다. (경험적)

코칭 <독립시행>과 <종속시행>은 주어진 상황에 따라서 직관적으로 판단이 가능하지만 <독립사건>과 <종속사건>은 수식적으로 구분된다. - Part 2.에서 자세히 다룬다.

티칭 합사건은 합집합의 기호를 사용하는데 왜 곱사건은 교집합의 기호를 사용하는지 의문인 사람들은 이 부분을 잘 읽어본다. 이것을 납득하지 못하는 이유는 보통 머릿속으로 단순시행만을 가정하고 생각하기 때문이다.

⇨ 예를 들어 주사위를 한 번 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B라고 한다면 두 사건의 곱사건인 $A \cap B = \{2\}$이므로 어디에도 곱하는 느낌을 찾아볼 수가 없다.
그러나 사실 우리가 다루는 대부분의 상황은 <선후시행>의 상황이고 이것이 반영되어 용어가 정해진 것이다.
(단순시행에서 확률을 구하는 것은 중학생에게도 너무 쉬운 문제이다.)

⇨ 예를 들어 주사위를 두 번 던지는 시행에서 먼저 던진 주사위가 홀수의 눈이 나오는 사건을 A, 다음에 던진 주사위가 짝수의 눈이 나오는 사건을 B라고 하자.
이때 두 사건 A, B가 동시에 발생하는 사건인 $A \cap B$는 다음과 같다.

사건 $A = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots\}$이고,

사건 $B = \{(1,\ 2),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (1,\ 4),\ (2,\ 4),\ \cdots,\ (1,\ 6),\ (2,\ 6),\ \cdots\}$이므로

사건 $A \cap B = \{(1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (1,\ 6),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (3,\ 6),\ (5,\ 2),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6)\}$

여기에서 $A \cap B$로 표현되는 사건의 원소의 개수를 관찰해보면 $n(\text{짝수}) \times n(\text{홀수})$로 우리가 앞서 공부했던 경우의 수에서 곱의 법칙에 해당한다.
이처럼 우리가 주로 다루는 상황에서는 $A \cap B$의 원소들이 <교집합의 느낌>으로 정해지는 것이 아니라 <곱의 법칙의 느낌>으로 정해지고, 이러한 사실이 용어를 정할 때 반영된 것이다.

⇨ 추가로 사건 A를 <선행사건>이라고 볼 수 있는데 $A = \{1,\ 3,\ 5\}$라고 표현하지 않고,
$A = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots\}$라고 표현했음을 눈여겨보자.
바로 전 페이지에서 <선행사건>이라도 <선 시행에 의한 표본공간 S_1>에서 구하면 안 되고, S에서 구해야 한다고 강조했다.

004 이해를 위한 예제

각 면에 3, 5, 7, 9, 11, 13의 숫자가 적혀 있는 정육면체를 던지는 시행에 대하여 다음 보기의 사건 중 공사건의 개수는?

〈보기〉

ㄱ. 짝수가 나오는 사건　　ㄴ. 소수가 나오는 사건

ㄷ. 12의 약수가 나오는 사건　　ㄹ. 6의 배수가 나오는 사건

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

<단순시행>에서 사건의 의미를 생각한다.

ㄱ에서 각 면에 짝수가 존재하지 않으므로 ㄱ은 나올 수 없는 사건이다. - 즉, 공사건

ㄴ에서 소수가 나오는 사건 $=\{3,5,7,11,13\}$이다.

ㄷ에서 12의 약수가 나오는 사건 $=\{3\}$이다. - 즉, 근원사건

ㄹ에서 각 면에 6의 배수가 존재하지 않으므로 ㄹ은 나올 수 없는 사건이다. - 즉, 공사건

정답은 ③

티칭 정수 분류법 (촌철살인 확률과 통계 1 - Part 2. 개념의 외연)

양의 약수가 한 개 ⇨ 1 (혼자)	양의 약수가 홀수 개 ⇨ 완전제곱수
양의 약수가 두 개 ⇨ 소수 (무수히 많다.)	양의 약수가 짝수 개 ⇨ 완전제곱수 이외의 수
양의 약수가 세 개 이상 ⇨ 합성수	

005 이해를 위한 예제

1부터 4까지의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드 중 강인이가 먼저 한 장을 뽑아 숫자를 확인 하고 다시 넣고 지용이가 이어서 한 장을 뽑아 숫자를 확인한다고 하자. 강인이가 소수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 지용이가 홀수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 할 때 다음을 구하여라.

(1) A　(2) $A\cap B$　(3) $A\cup B$

<독립적 선후시행>에서 사건의 의미를 생각한다.

표본공간 S

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

- 표본공간의 각 원소는 (선시행의 결과, 후시행의 결과)로 표시하였다.

(1) $A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

- 사건 A는 선행사건으로 보통 $A=\{2,3\}$라고 생각하기 쉽지만 사건은 항상 <전체시행>에서 생각해야 하므로 위의 표에서 에 해당하는 모든 원소를 가지는 집합이다. 사건 B 역시 에 해당하는 모든 원소를 가지는 집합이다.

(2) $A\cap B=\{(2,1),(3,1),(2,3),(3,3)\}$ - 즉, 위의 표에서 와 에 동시에 해당하는 모든 원소이다.

(3) $A\cup B=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,3)\}$

- 즉, 위의 표에서 또는 에 해당하는 모든 원소이다.

006 이해를 위한 예제

1부터 4까지의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드 중 강인이가 먼저 한 장을 뽑고 다시 넣지 않는다. 지용이가 이어서 한 장을 뽑을 때, 강인이가 소수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 지용이가 홀수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 할 때 다음을 구하여라.

(1) A^c (2) $A \cap B$ (3) $A \cup B$

<종속적 선후시행>에서 사건의 의미를 생각한다.

표본공간 S

	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)		(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)		(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	

- 표본공간의 각 원소는 (선시행의 결과, 후시행의 결과)로 표시하였다.

(1) $A^c = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ - 를 제외한 모든 원소이다.

(2) $A \cap B = \{(2, 1), (3, 1), (2, 3)\}$ - 즉, 위의 표에서 와 에 동시에 해당하는 모든 원소이다.

(3) $A \cup B = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$
- 즉, 위의 표에서 또는 에 해당하는 모든 원소이다.

007 이해를 위한 예제

1부터 4까지의 숫자가 하나씩 적힌 4장의 카드 중 강인이가 먼저 한 장을 뽑고 지용이가 이어서 한 장을 뽑을 때, 강인이가 짝수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 지용이가 홀수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라고 하자. 이때 사건 A와 B가 배반인지 배반이 아닌지 서술하시오. (단, 뽑은 카드는 다시 넣는다.)

표본공간 S

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

- 짝수가 나오는 사건과 홀수가 나오는 사건이 배반이라고 착각하는 것은 단순시행을 생각하기 때문이다.
- <선행사건 A>는 위의 표에서 에 해당하는 모든 원소를 가지는 집합이다.
  <후행사건 B> 역시 에 해당하는 모든 원소를 가지는 집합이다.

즉, $A \cap B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$이므로 두 사건은 배반의 관계가 아니다.

4. 조건을 만족하는 사건의 개수

1) 근원사건의 개수

- <사건 A의 근원사건의 개수>는 <사건 A의 원소의 개수>와 같다. 그리고 이것은 사실 <사건 A에 해당하는 경우의 수>이다.
- 근원사건이란 <수학적 확률>을 정의하기 위해 사용되는 용어로서 굳이 <원소>와 <근원사건>을 구분하는 이유는 확률을 정의하는 과정에서 <사건>이라는 말이 필요하기 때문이다.

근원사건의 개수 = 원소의 개수 = 경우의 수

2) 사건 A와 배반인 사건의 개수

⇨ 예를 들어 표본공간 $S = \{a, b, c, d\}$에서 사건 $A = \{a, b\}$와 배반인 사건은 $\{\ \}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{c, d\}$를 생각할 수 있다. 그러므로 사건 A와 배반인 사건의 개수는 4개다. 이와 같이 배반인 사건 중 가장 많은 원소를 가지는 사건은 A^c이고 가장 적은 원소를 가지는 사건은 공사건이다.
결과적으로 A와 배반인 사건의 개수는 A^c의 부분집합의 개수와 같다.

티칭 그 외에도 여러 가지 조건을 만족하는 사건의 개수를 물어볼 수 있지만 자주 나오지 않는다.
단지 여기에서 설명하고자 하는 것은 <사건 = 표본공간의 부분집합>이라는 말의 표현에서 발생할 수 있는 혼동에 대한 부분이다. 즉, 사건이 부분집합이기 때문에 <사건의 개수 = 부분집합의 개수>라고 잘못 생각하는 경우가 있다. 이것은 수학이 아닌 국어의 문제다.

⇨ 예를 들어 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 <짝수의 눈이 나오는 사건>을 A라고 하면 $A = \{2, 4, 6\}$이다.
여기에서 <짝수의 눈이 나오는 사건의 개수>라는 말이 의미가 없다.
이것은 집합 A가 $\{2, 4, 6\}$으로 정해져있는데 집합 A의 개수를 구하라는 것이나 마찬가지이다.
이것은 당연히 1개이다. 여기에서 착각하는 친구들은 집합 A의 부분집합의 개수를 구해서 2^3이라고 생각할 수 있는데 어차피 이런 문제가 나오지 않으므로 큰 문제가 없다.
다만, 이렇게 잘못 확장시킨 생각은
'아...! <짝수의 눈이 나오는 사건의 개수>가 2^3이라는 말은 <짝수의 눈이 나오는 사건>이 $\{2, 4, 6\}$일 수도 있고 $\{2, 4\}$일 수도 있고...'와 같은 잘못된 착각을 불러올 수 있기 때문에 주의해야 한다.
(이것은 필자가 처음 공부했을 때 겪었던 경험이다.)

즉, 어떤 조건을 만족하는 사건의 개수 (배반인 사건의 개수, 나중에는 독립인 사건의 개수 등)는 물어볼 수 있겠으나 위와 같이 <특정 사건의 개수>는 물어보지 않는다.
⇨ 다시 한 번 말하지만 표본공간을 S라 할 때, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 <짝수의 눈이 나오는 사건>을 A라고 하면 $A = \{2, 4, 6\}$으로 유일하다.

008 이해를 위한 예제

한 개의 동전을 세 번 던지는 시행에서 세 번째에 앞면이 나오는 사건을 A라 할 때, 사건 A에 속하는 근원사건의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

근원사건의 개수는 원소의 개수와 같다. 동전의 앞면은 H, 뒷면을 T라고 할 경우 표본공간 S는 다음과 같다.

$$S = \{(H,H,H),\ (H,H,T),\ (H,T,H),\ (T,H,H),\ (H,T,T),\ (T,H,T),\ (T,T,H),\ (T,T,T)\}$$

이 중 세 번째에 앞면이 나오는 사건 A는 $A = \{(H,H,H),\ (H,T,H),\ (T,H,H),\ (T,T,H)\}$이다.

즉, 사건 A의 근원사건은 4가지이다.

정답은 ②

티칭 이 시행의 종류는 독립적 선후시행이다.

코칭 사실 위와 같이 표본공간을 구성하지 않아도 사건 A에 해당하는 경우의 수를 구하면 된다,

		H

에서 빈 칸에 H 또는 T가 들어가는 경우의 수이므로 간단한 곱의 법칙에 의하여 $2\times2 = 4$이다.

009 이해를 위한 예제

표본공간 $S=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 사건 A, B가 $A=\{3,\ 4,\ 8\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$일 때, 두 사건 A, B와 모두 배반인 사건 C의 개수를 구하여라.

두 사건 A, B와 모두 배반이려면 $A\cup B$와 배반이어야 한다.

즉, $A\cup B = \{3,4,5,6,8\}$과 배반인 사건은 $\{\ \}, \{7\}$이다.

정답은 2개

#2 수학적 확률

- $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 〈전체에서 부분이 차지하는 비율〉을 구하는 확률을 수학적 확률이라고 한다.

- 수학적 확률 역시 〈경우의 수〉와 마찬가지로 〈분할적 사고〉와 〈전체를 논리적으로 나열하는 능력〉이 중요하다.
  이것을 통해서 〈표본공간〉을 위에서 내려다보는 느낌으로 풀어야 실수가 없다.
  〈촌철살인 확률과 통계 1〉에서 공부한 사고를 그대로 반영하되 〈확률식 용어〉를 함께 사용하기로 한다.

  〈분할적 사고〉 = 〈사건의 분석〉

- 해설 방식에 대하여
  1) 수학적 확률에서 분모에 해당하는 경우의 수를 구한다. (이 부분은 어려워하는 학생이 거의 없다.)
     분모에 쓴 〈순열과 조합의 수식〉을 〈상황〉으로 옮겨 〈표본공간〉을 구성하고 관찰한다.
     분모의 상황에 맞게 몇 가지 경우를 나열하는 추론의 과정이 필요하다. (이 과정을 시각적으로 표현하였다.)

  2) 〈단순시행〉 〈복합시행〉 〈독립적 선후시행〉 〈종속적 선후시행〉을 구분하는 것은 티칭을 통해 다룬다.
     (나중에는 중요해지기 때문이다.) 사건 역시 시간의 순서가 있는 시행에서 구분해 볼 필요가 있는 경우 티칭을 통해
     〈선행사건〉 〈후행사건〉 〈전행사건〉으로 구분해본다.

1. 수학적 확률의 계산

1) 내용적 근거

- 수학적 확률을 계산하려면 표본공간의 각 원소는 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되어야 한다.
  이것을 '사건'이라는 용어를 빌려 표현하자면 표본공간의 모든 근원사건이 일어날 확률이 같아야 한다.
  이때, 표본공간의 근원사건의 개수가 m가지이고 A의 근원사건의 개수가 r가지이면 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{r}{m}$

  ⇨ 예를 들어 1, 1, 1, 2, 3, 4가 각각 적혀있는 공이 주머니에 들어있을 때 하나를 뽑아 나올 수 있는 모든 가능한 〈경우의 수〉는 1, 2, 3, 4 네 가지이다. 그러나 1이 나올 확률은 사실 $\frac{1}{4}$이 아닌 $\frac{3}{6}$임을 누구나 느낄 수 있다. 그것은 누구나 1의 비율을 느끼기 때문이다. 확률은 앞서 말했던 것처럼 비율이고, 그 비율을 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구할 수 있을 때 우리는 수학적 확률이라 한다. 이처럼 같은 것이 존재하는 경우에도 얼마든지 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$를 통해서 전체에서 1이 차지하는 비율을 느낄 수 있으며, 따라서 수학적 확률을 구하는데 전혀 무리가 없다.

- 단지, 조금 문제가 될 수 있는 것은 여기에서 〈개수〉가 정확히 〈경우의 수〉와 일치하는 개념은 아니라는 것이다.
  확률에서는 특정사건이 전체에서 차지하는 〈비율〉을 구하는 것이기 때문에 같은 것이 존재하더라도 다른 것으로 보고 경우의 수를 세야 〈올바른 개수〉가 나오고 〈올바른 비율〉이 나온다.

  수학적 확률에서의 〈개수〉 = 〈같은 것을 다르게 본 경우의 수〉

2) 같은 것을 포함한 확률

- 우리가 비교적 간단한 경우의 수를 이용한 확률문제를 틀린다면 아마도 그것은 <같은 것을 포함한 확률>문제일 것이다.

<같은 것이 포함된 경우>

⇨ 경우의 수 : 같은 것이 포함된 경우에는 순열과 조합의 공식을 쓰지 않는다.

⇨ 수학적 확률 : 올바른 비율을 구하기 위해서 같은 것도 다른 것으로 보고 순열과 조합의 공식을 쓴다.

- 이것을 인지하고 있음에도 불구하고 <표본공간의 원소의 개수>는 제대로 구하고 <사건의 원소의 개수>를 잘못 구하는 경우가 있다. 이것은 문제를 푸는 과정에서 <경우의 수>와 <확률>의 개념이 충돌하기 때문인데 반드시 분모를 센 방식으로 분자도 세어야 한다. 가장 확실한 방법은 <표본공간>을 구성하고 들여다보는 느낌으로 <사건의 원소의 개수>를 따지는 것이다. 이러한 방식으로 문제를 풀면 실수하지 않을 것이다.

3) 결국 경우의 수 문제

- 수학적 확률은 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구하기 때문에 결국 경우의 수 문제이다.

경우의 수 문제와의 차이점이라면 위에서 언급한 바와 같이 <같은 것도 다르게 봐야 한다.>는 사실이다.

티칭 위와 같이 같은 원소가 존재하는 상황에서 순서쌍을 원소로 가지는 표본공간이 나오는 경우 헷갈릴 수 있다.
이런 경우 아래문자를 붙여서 1_a, 1_b, 1_c, 2, 3, 4라고 두면 실수할 가능성이 줄어든다.

코칭 앞에서도 언급했듯이 <시행과 사건을 분석>하는 것은 이 단원에서 문제를 푸는 것과 크게 관계가 없더라도 항상 순간적으로 확인할 수 있어야 하므로 해설지의 마지막에 티칭으로 추가 설명하기로 한다.
나중에 표본공간을 관찰하고 사건을 분석 할 때 <기본이면서 핵심>이 되는 부분이다.

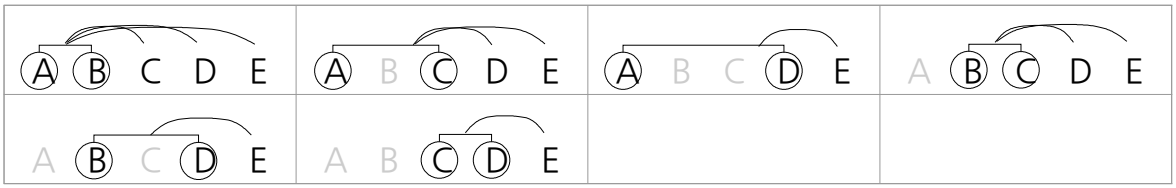
코칭 경우의 수의 맹점 ⇨ 상황별 비율을 고려하지 못한다.
이 내용은 <Part 3의 개념의 외연>에서 따로 다루기로 한다.
이 부분은 논술주제로 다뤄지며 <경우의 수의 정확한 사고방식>과 <확률의 특이성>만 잘 고려하여 계산한다면 대부분의 문제와는 상관이 없다. 만약, 시작부터 <경우의 수의 맹점>을 공부하게 된다면 혼란이 가중되어서 <99%의 문제를 푸는데 아무 문제없는 사고방식>이 익숙해지기도 전에 고민이 많아질 것이다.
즉, 구더기 무서워 장 못 담그는 일이 발생하지 않도록 <기본내용>을 충분히 숙지한 후 어느 정도 문제를 충분히 풀 수 있게 되었을 때 이 내용을 다루기로 한다.

티칭 징검다리 기법 - <조합>의 상황에서 순간적으로 나올 수 있는 모든 경우를 확인하는 방법
나올 수 있는 경우를 빠짐없이 나열해 보는 것은 문제의 본질을 파악하는데 큰 힘이 된다.
이것은 배운다기보다는 많은 학생들이 이미 직관적으로 활용하고 있는 방법이다.

⇨ 예를 들어 <5개 중 2개를 뽑는 상황>이라면

- 먼저 A를 고정시킨 다음 오른쪽으로 한 개씩 짝을 짓는다.
이렇게 A가 포함되는 경우를 모두 셌다면 이번엔 B를 고정시키고 마찬가지로 오른쪽으로 한 개씩 짝을 짓는다.
이런 방식으로 오른쪽으로 마지막까지 진행하면 5개중 2개를 뽑는 모든 경우를 관찰할 수 있다.

⇨ 이번에는 <5개 중 3개를 뽑는 상황>을 생각해보자.



- 이것은 문제에서 처음 주어진 상황을 이해하기 위해서 하는 추론의 한 가지 기법일 뿐이다.
이를 통하여 <뽑는 모든 경우>를 빠짐없이 생각해 볼 수 있다.

- <조합의 상황>을 <추상적으로 생각하는 습관>이 있다면 이것은 반드시 고쳐야 한다. 위와 같은 방법으로 약간의 시간만 투자하면 <뽑힌 대상을 구체적으로 관찰>할 수 있고, 이것은 문제의 상황을 이해하고 본질을 파악하는데 큰 힘이 된다.

- 만약에 <남자 5명 중 2명>을 뽑고 <여자 4명 중 2명>을 뽑아 총 4명을 뽑는 경우 ${}_5C_2 \times {}_4C_2$인데 ${}_5C_2$와 ${}_4C_2$와 같이 <같은 집단에서 일부를 뽑는 상황>은 각각 <징검다리 기법>으로 구체적인 대상을 관찰할 수 있고 $\times$의 상황은 <수형도>를 통해서 구체적으로 이해할 수 있다.

010 이해를 위한 예제 2007. 9. 나형(82%). 27번. 3점

흰 공 2개, 노란 공 2개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 공의 색깔이 모두 다를 확률은? (단, 모든 공의 크기와 모양은 같다.)

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

확률에서는 같은 것도 다른 것으로 본다.

시행 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 ⇨ 즉, $n(S) = {}_6C_3$

사건 공의 색깔이 모두 다를 확률

표본공간의 관찰과 사건의 분석 ${}_6C_3$은 <서로 다른 6개의 공>에서 <서로 다른 3개>를 뽑는 상황이므로

흰 공 2개, 노란 공 2개, 파란 공 2개를 각각 ① ② ① ② ① ②라고 두고 생각한다.

${}_6C_3$의 구체적 상황

① ② ①
① ② ②
① ② ①
⋮
① ① ①
⋮

결국, 이 중에서 색깔이 모두 다른 경우의 수를 찾는다.

⇨

표본공간 S : ${}_6C_3$가지

흰 공 2개	① ② ?	⇨ ${}_4C_1$
노란 공 2개	① ② ?	⇨ ${}_4C_1$
파란 공 2개	① ② ?	⇨ ${}_4C_1$
모두 1개씩	① ① ① ① ① ② ⋮	⇨ ${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1$

- 사실 이 문제는 표본공간을 관찰하지 않아도 될 정도로 매우 쉬운 문제이다.
- 흰 공, 노란 공, 파란 공이 각각 1개씩 나왔다는 의미이므로 ⇨ $n(\text{색이 모두 다름}) = {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1$

$P(\text{색이 모두 다름}) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_3} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$이므로 정답은 ①

티칭 3개의 공을 동시에 꺼낼 때

⇨ 3개의 공을 꺼내는 상황은 시간의 순서를 두고 발생하지는 않지만 집합으로 표현할 경우 각 원소가 순서쌍으로 표현되므로 복합시행이라고 할 수 있다. ⇨ $n(S) = {}_6C_3$

코칭 <촌철살인 확률과 통계 1>에서 <동동연 배고려>의 내용을 기억한다면 <조합, 곱의 법칙>으로 연결하는 것은 배열이 고려될 수 있으므로 항상 조심해야 하는 상황이라는 것을 알 것이다.
이런 간단한 식을 쓰면서도 <다른 집단에서 뽑아서 곱으로 연결>했으니 3개를 뽑는 상황만 고려되었음을 알 수 있다. (배열되는 경우의 수는 고려되지 않는다.) 원리적으로는 <수형도>를 떠올려보면 간단히 이해할 수 있으므로 당연해질 때까지 본인이 가진 Base로부터 이해하길 바란다.

공식을 써도 된다는 100%의 확신이 있을 때 공식을 쓰는 것이
<올바른 확률과 통계의 길>이다.

011 이해를 위한 예제

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공이 2개 나올 확률은?

확률에서는 같은 것도 다른 것으로 본다.

시행 3개의 공을 꺼낼 때 ⇨ $n(S) = {}_5C_3$

사건 흰 공이 2개 나올 확률

표본공간의 관찰과 사건의 분석 ${}_5C_3$은 <서로 다른 5개의 공>에서 <서로 다른 3개>를 뽑는 상황이므로

흰 공 3개와 검은 공 2개를 각각 ① ② ③ ❶ ❷라고 두고 생각한다.

${}_5C_3$의 구체적 상황

① ② ③
① ② ❶
① ② ❷
⋮

이 과정을 통해서
<흰 공이 2개 나올 확률>이라고 표현된 사건이
사실은 <흰 공 2개, 검은 공 1개>의
상황이라는 것을 인지할 수 있다.

⇨

표본공간 S : ${}_5C_3$가지

흰 공 - 세 개	① ② ③	⇨ ${}_3C_3$
흰 공 - 두 개 (검은 공 한 개)	① ② ❶ ① ③ ❶ ② ③ ❶ ① ② ❷ ① ③ ❷ ② ③ ❷	⇨ ${}_3C_2 \times {}_2C_1$
흰 공 - 한 개 (검은 공 두 개)	① ❶ ❷ ② ❶ ❷ ③ ❶ ❷	⇨ ${}_3C_1 \times {}_2C_2$

- 3개를 뽑는 시행에서 흰 공 2개가 나왔다는 것은 사실 <흰 공 2개, 검은 공 1개>가 나왔다는 것과 같은 의미이다.
  $n(\text{흰공 2개}) = {}_3C_2 \times {}_2C_1$ - 이것을 실수하지 않고 구하는 과정이 위의 과정이며 이것이 수학적 확률의 핵심이다.

- 왼쪽 <추론의 과정>으로 주어진 <사건의 의미>를 정확하게 파악하지 못했다면 <논리 없이> 나열만 한 것이다.
  오른쪽과 같이 모든 경우를 다 나열하지는 않았더라도 순간적으로 <오른쪽과 같은 기준>을 생각해 냈다면
  검은 공이 뽑히는 경우도 고려해야 한다는 숨겨진 의미를 충분히 찾을 수 있다.

- 우리가 구하는 $P(\text{흰공 2개})$은 전체 ${}_5C_3$ 중 ▭이 차지하는 비율을 구하는 것이다.
  ▭과 ▭를 모두 고려한 경우의 수를 구하려면 ${}_3C_2$에 ${}_2C_1$(검은 공 2개 중 1개를 뽑는 경우의 수)까지 곱해야 한다.

$$P(\text{흰공 2개}) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

티칭 3개의 공을 동시에 꺼낼 때

3개의 공을 꺼내는 상황은 시간의 순서를 두고 발생하지는 않지만 집합으로 표현할 경우 각 원소가 순서쌍으로 표현되므로 복합시행이라고 할 수 있다.

티칭 이 책은 시각적인 효과를 주기 위해 실제 색으로 표시했지만 보통 학생의 입장에서 문제 풀 때는 W_1, W_2, W_3, B_1, B_2와 같이 아래첨자를 쓰는 것이 일반적이다.

코칭 ${}_5C_3$의 상황을 구체적으로 생각해보지 않았을 때 $n(\text{흰공 2개}) = {}_3C_2$라고 생각하는 오류가 생긴다.

012 이해를 위한 예제 2009. 11. 나형(60%). 29번. 4점

각 면에 $1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3$ 의 숫자가 하나씩 적혀있는 정육면체 모양의 상자를 던져 윗면에 적힌 수를 읽기로 한다.
이 상자를 3 번 던질 때, 첫 번째와 두 번째 나온 수의 합이 4 이고 세 번째 나온 수가 홀수일 확률은?

① $\frac{5}{27}$ ② $\frac{11}{54}$ ③ $\frac{2}{9}$ ④ $\frac{13}{54}$ ⑤ $\frac{7}{27}$

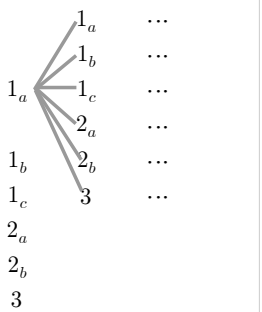
확률에서는 같은 것도 다른 것으로 본다.

시행 이 상자를 3번 던질 때 ⇨ $n(S) = 6\times6\times6$

사건 첫 번째와 두 번째 나온 수의 합이 4 이고 세 번째 나온 수가 홀수일 확률

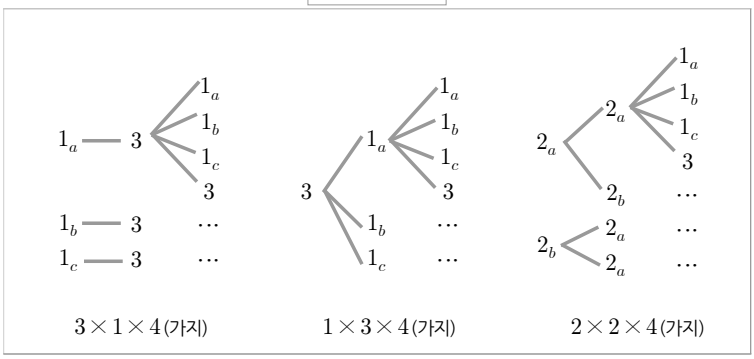
표본공간의 관찰과 사건의 분석

$6\times6\times6$의 구체적 상황



⇨

사건의 상황



- 위의 상황에서 〈첫+두 $=$ 4〉인 상황은 크게 〈$1 \rightarrow 3$〉 or 〈$3 \rightarrow 1$〉 or 〈$2 \rightarrow 2$〉으로 분할될 수 있다.

- 헷갈릴 경우 $6\times6\times6$의 실제 상황을 위의 왼쪽과 같이 상상할 수 있다면 처음 1이 나오는 경우를 3가지로 세어야 한다는 사실을 알 수 있다. 또한 앞에서 나온 수가 뒤에서 다시 나올 수 있다는 사실도 알 수 있다.
  즉, 〈첫+두 $=$ 4〉 and 〈세 $=$ 홀수〉인 경우의 수는
  $n(\text{첫+두} = 4 \text{ and 세} = \text{홀수}) = n(1,\ 3,\ \text{홀}) + n(3,\ 1,\ \text{홀}) + n(2,\ 2,\ \text{홀})$
  $= 3\cdot1\cdot4 + 1\cdot3\cdot4 + 2\cdot2\cdot4 = 40$

$P(\text{첫 번째} + \text{두 번째} = 4 \cap \text{세 번째} = \text{홀수}) = \frac{40}{6\times6\times6} = \frac{5}{27}$ 이므로 정답은 ①

티칭 이 상자를 3번 던질 때 ⇨ 시간의 순서가 있는 시행이 모여 하나의 시행을 이루고,
선 시행의 결과에 의해 후 시행이 영향을 받지 않으므로 독립적 선후시행이다.

티칭 첫 번째와 두 번째 나온 수의 합이 4 이고 세 번째 나온 수가 홀수일 확률
〈선 시행과 후 시행의 따른 결과〉를 동시에 고려해야 하는 사건이므로 〈전행사건〉이다.

코칭 분모에 해당하는 $6\times6\times6$을 구했음에도 불구하고 〈첫+두 $=$ 4〉을 만족하는 경우 중
〈1과 3이 나오는 경우〉에서 〈1과 3을 배열〉해야 하는지 물어보는 학생들이 꽤 있다.
당연히 〈$1 \rightarrow 3$〉과 〈$3 \rightarrow 1$〉을 각각 생각해야하며 이런 종류의 질문들은 〈$6\times6\times6$의 실제상황〉을 구체적으로 생각해보지 않아서 생긴다.
반드시 〈표본공간〉에 해당하는 가짓수인 $6\times6\times6$의 상황을 구체적으로 생각해보길 바란다.

013 이해를 위한 예제 2015. 9. B형(67%). 15번. 4점

주머니에 $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

확률에서는 같은 것도 다른 것으로 본다.

시행 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열 ⇨ $n(S) = {}_5C_4 \times 4!$

사건 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률

표본공간의 관찰과 사건의 분석

- $1_a,\ 1_b$, 2, 3, 4이라 했을 때 시행에 따른 모든 가능한 결과 ${}_5C_4 \times 4!$의 의미를 생각한다.
  역시 앞의 문제와 마찬가지로 실제로 4개를 정해서 나열했다고 가정해보는 <추론의 과정>이 있어야 한다.
  이 과정을 통해서 $a \le b \le c \le d$을 만족하는 경우의 수는 한 번에 셀 수 없음을 깨달을 수 있다.

${}_5C_4 \times 4!$의 구체적 상황
$1_a,\ 1_b$, 2, 3을 뽑아 배열
$1_a,\ 1_b$, 2, 4을 뽑아 배열
1_a, 2, 3, 4을 뽑아 배열
⋮

⇨

표본공간 S : ${}_5C_4 \times 4!$가지

상황 1-1	$1_a,\ 1_b$, 2, 3가 뽑힌 경우
상황 1-2	$1_a,\ 1_b$, 2, 4가 뽑힌 경우
상황 1-3	$1_a,\ 1_b$, 3, 4가 뽑힌 경우
상황 2-1	1_a, 2, 3, 4가 뽑힌 경우
상황 2-2	1_b, 2, 3, 4가 뽑힌 경우

- 결국 위와 같이 표본공간을 크게 <1이 두 개 포함된 상황>과 <1이 한 개만 포함된 상황>으로 나눈 것은
  <1이 한 개만 포함된 상황>에서는 뽑기만 하면 $a \le b \le c \le d$ 조건에 맞게 자동배열 되지만(배열하는 경우의 수 1가지)
  <1이 두 개 포함된 상황>에서는 1끼리 자리를 바꾸는 경우까지 고려해야하기 때문이다.

  <상황 1>과 같이 뽑히는 경우는 ${}_2C_2 \times {}_3C_2 = 3$이다. 이 세 가지 경우 각각에 대하여 $a \le b \le c \le d$ 조건에 맞게 배열하는 경우는 1_a와 1_b를 배열하는 두 가지씩이 존재하므로 (나머지 숫자들은 자동배열) ⇨ ${}_2C_2 \times {}_3C_2 \times 2!$

  <상황 2>와 같이 뽑히는 경우는 ${}_2C_1 \times {}_3C_3 = 2$이다. 이 두 가지 경우 각각에 대하여 $a \le b \le c \le d$ 조건에 맞게 배열하는 경우는 한 가지이므로 (자동배열) ⇨ ${}_2C_1 \times {}_3C_3$

$$n(a \le b \le c \le d) = n(1\text{이 두 개 뽑힌 상황}) + n(1\text{이 한 개 뽑힌 상황})$$
$$= {}_2C_2 \times {}_3C_2 \times 2! + {}_2C_1 \times {}_3C_3 = 8$$

$$P(a \le b \le c \le d) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2 \times 2! + {}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{1}{15}$$ 이므로 정답은 ①

티칭 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열
시간의 순서가 있는 시행이 모여 하나의 시행을 이루고, 선 시행(4개를 뽑는 시행)의 결과에 의해 후 시행(4개를 배열하는 시행)의 결과가 영향을 받으므로 종속적 선후시행이다.

티칭 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률
선 시행(뽑는 시행)과 후 시행(배열하는 시행)에 따른 결과를 동시에 고려해야 하는 사건이므로 <전행사건>이다.

코칭 <표본공간을 관찰>한다는 것은 우리가 분모에 쓰는 ${}_5C_4 \times 4!$의 상황을 <구체적으로 나열하고 관찰>한다는 것을 의미한다. 이 추론의 과정을 통해서 <사건>에 해당하는 경우의 수를 실수하지 않고 찾을 수 있다.

014 이해를 위한 예제 2006. 3. 가형(74%). 8번. 3점

대표 2명, 부대표 3명, 부원 4명인 어느 모임에서 대표 2명은 각자 나머지 7명과 모두 악수를 하였다. 그리고 부대표 3명은 각자 나머지 4명의 부원과 모두 악수를 하였다. 이 모임의 9명 중 임의로 3명을 택했을 때, 3명이 모두 서로 악수를 나눈 사람일 확률은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

시행 9명 중 임의로 3명을 택했을 때 ⇨ $n(S) = {}_9C_3$

사건 3명이 모두 서로 악수를 나눈 사람일 확률

표본공간의 관찰과 사건의 분석 대표 2명을 A_1, A_2 부대표 3명을 B_1, B_2, B_3 부원 4명을 C_1, C_2, C_3, C_4라고 할 때, 표본공간의 근원사건의 수인 ${}_9C_3$의 의미를 생각해본다.

${}_9C_3$의 구체적 상황
A_1, A_2, B_1
⋮
B_1, B_2, C_1
⋮
C_1, C_2, C_3
⋮
A_1, B_1, C_1

⇨

표본공간 S : ${}_9C_3$가지

같은 소속 없음	⇨ ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1$
같은 소속의 두 사람 (다른 소속의 한 사람)	대표 2명 ⇨ ${}_2C_2 \times {}_7C_1$ 부대표 2명 ⇨ ${}_3C_2 \times {}_6C_1$ 부원 2명 ⇨ ${}_4C_2 \times {}_5C_1$
같은 소속의 세 사람 (다른 소속의 없음)	⇨ $({}_3C_3 + {}_4C_3)$

- 위의 왼쪽과 같이 몇 번 해보고 나서야 같은 소속의 사람들끼리는 악수를 하지 않고 다른 소속의 사람과는 모두 악수를 한다는 문제의 본질을 파악할 수 있다. 즉, 우리가 구하고자 하는 상황은 ${}_9C_3$ 중에서 3명이 모두 다른 소속의 사람인 상황이다.

⇨ $n(3\text{명 모두 악수를 나눈 사람}) = {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1$

$$P(3\text{명 모두 악수를 나눈 사람}) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_9C_3} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$ 이므로 정답은 ⑤

티칭 9명 중 임의로 3명을 택했을 때 ⇨ 시간의 순서가 없고, 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다.

코칭 반드시 우리가 분모에 쓴 ${}_9C_3$의 상황을 <구체적으로 상상>해 본다.

코칭 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1$의 상황을 수형도로 생각해보면 <서로 악수하도록 3명을 뽑은 모든 경우>가 고려되었음을 알 수 있다. 이것은 <촌철살인 확률과 통계 1>의 <동동연 배고려>에서 학습한 바 있다.
<서로 다른 집단>에서 <일부를 뽑아 곱의 법칙>으로 연결하는 경우에는 <뽑힌 대상들끼리 나열되는 경우>가 고려되지 않으므로 걱정할 필요가 없다. 다만, 이것을 외우는 것은 바람직하지 않고 헷갈릴 때마다 위에서 언급한 바와 같이 ${}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1$의 상황을 구체적으로 상상하여 <당연함>으로 받아들이기를 바란다.

2. 확률의 성질 : 당연한 내용이므로 한 번 생각해 본 뒤 넘어간다.

① $0 \le P(A) \le 1$ ⇨ 전체(표본공간)에서 A가 차지하는 비율이므로 당연히 음수일 수 없다.
② $P(S)=1$ (단, S는 표본공간) ⇨ 전체에서 전체가 차지하는 비율은 1이다.
③ $A=\varnothing$ 이면 $P(A)=0$ ⇨ 사건 A의 원소가 없다면 전체에서 차지하는 비율은 0으로 나타낼 수 있다.
④ $P(A^c)=1-P(A)$

015 이해를 위한 예제

표본공간을 S, 공사건을 ϕ라 할 때, 임의의 두 사건 A, B에 대하여 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

〈보기〉
ㄱ. $0 \leqq P(A) \leqq 1$ ㄴ. $P(S)+P(\phi)=1$ ㄷ. $1 < P(S)+P(A)+P(B)+P(\phi) < 2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

가볍게 확인하고 넘어가자.
ㄱ. $0 \le P(A) \le 1$: $P(A)$는 확률을 의미하므로 ⇨ 참
ㄴ. $P(S)+P(\phi)=1$: S는 표본공간이므로 $P(S) = 1$이고 $P(\varnothing) = 0$이므로 ⇨ 참
ㄷ. $1 < P(S)+P(A)+P(B)+P(\phi) < 2$
이 식을 변형하면 $1 < 1+P(A)+P(B)+0 < 2 \Leftrightarrow 0 < P(A)+P(B) < 1$이다. A와 B가 배반사건이 아니라면 얼마든지 1을 넘길 수 있다. 참이 되는 부등식은 $0 < P(A \cup B) < 1$이다. 그러므로 거짓.
(반례) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이고 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$라면
$P(A)+P(B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$이므로 주어진 조건을 위배한다.

정답은 ③

티칭 거짓인 명제는 반례를 통해서만 증명된다. (ㄷ에서)
거짓인 명제를 물어보는 이유는 수학적 경험을 충분히 쌓았는지 물어보기 위해서이다.

- 거짓인 명제를 증명하는 방법은 반례밖에 없다. 반례를 생각하지 않고 논리적으로 증명했다고 생각하는 것은 착각이다. 반례를 찾지 않고 틀렸다는 느낌을 갖는 것은 얼핏 생각해도 반례가 너무 많아 굳이 반례를 들지 않더라도 틀렸다고 느껴졌거나 (즉, 논리기법으로 거짓임을 증명한 것이 아니라 반례가 너무 많아 당연히 틀렸다고 느낀 것) 본인의 수학적 경험이 풍부해서 반례가 있다는 사실을 직관적으로 느낀 것뿐이다. (이것 역시 반례가 있음을 느낀 것)
즉, 이런 경우도 결국 반례를 〈구체적으로〉 들지 않았을 뿐 반례가 있음을 확신한 것이다.
⇨ 거짓인 명제는 반드시 반례를 찾아보는 습관을 들인다.

- 반례로 인해 거짓이 되는 문제를 만났다면, 그리고 해설을 보고 '이걸 어떻게 생각해?'라고 느꼈다면 그 문제는 본인의 수준을 넘어가므로 일단 맘 편히 넘어가길 바란다. 수학적 경험을 좀 더 쌓고 나면 당연하게 직관적으로 판단 될 수도 있다.

#3 통계적 확률과 기하학적 확률

1. 통계적 확률

1) 통계적 확률은 조건이다.

- 통계적 확률은 과거의 경험으로부터 누적된 정보를 통해 느끼는 가능성이다.
  동일조건에서 실험이나 관찰을 통해 결과를 확인할 수 없는 경우에, 과거의 누적된 자료를 통해서 가능성을 따진다.
  과거에도 그랬다면 앞으로도 그런 경향이 있다고 생각하는 직관에 의존한 확률이다.

- 실제 통계적 확률을 따질 때는 여러 가지 외부요인을 따져야 하는데 고등학생의 입장에서 이런 원론적인 말은 할 필요가 없다. (논술에서는 해야 하는 경우도 있다.) 어차피 통계적 확률은 문제화되기보다는 <문제의 조건>으로 나온다.
  즉, $P(A) = \frac{1}{3}$이라는 조건과 <3번에 1번 꼴로 사건 A가 일어난다.>는 조건은 같은 조건으로 생각해도 좋다.

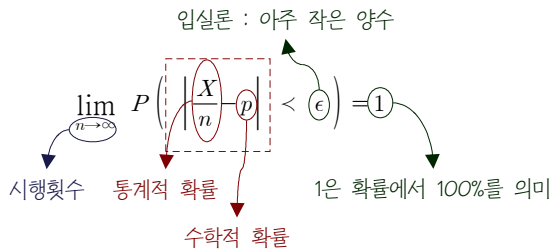
2) 큰 수의 법칙

- 큰 수의 법칙을 간단히 말하면 <시행횟수가 충분히 크면> 수학적 확률 = 통계적 확률이라는 이론이다.
- 당장은 쓸 일이 없고 사실 앞으로도 거의 볼일이 없겠지만 교과서에서는 어떤 논리나 공식을 사용하게 된다면 그 논리의 근거를 밝혀야 하기 때문에 넣어둔 것으로 생각된다.
  (물론, 내신이 어려운 학교들이나 논술 등의 시험에서는 등장하기도 한다.)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| < \epsilon\right) = 1$$

- 위의 식을 큰수의 법칙이라 하는데 이것의 증명은 나중에 <이항분포>를 배운 후 다룰 수 있다.
  (증명이라고 해봐야 별 것 없다. 위 식에 숫자 몇 개 대입해서 n이 커짐에 따라 확률 값이 1에 가까워지는 식의 경향을 보여주는 것으로 끝이다.)

- 위의 식은 시행횟수가 커질수록 수학적 확률과 통계적 확률이 비슷해진다는 것을 수식적으로 표현해 놓은 것이다.
  다음은 위의 식의 의미를 읽는 방식이다. 현재는 중요하지 않으므로 한 번 정도 읽고 넘어가자.



> 시행횟수가 충분히 크면 <통계적 확률과 수학적 확률의 차이>가 아주 작은 양수 ϵ보다 작을 확률이 1이라는 뜻으로 결국 <시행횟수가 충분히 크면> 통계적 확률 = 수학적 확률 이라는 것을 보여주는 식이다.

티칭 확률 조건에 의한 <대상의 수> 구하기

사건 A가 일어날 확률이 $P(A)$일 때, 사건 A에 해당하는 원소의 개수는 ⇨ 전체 원소의 개수$\times P(A)$
확률의 비율임을 생각하면 직관적으로 이해할 수도 있지만 앞에서 배운 식으로 얼마든지 만들어 낼 수 있다.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Leftrightarrow P(A)\times n(S) = n(A)$$

코칭 사실 위의 식에 해당하는 구체적인 상황은 <독립시행의 확률>의 상황이다.
<수학적 확률 = 통계적 확률>만 기억하고 넘어간다. <독립시행의 확률>의 상황은 Part 3.에서 따로 다룬다.

016 이해를 위한 예제

다음 표는 어느 프로 야구 선수가 한 시즌 동안 치른 경기의 결과에 대한 기록이다. 이 선수가 안타를 칠 확률을 a, 홈런을 칠 확률을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

타수	안타	홈런	볼넷	아웃
300	120	10	34	136

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{13}{30}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{17}{30}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설이 의미가 없다. 표를 보고 답을 쓴다. $P(\text{안타}) = a = \frac{120}{300}$, $P(\text{홈런}) = b = \frac{10}{300}$이므로

$a+b = \frac{130}{300} = \frac{13}{30}$

정답은 ②

코칭 이처럼 통계적 결과를 그냥 확률로 인정해야 하는 경우도 있다는 사실을 인지하는 것으로 충분하다. 야구선수의 타율은 그날의 컨디션이나 심리상태에 따라서 많이 달라질 수 있기 때문에 동일한 조건에서 실험이나 관찰을 할 수 없다. 하지만 수능과 내신에서는 그냥 확률로 인정하면 된다.

017 이해를 위한 예제

주머니 속에 흰 공과 검은 공이 합쳐서 8개 들어 있다. 이 속에서 두 개 꺼내 보고 다시 넣고 하는 일을 여러 번 되풀이 해보니 4회에 3회의 꼴로 두 개 모두 흰 공이었다고 한다. 이때 주머니 속에는 흰 공이 몇 개 있다고 할 수 있는가?

4회에 3회의 꼴로 두 개 모두 흰 공 : 통계적 결과를 확률로 준 것이다.

이 조건을 통해서 <두 개를 꺼낼 때, 두 개 모두 흰 공일 확률>이 $\frac{3}{4}$이라는 것을 알아낸다.

주머니 속에 흰 공과 검은 공이 합쳐서 8개 들어있으므로 흰 공의 개수를 n개라 하면

$P(\text{흰공 2개}) = \frac{{}_nC_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\,{}_nC_2 = 3\,{}_8C_2 \Leftrightarrow 2n(n-1) = 84 \Leftrightarrow n^2-n-42 = 0$

$\Leftrightarrow (n-7)(n+6) = 0 \Leftrightarrow n$은 -6이 될 수 없다. 즉, $n = 7$

정답은 7개

2. 기하학적 확률

- $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 따질 수 없어서 $\frac{\text{양}}{\text{양}}$으로 표현되는 확률을 말한다.

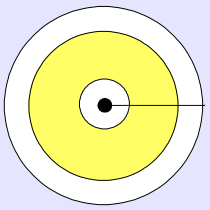
연속적인 변량을 크기로 갖는 전사건의 영역 S안에서 각각의 점을 잡을 가능성이 같은 정도로 기대될 때, 영역 S에 포함되어 있는 영역 A에 대하여 영역 S에서 임의로 잡은 점이 영역 A에 속할 확률

$P(A) = \frac{A\text{의 영역}}{\text{전체영역}}$이고, 이것을 사건 A가 일어날 <기하학적인 확률>이라고 한다.

⇨ 결국 $\frac{A\text{의 길이}}{\text{전체길이}}$, $\frac{A\text{의 넓이}}{\text{전체넓이}}$, $\frac{A\text{의 부피}}{\text{전체부피}}$ 등을 계산할 수 있으면 된다.

018 이해를 위한 예제

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 $1,\ 3,\ 4$이고 중심이 같은 세 원으로 이루어진 과녁에 활을 쏠 때, 색칠한 부분을 맞힐 확률은?
(단, 화살은 과녁을 벗어나지 않고, 경계선에 맞지 않는다.)



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

전체영역의 넓이 : 반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 16π
색칠된 영역의 넓이 : $9\pi - \pi = 8\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8\pi}{16\pi} = \frac{1}{2}$이므로 정답은 ①

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. 정수론 2탄, 3탄 - 일부 내용 복습
	#2. 원주각과 중심각
	#3. 해석기하

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것은 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.
수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.
그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다. 어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다. 이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데 이런 개념들을 집약적으로 정리해 주는 부분이 될 것이다.

#1 정수론 2탄, 3탄 일부 내용

촌철살인 확률과 통계 1 – 발췌

정수론(정수에 대한 이론)은 경우의 수와 상관없이 중요한 내용이기 때문에 반드시 체계적으로 정리해야 한다.

1. 정수 분류법 : 정수문제를 풀기 위해 가장 중요한 것은 <같은 성질이 있는 정수>끼리 모으는 것이다.

1) 나머지 기준 (합이 ~의 배수)

- 자연수의 나머지를 기준으로 상황을 분할한다.
  ⇨ 예를 들어 아래의 표는 1부터 10까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지를 기준으로 분류한 것이다.

$3n$	3, 6, 9
$3n+1$	1, 4, 7, 10
$3n+2$	2, 5, 8

- 보통은 (합이 ~의 배수)라는 조건이 나왔을 때 이런 방식으로 정수를 분류하는 것이 좋다.

2) 소인수 기준 (곱이 ~의 배수)

- 자연수를 소인수 분해했을 때 <소인수의 종류>와 <개수>를 기준으로 상황을 분할한다.
  ⇨ 예를 들어 아래의 표는 1부터 10까지의 자연수를 소인수 2를 기준으로 분류한 것이다.

2가 0개	1, 3, 5, 7, 9
2가 1개	2, 6, 10
2가 2개	4
2가 3개	8

- 보통은 (곱이 ~의 배수)라는 조건이 나왔을 때 이런 방식으로 정수를 분류하는 것이 좋다.

2. 나머지와 주기성

- 앞서 나머지를 이용하여 정수를 분류한다고 했는데 이렇게 분류된 정수들은 주기성을 가지고 있다.

⇨ 예를 들어 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수들은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, … 와 같이 3만큼 커질 때마다 반복되므로 주기가 3이라고 할 수 있다.
(사실 홀수와 짝수도 2로 나눈 나머지를 기준으로 정수를 분류한 것이고 주기가 2이다.)

- 3으로 나눈 나머지를 기준으로 정수를 분류하면 $3n$, $3n+1$, $3n+2$ (n은 정수)라고 할 수 있는데 여기에서 3이 바로 주기를 나타낸다. 수직선에 $3n+2$에 해당하는 자연수를 아무거나 하나 표시하면 좌 · 우로 3칸을 이동할 때마다 동일한 분류의 자연수가 등장하게 된다는 사실을 알 수 있다.

3. 주기에 대한 논리 : 공통 주기 찾기

⇨ 예를 들어 $3n+1$에 해당하는 자연수와 (주기가 3이라는 뜻이다.)
$2n+1$에 해당하는 자연수에 (주기가 2이라는 뜻이다.)
대하여 이 둘을 동시에 만족하는 자연수들은 <주기가 '2' 이면서 동시에 '3'>이 되어야 한다.
이런 경우, 두 주기의 최소공배수를 통해서 우리는 주기를 찾을 수 있다.
(2를 기준으로 같은 성질이 반복된다는 것은 4를 기준으로도, 6을 기준으로도 같은 성질이 반복되는 것이다.)

- 3으로 나눈 나머지가 1이면서 동시에 2로 나눈 나머지가 1인 수들은 <6을 기준>으로 반복되므로 주기가 6이고 조건을 만족하는 최초의 자연수인 1을 기준으로 오른쪽으로 6칸 갈 때마다 이런 성질을 만족하는 자연수가 등장하게 된다.

1, 7, 13, 19, …

위의 수들을 관찰해 보면 2로 나눈 나머지가 1임(홀수)과 동시에 3으로 나눈 나머지도 1임을 알 수 있다.

019 이해를 위한 예제 2006. 9. 가형(63%), 나형(55%). 17번. 4점

9개의 수 2^1, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^9이 다음 표와 같이 배열되어 있다. 각 행에서 한 개씩 임의로 선택한 세 수의 곱을 3으로 나눈 나머지가 1이 될 확률은?

2^1	2^2	2^3
2^4	2^5	2^6
2^7	2^8	2^9

① $\frac{10}{27}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{14}{27}$ ④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

<시행과 사건>을 구분하는 간단한 확인 작업을 거친 후 결국은 경우의 수 문제를 풀 듯 푼다.

시행 각 행에서 한 개씩 임의로 선택한 세 수 ⇨ $n(S) = 3\times3\times3$

사건 세 수의 곱을 3으로 나눈 나머지가 1이 될 확률

사건의 분석 밑이 2로 같으므로 세 수를 곱하면 지수끼리는 더하게 된다. 즉, 지수를 기준으로 상황을 분류하면

2^n 중에서 n에 자연수를 대입하여 추론해보면 $2^{짝수승}$은 3으로 나눈 나머지가 1이고, $2^{홀수승}$은 3으로 나눈 나머지가 2라는 사실을 알 수 있다.

⇨

			상황 1 : 짝 3개	상황 2 : 홀 2개, 짝 1개		
				상황 2-1	상황 2-2	상황 2-3
2^1	$2^{\boxed{2}}$	2^3	짝	짝	홀	홀
$2^{\boxed{4}}$	2^5	$2^{\boxed{6}}$	짝	홀	짝	홀
2^7	$2^{\boxed{8}}$	2^9	짝	홀	홀	짝

- 지수가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 수를 분류한다. (위의 표에서 지수가 짝수인 경우만 $\boxed{}$표시를 했다.)

결국 n(문제의 사건) $= n$(상황1) $+ n$(상황2$-$1) $+ n$(상황2$-$2) $+ n$(상황2$-$3)

$= {}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_1C_1 + {}_1C_1\times{}_1C_1\times{}_2C_1 + {}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1 + {}_2C_1\times{}_1C_1\times{}_1C_1$

$= 2 + 2 + 8 + 2 = 14$

P(문제의 사건) $= \frac{14}{3\times3\times3} = \frac{14}{27}$이므로 정답은 ③

티칭 발견적 추론이 아닌 방식으로 설명하는 법 : 나머지를 기준으로 일반식을 표현한다. (매우 중요한 아이디어다.)

- 3으로 나누어 1이 남는 수 $= 3n+1$ $\xrightarrow[\text{3으로 나눈 나머지가 2}]{\text{여기에 2를 곱하면}}$ $2\times(3n+1) = 6n+2 = 3\cdot(2n)+2$
- 3으로 나누어 2가 남는 수 $= 3n+2$ $\xrightarrow[\text{3으로 나눈 나머지가 1}]{\text{여기에 2를 곱하면}}$ $2\times(3n+2) = 6n+4 = 3\cdot(2n+1)+1$

⇨ 결국 <3으로 나누어 2가 남는 수>에 2를 곱하면 <3으로 나누어 1이 남는 수>가 되고, <3으로 나누어 1이 남는 수>에 2를 곱하면 <3으로 나누어 2가 남는 수>가 된다.

티칭 각 행에서 한 개씩 임의로 선택한 세 수

- <시간의 순서>를 두고 각 행에서 1개씩의 원소를 뽑는 시행이라고 본다면 독립적 선후시행으로 볼 수 있다.
- <시간의 순서>없이 각 행에서 1개 씩 한 번에 3개 골라냈다고 본다면 복합시행으로 볼 수도 있다.

어떤 시행으로 보든 사건에 해당하는 <확률>을 구하는 것에는 무리가 없으므로 상관없다.

티칭 세 수의 곱을 3으로 나눈 나머지가 1이 될 확률

- 선 시행과 후 시행에 따른 결과를 동시에 고려해야 하는 사건이므로 <전행사건>이다.

코칭 시행을 구분하는 것이 <수학적 확률>에서는 무의미 할 수 있으나 뒤에 나올 <확률의 연산>에서는 유의미하다. 순간적으로 시행을 구분할 수 있게 되는 순간까지 시행을 구분해봐야 한다.

020 이해를 위한 예제 2009. 9. 나형(40%). 12번. 4점

1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $a+b+c$는 홀수이다. (나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{17}{42}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

시행 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 ⇨ $n(S) = {}_9C_3$

사건 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c $(a<b<c)$가 (가) $a+b+c$는 홀수 (나) $a\times b\times c$는 3의 배수

정수분류법 주어진 상황을 분할하기 위해 주어진 정수를 먼저 다음의 기준으로 분류한다.

(가) $a+b+c$는 홀수 ⇨ 1 부터 9까지의 자연수를 홀수와 짝수로 분류한다.

(나) $a\times b\times c$는 3의 배수

홀수	1	3	5	7	9
짝수	2	4	6	8	

⇨ 이 상황을 만족하려면 <소인수 3>을 가지고 있는 수가 a, b, c 중 적어도 하나는 필요하다.
홀수와 짝수로 분류된 수를 다시 <소인수 3>을 기준으로 다시 분류한다. 위의 표는 1부터 9까지의 자연수를 홀수와 짝수로 분류하고 <소인수 3>이 포함된 수를 빗금으로 표시한 것이다.

사건의 분석 우리가 구하는 사건은 다음과 같이 분석된다.

사건의 분석 : (개수를 기준) 홀수의 개수를 기준으로 상황 분할

상황 1	홀수 3개
상황 2	홀수 1개, 짝수 2개

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황 1}) + n(\text{상황 2})$

- 세 수의 합이 홀수가 되는 상황은 위의 두 가지로 분할된다.

상황 1

상황 1-1	3의 배수인 홀수가 0개	⇨ ${}_3C_3$
상황 1-2	3의 배수인 홀수가 1개	⇨ ${}_2C_1\times{}_3C_2$
상황 1-3	3의 배수인 홀수가 2개	⇨ ${}_2C_2\times{}_3C_1$

상황 2

상황 2-1	<3의 배수인 홀수>	⇨ ${}_2C_1\times{}_4C_2$
상황 2-2	<3의 배수가 아닌 홀수>	⇨ ${}_3C_1\times{}_3C_1$

- $n(\text{상황}2-2)$에서 짝수 중 6은 반드시 포함되어야 하므로 남은 짝수 세 개 중에서 1개만 뽑으면 된다.

$$\begin{aligned} n(\text{문제의 사건}) &= n(\text{상황}1-2) + n(\text{상황}1-3) + n(\text{상황}2-1) + n(\text{상황}2-2) \\ &= {}_2C_1\times{}_3C_2 + {}_2C_2\times{}_3C_1 + {}_2C_1\times{}_4C_2 + {}_3C_1\times{}_3C_1 \\ &= 6 + 3 + 12 + 9 = 30 \end{aligned}$$

$P(\text{문제의 사건}) = \frac{30}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$이므로 정답은 ①

티칭 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때 - 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다.

코칭 $n(\text{상황}1-2) + n(\text{상황}1-3) = n(\text{상황 1}) - n(\text{상황 1}-1) = {}_5C_3 - {}_3C_3$으로 계산하는 것이 일반적이다.
<여사건의 아이디어>는 항상 생각해야하는 <경우의 수의 근본사고방식>이다.

코칭 <상황 2>를 위의 표와 같이 중복된 경우가 없이 분할하는 습관이 형성되지 않았다면 아직 경우의 수에서 공부한 <분할적 사고>가 부족한 것이다.

021 이해를 위한 예제 2009. 9. 나형(40%). 12번. 4점 변형 / 이해을 위한 예제 013, 020번과 함께 학습

1부터 9까지 자연수가 하나씩 적힌 공 9개에 6이 적힌 공 1개를 더 포함한 10개의 공이 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 배열할 때 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c 가 다음 조건을 만족시킬 확률은?

(가) $a+b+c$는 홀수이다. (나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다. (다) $a \le b \le c$

시행 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 배열할 때 ⇨ $n(S) = {}_{10}C_3 \times 3!$

사건 꺼낸 공에 적혀 있는 수 a, b, c가 (가) $a+b+c$는 홀수 (나) $a\times b\times c$는 3의 배수 (다) $a \le b \le c$

정수분류법 주어진 상황을 분할하기 위해 주어진 정수를 먼저 다음의 기준으로 분류한다.

(가) $a+b+c$는 홀수 ⇨ 1 부터 9까지의 자연수를 홀수와 짝수로 분류한다.
(나) $a\times b\times c$는 3의 배수

홀수	1	3	5	7	9
짝수	2	4	6_a	6_b	8

⇨ 상황을 만족하려면 <소인수 3>을 가지고 있는 수가 a, b, c 중 적어도 하나는 필요하다. 홀수와 짝수로 분류된 수를 다시 <소인수 3>을 기준으로 다시 분류한다. 위의 표는 1부터 9까지의 자연수를 홀수와 짝수로 분류하고 <소인수 3>이 포함된 수를 빗금으로 표시한 것이다.

사건의 분석 우리가 구하는 사건은 다음과 같이 분석된다.

사건의 분석 : (개수를 기준) 홀수의 개수를 기준으로 상황 분할

상황 1	홀수 3개
상황 2	홀수 1개, 짝수 2개

: $n(\text{전체}) = n(\text{상황 1}) + n(\text{상황 2})$

- 세 수의 합이 홀수가 되는 상황은 위의 두 가지로 분할된다.

상황 1

상황 1-1	3의 배수인 홀수가 0개	⇨ ${}_3C_3$
상황 1-2	3의 배수인 홀수가 1개	⇨ ${}_2C_1\times{}_3C_2$
상황 1-3	3의 배수인 홀수가 2개	⇨ ${}_2C_2\times{}_3C_1$

상황 2

상황 2-1	<3의 배수인 홀수>	⇨ ${}_2C_1\times{}_5C_2 + 2$
상황 2-2	<3의 배수가 아닌 홀수>	⇨ 다시 분할

- 분모에서 배열하는 경우를 고려했으므로 분자 또한 고려해야 하지만 (다) $a \le b \le c$에 의하여 자동배열 되기 때문에 배열하는 경우의 수는 한가지이다.
- ${}_2C_1\times{}_5C_2$의 경우 중 <3, 6_a, 6_b>와 <9, 6_a, 6_b>가 뽑힌 두 가지 경우는 <6_a와 6_b를 배열하는 경우>를 더 세야 한다. ${}_2C_1\times{}_5C_2$에는 뽑힌 상황만을 고려했으므로 <3, 6_b, 6_a>와 <9, 6_b, 6_a>의 경우 2가지를 따로 더한 것이다.

  6이 뽑히는 <개수를 기준>으로 상황을 분할해도 되지만 ${}_2C_1\times{}_5C_2$의 구체적 상황을 나열할 수 있다면 위와 같이 2만 더하면 된다는 것을 알 수 있다.
- $n(\text{상황}2-2)$는 <6_a와 6_b 둘 다 뽑힌 상황 : 상황 2-2-1>과 <6_a와 6_b 중 하나만 뽑힌 상황 : 상황 2-2-2> 두 가지로 나눌 수 있다. $n(\text{상황}2-2-1)$은 6_a와 6_b가 배열되는 2가지 경우를 고려해야 하고, $n(\text{상황}2-2-2)$는 뽑기만 하면 자동 배열되는 상황이 된다.

$$n(\text{상황}2-2) = n(\text{상황}2-2-1) + n(\text{상황}2-2-2) = {}_3C_1\times{}_2C_2\times 2! + {}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1$$

$$\begin{aligned} n(\text{문제의 사건}) &= n(\text{상황}1-2) + n(\text{상황}1-3) + n(\text{상황}2-1) + n(\text{상황}2-2-1) + n(\text{상황}2-2-2) \\ &= {}_2C_1\times{}_3C_2 + {}_2C_2\times{}_3C_1 + ({}_2C_1\times{}_5C_2 + 2) + {}_3C_1\times{}_2C_2\times 2! + {}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1 \\ &= 6 + 3 + 22 + 6 + 18 = 55 \end{aligned}$$

$$P(\text{문제의 사건}) = \frac{51}{{}_{10}C_3\times 3!} = \frac{55}{720} = \frac{11}{144}$$

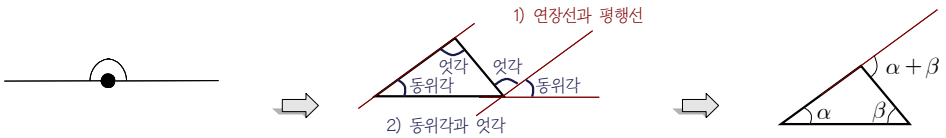
#2 원주각과 중심각

확률과 통계에서는 기하의 내용을 거의 다루지 않는다.
하지만 개념의 외연은 그 목적이 문제를 통해서 중요한 내용을 정리하는 것에 있으므로 문제와 연관된 자주 사용되는 중등기하는 정리하도록 한다. (여기에서는 매우 적은 양만 다루지만 <촌철살인 기하와 벡터>에서는 고등과정에서 필요한 기하를 <촌철살인 식 정리>로 집대성하여 다룰 것이다.)

특히나 중등기하의 내용은 당연한 내용을 여러 번 반복적으로 숙지해야 실제상황에서 직관적으로 보인다.
구체적 경험 없이는 직관도 없다.

1. 원주각과 중심각

1) 외각의 성질

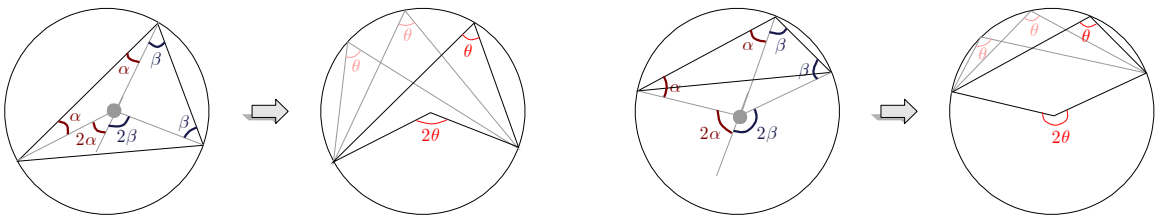


반대방향의 두 반직선이 이루는 각은 180° 이다.

삼각형의 내각의 총 합은 180° 이다.

외각은 삼각형의 남은 두 내각의 합과 같다.

2) 외심의 성질, 원주각과 중심각

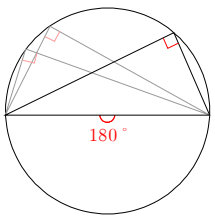


외접원의 중심이 삼각형 내부에 있는 경우

외접원의 중심이 삼각형 외부에 있는 경우

3) 지름의 원주각

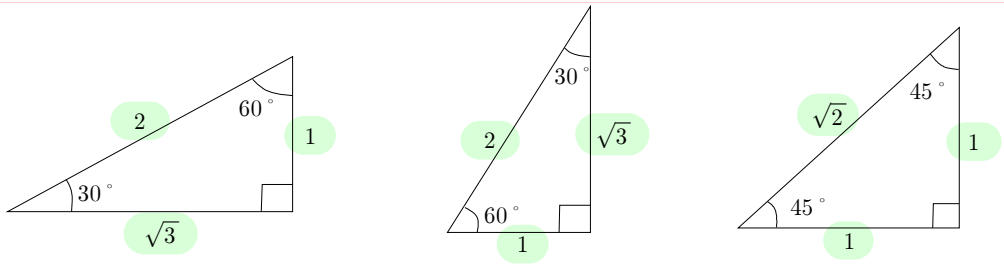
- 사실 <원주각과 중심각>으로부터 간단히 유도되어 나오는 따름정리이지만 이 내용이 <원주각과 중심각>보다 훨씬 많이 나온다.



- 직각삼각형의 빗변은 외접원의 지름이다.
- 직각삼각형이 나오면 항상 외접원을 생각해봐야 한다.

2. 단위원 위의 동점

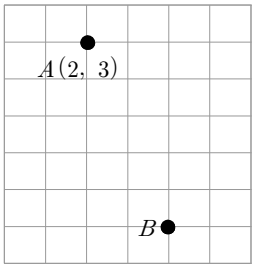
1) 직각삼각형의 특수 비



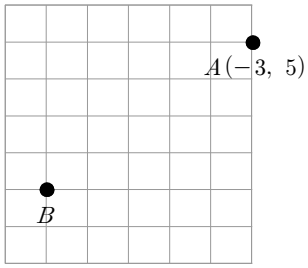
2) 좌표의 방향성과 독립성

- 우리가 고등학교 때 다루는 유일한 좌표계는 〈직교 좌표계〉이다. 중학교 때부터 좌표를 표시하고 읽어왔지만 정작, 좌표를 읽는 방법을 배우진 않았다. 그저 원점을 기준으로 부호를 생각하면서 읽어왔던 것이 전부이다.
- 〈원점〉이 아닌 〈주어진 점〉을 기준으로 〈방향성과 독립성〉을 생각하며 좌표를 읽는 방법에 대해 생각해보자.

방향성 : 방향에 따라 부호를 생각한다. / 독립성 : x좌표와 y좌표를 동시에 생각하지 않는다.



〈그림 1〉



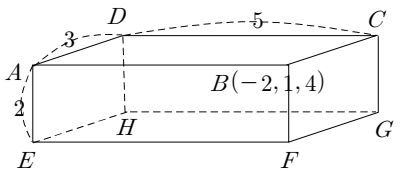
〈그림 2〉

- 평면좌표에서 x좌표는 〈좌 · 우〉의 움직임에만 영향을 받는다. 〈기준점〉으로부터 〈우로 3칸〉 움직이는 경우 x좌표에 3을 더하고, 〈좌로 3칸〉 움직이는 경우 x좌표에 -3을 더한다.
- 평면좌표에서 y좌표는 〈위 · 아래〉의 움직임에만 영향을 받는다. 〈기준점〉으로부터 〈위로 3칸〉 움직이는 경우 y좌표에 3을 더하고, 〈아래로 3칸〉 움직이는 경우 y좌표에 -3을 더한다.

⇨ 〈그림 1〉의 경우 A좌표로부터 〈우로 2칸〉 〈아래로 5칸〉이므로 B의 좌표는 $(2+2,\ 3-5)$
$B(4,\ -2)$

⇨ 〈그림 2〉의 경우 A좌표로부터 〈좌로 5칸〉 〈아래로 4칸〉이므로 B의 좌표는 $(3-5,\ -5-4)$
$B(-2,\ -9)$

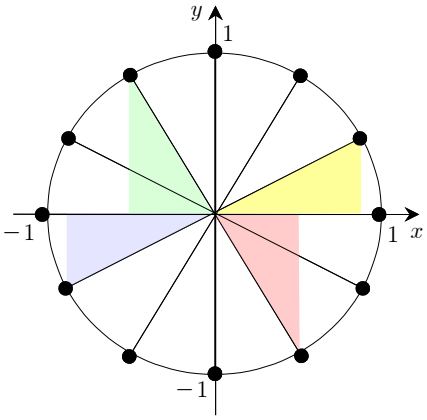
〈문과는 넘어가도 좋으나, 한 번 읽어보면 전혀 어렵지 않다.〉



- 공간좌표에서 x좌표는 〈앞 · 뒤〉의 움직임에만 영향을 받는다.
  y좌표는 〈좌 · 우〉의 움직임에만 영향을 받는다.
  z좌표는 〈위 · 아래〉의 움직임에만 영향을 받는다.

⇨ 위의 직육면체에서 H의 좌표 : B좌표로부터 〈뒤로 3칸〉 〈좌로 5칸〉 〈아래로 2칸〉이므로
H의 좌표는 $(-2-3,\ 1-5,\ 4-2)$ ⇨ $H(-5,\ -4,\ 2)$

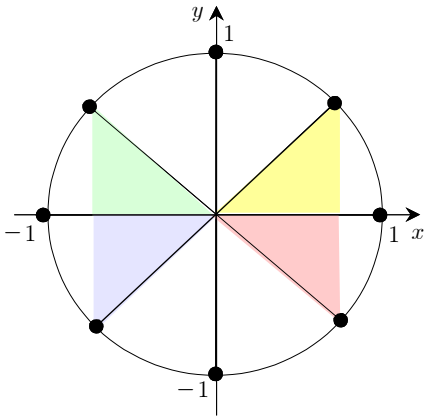
3) 단위원의 등분점과 삼등분점 (문과는 넘어가도 좋다.)



- 눈에 보이는 모든 삼각형의 대각선의 길이는 1,

  긴 변의 길이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 짧은 변의 길이는 $\frac{1}{2}$이다.

  즉, 우리는 부호만 생각하여 각 좌표를 읽어주면 된다.

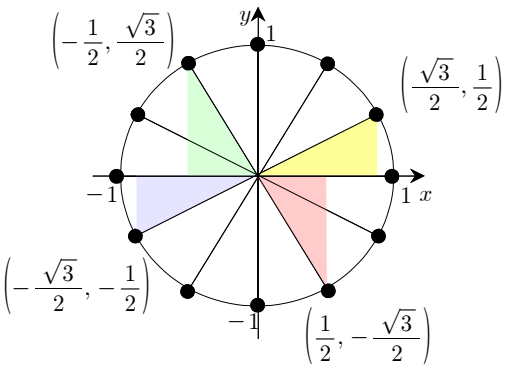


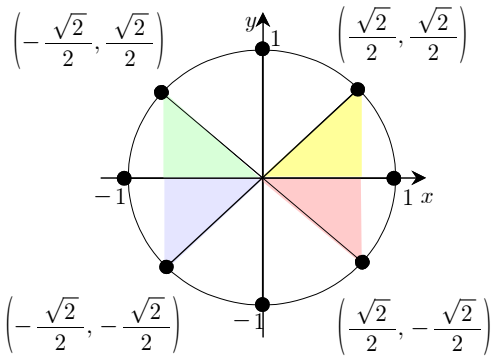
- 눈에 보이는 모든 삼각형의 대각선의 길이는 1,

  두 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

  즉, 우리는 부호만 생각하여 각 좌표를 읽어주면 된다.

좌표 Reading





- 위의 두 그림과 좌표는 <미적분 2. 삼각함수>에서 매우 중요한 역할을 하므로 완전히 숙지해야 한다.
- 방향성과 독립성을 생각하면서 각 좌표를 읽어줘야 한다.

022 이해를 위한 예제 2004. 9. 가형(76%), 나형(47%). 13번. 4점 : 문과는 넘어가도 좋다.

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있는 7개의 점

$$\mathrm{P}_1(1,0),\ \mathrm{P}_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{P}_3\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \mathrm{P}_4(0,1),\ P_5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \mathrm{P}_6(-1,0),\ P_7\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

에서 임의로 세 점을 선택할 때, 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형일 확률은?

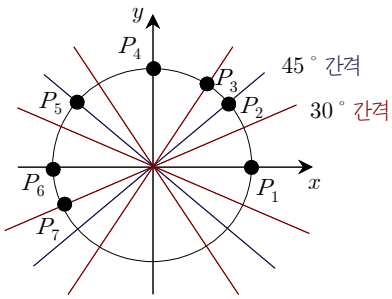
① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{6}{35}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{8}{35}$ ⑤ $\frac{9}{35}$

- 각 점은 단위원 위에서 특수각의 의미가 있는 점들이다. 각 좌표의 정확한 위치를 알지 못하면 문제를 풀 수 없다.

시행 7개의 점에서 임의로 세 점을 선택할 때 : ${}_7C_3$

사건 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 직각삼각형

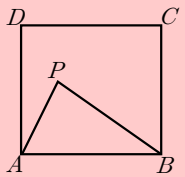
사건의 분석 직각삼각형이 되기 위해서는 한 변이 지름이어야 한다.
여기에서는 7개의 점 중 두 점을 이은 직선이 지름이 되는 경우는 $\overline{P_1P_6}$뿐이다.
P_1와 P_6은 이미 뽑혀있는 상황에서 나머지 한 점을 뽑는 경우의 수는 5가지이다.



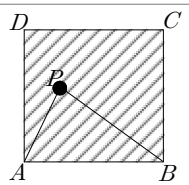
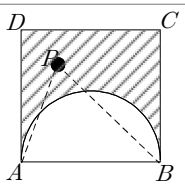
$P(\text{직각삼각형}) = \frac{5}{{}_7C_3} = \frac{1}{7}$이므로 정답은 ①

023 이해를 위한 예제

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 내부에 임의로 점 P를 잡을 때, 삼각형 PAB가 예각삼각형이 될 확률은?



① $\frac{\pi}{10}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $1-\frac{\pi}{10}$ ⑤ $1-\frac{\pi}{8}$

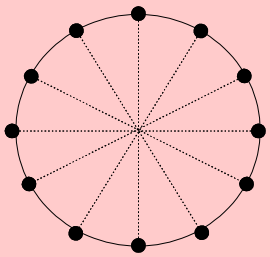
	
문제에 시행에 따른 P가 존재할 수 있는 영역 (표본공간) ⇨ 1	삼각형 PAB가 예각삼각형이 될 때 P가 존재할 수 있는 영역 ⇨ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi\times\frac{1}{2} = 1-\frac{\pi}{8}$

- 반원의 경계가 기준이 된다. 반원에 경계에 P가 있는 경우 직각삼각형이 되므로 반원의 경계의 바깥에 P가 있는 경우 예각삼각형이 된다.

$P(\triangle APB\text{가 예각}\triangle) = \frac{\left(1-\frac{\pi}{8}\right)}{1} = 1-\frac{\pi}{8}$이므로 정답은 ⑤

024 이해를 위한 예제

그림과 같이 한 원 위에 12개의 점이 같은 간격으로 놓여 있다. 이들 중 세 점을 택하여 삼각형을 만들 때, 이 삼각형이 예각삼각형이 될 확률을 $\frac{b}{a}$라 하자. $a+b$값을 구하면?



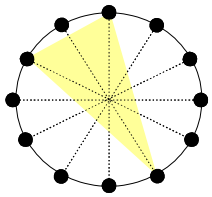
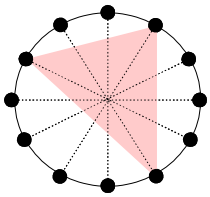
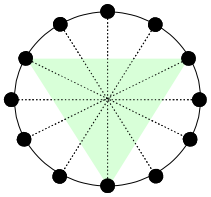
① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

- 일반적으로 많이 나오는 문제는 직각삼각형의 개수를 구하는 문제이다. 이 문제를 예각삼각형으로 바꾸었을 뿐인데 문제를 푸는 아이디어는 많이 달라진다.

시행 12개의 점이 같은 간격으로 놓여 있다. 세 점을 택하여 삼각형을 만들 때, ⇨ $n(S) = {}_{12}C_3 = 220$

사건 이 삼각형이 예각삼각형이 될 확률

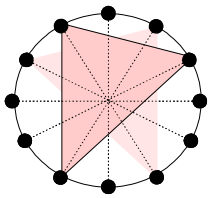
사건의 분석 삼각형의 세 각을 원주각으로 생각할 경우 원주각에 대응하는 호의 길이가 반원보다 짧아야 한다.
예각삼각형이 될 수 있는 경우는 아래 3가지 경우만 존재한다.
(왜 그런지 추론을 통해 혼자 근거를 찾아보고 안 되는 경우 다음 장의 티칭을 통해서 이해하자.)

		
상황 1	상황 2	상황 3

- <상황 1>의 을 원의 둘레를 따라 회전시키는 경우 총 12가지 경우의 수가 나온다.
분모의 ${}_{12}C_3$도 12개의 점을 모두 다른 것으로 보았으므로 <합동인 삼각형>이라도 <뽑힌 점이 다르면> 다르게 세야 한다.

- <상황 3>의 을 원의 둘레를 따라 회전시키는 경우 총 4가지 경우의 수가 나온다.
각 꼭짓점을 시계방향으로 한 칸씩 회전시켜보면 5번째 순간에 완전히 같은 삼각형이 나온다.

- <상황 2>의 을 조금 주의해야 한다. 오른쪽 그림과 같이 과 은 합동이기는 하지만 아무리 회전시켜도 겹치는 경우가 나오지 않는다. 이러한 예각삼각형을 회전시키면 각각 12개씩 총 24개의 서로 다른 삼각형이 나온다.



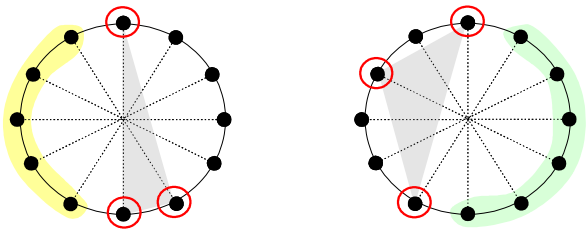
⇨ n(예각 삼각형) $= n$(상황 1) $+ n$(상황 2) $+ n$(상황 3)
$= 12 + 24 + 4 = 40$이다.

P(예각 삼각형) $= \frac{40}{220} = \frac{2}{11}$이므로 정답은 ④

티칭 추론과 파악하는 과정

어떤 문제든 추론과 파악하는 과정을 거친다. 그리고 그 과정에서 공식을 자연스럽게 사용한다.
<촌철살인 확률과 통계 1>에서 <전체적으로는 분할적 사고를 쓰되 부분적으로 공식을 쓴다.>라고 이야기 한 것도 같은 맥락이다.

1단계) 몇 개의 삼각형을 그려보며 예각삼각형을 되는 경우를 파악한다. (이때 원주각과 중심각의 내용이 자연스럽게 사용된다.)



위의 두 그림에서 <둔각>이나 <직각>이 만들어지는 상황을 관찰 할 수 있는데
삼각형의 두 점 사이에 5개의 점이 있다면 그 순간에 직각삼각형이 만들어지고, 6개의 점이 있다면 둔각삼각형이 만들어짐을 알 수 있다.

⇨ 이 사실을 통해 '예각삼각형은 <결정된 삼각형의 임의의 두 점 사이>에는 <4개 이하의 점이 존재>해야 한다.' 라는 사실을 파악할 수 있다. (5개가 되는 순간 직각삼각형이 나온다.)

2단계) 결국, 삼각형을 결정하는 3개의 점을 뺀 나머지 9개의 점을 세 부분으로 나누되 4개 이상인 부분은 없도록 나누는 것에서 <자연수 분할>의 아이디어를 생각할 수 있다. 9를 3개의 자연수로 분할하되 4이하의 자연수로 분할하는 경우는

$9 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3$

이것이 위의 해설지에서 상황을 3가지로 분류한 근거이다.

3단계) 앞의 해설지를 참조해보면 <상황 2>에서 대칭인 경우에 대해서는 따로 세야한다는 것을 알 수 있는데 이것은 <원순열의 아이디어>를 충분히 학습했다면 눈치 챌만한 상황이다. 암기된 지식으로 푼 것이 아니라 원순열의 가장 근본적인 아이디어인 <직접 회전시켜보고, 같은 경우가 왜 발생하는지를 파악하면서> <문제를 푸는 습관>이 있었다면 이 문제에서도 충분히 파악할 수 있었을 것이라 생각한다.
'좌우로 대칭인 상황에서는 회전시켜도 같은 경우가 발생하지 않는다.'라는 사실은 문제를 통해서도 꽤 많이 다뤄왔던 상황이다.

빈자리의 개수를 ② ③ ④과 같이 나타냈을 때 ③ ② ④의 상황과 ④ ② ③의 상황은 아무로 회전시켜도 절대로 같은 경우가 발생하지 않는다. (촌철살인 확률과 통계 1 - 원순열 내용 참조)

학습조언. 발견적 추론이란 문제의 유형이 아니다.

- 추론적 사고는 자신이 확신하는 것으로부터 자연스럽게 이끌어내는 사고이다.

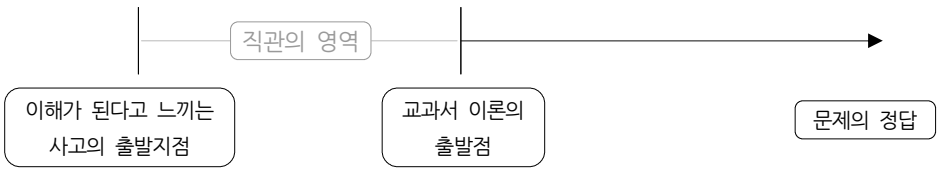
추론적 사고가 중요하다는 사실은 저자 역시 매우 공감한다. 하지만 <연역적 추론>과 <발견적 추론>으로 문제의 유형을 나누고 이것이 자주 나오는 문제 유형이기 때문에 중요하다는 말에는 조금 회의를 가지고 있다. 왜냐하면 저자가 생각하는 수학적 추론능력이라는 것은 <자기가 확신하는 가장 기본적인 명제>로부터 <발견적>으로 이론을 연결시키는 과정이기 때문이다. 이 과정을 거치지 않고 그냥 외운 개념은 느낌도 없고 휘발성도 강하다.

우리가 수학을 체득하는 올바른 과정은 <귀납적 추론, 발견적 추론>의 반복적인 학습을 통해 익숙해진 개념들이 자연스럽게 <연역적 추론>으로 변하는 과정이다. 즉, 어떤 공식이나 명제를 외우고 받아들여 바로 문제를 풀기보다는 그 공식이나 명제를 본인이 알고 있는 것으로부터 자연스럽게 연결되었는지를 확인하는 것이 중요하다. 그 과정을 반복하다 보니 <자연스럽게 과정이 생략>된다면 이것이 가장 이상적인 <연역적 추론>이다.

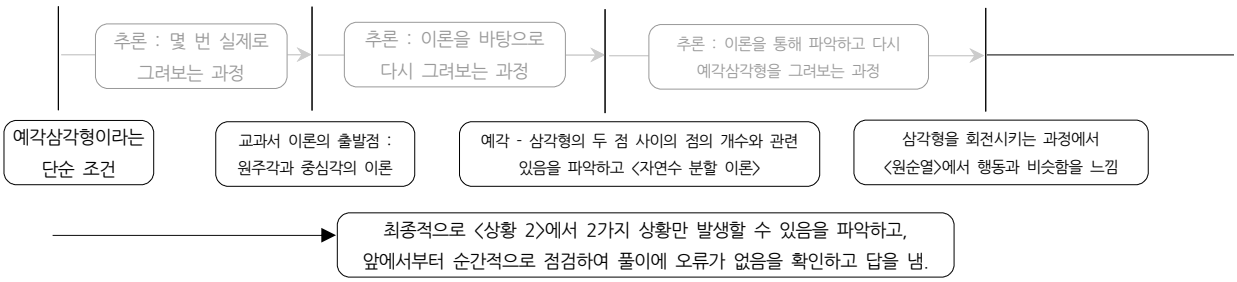
- 모든 문제는 본인의 베이스 안에서 자연스럽게 풀어라.

어려운 문제를 처음 접근하는 방식은 항상 <원시적인 추론>이다. 추론의 과정을 통해서 문제가 제시하는 방향을 이해한다면 자신이 알고 있는 수학적 이론과 연결되어 공식이나 이론을 자연스럽게 쓰게 되는 <연역적 추론>에 이르게 된다. 만약 문제를 읽고 추론하는 과정에서 어떤 생각도 떠오르지 않아 결국 노가다(?)로 풀거나 아예 풀지 못하는 상황에 봉착할 경우 이론학습이 제대로 되어 있지 않은 것이므로 조급해 하지 말고 그 문제를 통해 이론을 조금 더 체득한다고 생각하면 될 것이다.

- 조금 더 구체적으로



위의 도식은 저자가 생각하는 문제풀이의 일반적 과정이다.
문제를 읽고 그 문제가 어떤 이론을 물어보고 있는지 파악하는 과정이 <직관의 영역>인데 쉬운 문제는 누구나 눈치챌만한 상황이 주어진다. 어려운 문제는 보통 이 과정에서 <교과서 이론 출발점>을 찾지 못한다.
위의 문제를 저자가 풀어가는 과정을 보면 다음과 같다.



이처럼 처음 이론을 학습할 때 과정을 이해하여 <공식의 느낌>을 느끼면서 학습하지 않으면 <추론의 과정>에서 <이론의 출발점>을 잡아내지 못할 가능성이 커진다. 이처럼 개인마다 큰 차이를 보이는 것이 <추론의 과정>이며 이것을 학습하는 것은 <배움의 문제>이기보다는 <습득의 문제>이다. 지금부터라도 <암기>로 출발했던 모든 개념을 재점검하여 <본인의 베이스>안에서 받아들일 수 있는 <개념의 당위성>을 확보하고, 아무리 고민해도 느낌이 오지 않는 공식이나 이론은 선생님과 친구들에게 도움을 청해 꼭 본인이 느낄 수 있는 형태로 가공하여 기억해야 한다.

#3 해석기하

- 연속적이긴 하지만 감이 잘 오지 않으면 해석기하다.

1. 논증기하와 해석기하

1) 논증기하

- 여기에서는 논증기하를 집중적으로 조명하지 않는다. 단지 해석기하와 구분되는 개념으로만 인지한다.
  논증기하는 복잡한 도형에서 <가장 기본이 되는 몇 개의 정리>와 <몇 개의 보조선>으로 복잡한 도형의 각이나 길이를 논증하는 매우 오래된 역사를 자랑하는 단원이다. (충분한 연습을 한) 보이는 사람에게만 보인다.

2) 해석기하

- 해석기하란 식으로 표현된 기하이다. 식과 도형이 같은 의미를 가진다는 것은 직관의 영역이 아니다.
  (일례로 예전 수학자들은 꽤 오랜 기간 동안 이것을 인정하지 못했다.)
  ⇨ 예를 들어 <$x^2+y^2=1$>과 <중심이 원점이고 반지름이 1인 원>은 같은 의미를 가지고 있다.

- 우리가 처음 원의 방정식을 배울 때는 일단 원을 먼저 그려놓고, 원의 기하학적인 의미를 생각하여 식을 세웠다.
  하지만 앞으로는 원과 전혀 관계없는 상황이 주어지고 일명 <자취의 방정식>이라는 것을 세우게 된다.
  그리고 식을 세우고 나서야 우리는 비로소 <아! 원이구나!>라고 깨닫게 된다.
  이처럼 <해석기하의 상황>은 직관적인 상황이 아니다.

2. 자취의 방정식

1) 자취의 방정식

- 움직이는 점이 주어진 경우 그 점의 움직임을 그림으로 표현할 수 있어야 한다. 이것은 고등수학의 핵심이다.
  이미 움직이는 점에 대한 식이 주어진 상태라면 우리는 이미 배운 <함수>나 <도형의 방정식>의 지식을 활용해 그림을 그릴 수 있다. 하지만 움직이는 점이 식이 아닌 상황으로 주어진 경우, 특히 문제에서 묘사된 상황만으로 <점의 정확한 자취>를 예측하기 어려운 경우 우리는 움직이는 점을 $(x,\ y)$라 두고 주어진 조건만으로 두 변수의 관계식을 세우게 된다. ⇨ 이렇게 세워진 관계식을 우리는 <자취의 방정식>이라고 부른다.

2) 무작정 세우기

- 자취의 방정식이란 <어떤 규칙에 의해 움직이는 점>이 그리는 도형을 일일이 규칙에 맞게 점을 찍어보지 않아도 알 수 있는, <식을 통해서 도형을 그리는> 매우 획기적인 방법을 배운 것이다.
  <자취의 방정식>문제는 고등학생들이 가장 어려워하는 부분 중 하나이다. 왜냐하면 학생들은 문제를 읽고 나서도 어떻게 접근해야 할지 잘 감이 오지 않는데 반면에 해설지는 다짜고짜 <자취의 방정식>을 세우고 있기 때문이다.
  사실 이것은 출제자의 입장에서는 당연한 것이다. 만약 주어진 상황으로 누구나 어떤 도형이 그려질지 예측할 수 있다면 <식을 통해 그림을 그리는 해석기하의 아이디어>를 누가 사용하겠는가? / 그러므로 반대로 생각하면 점들의 연속적 모임에서 감이 잘 오지 않으면, 식을 일단 세우고 그 식을 통해 그림을 표현하는 <해석기하의 문제>이다.
  ⇨ 점들의 모임에서 감이 잘 오지 않으면 <주어진 규칙>에 의해 <자취의 방정식>을 구한 후 생각한다.

3) 조건, 매개변수, 변환 관계식

- 식을 세우는 3가지 느낌이 있다. ⇨ <조건 관계식> <매개변수 관계식> <변환 관계식>
  용어가 어렵게 느껴질 수 있으나 용어들이 의미하는 내용을 알고 나면 자취 문제가 보이기 시작한다.

- 조건 관계식 : 우리가 구하고자 하는 도형 위의 임의의 점을 $(x,\ y)$라고 둔 후 <문제에서 주어진 조건> 혹은 <관계식>에 대입함으로써 우리가 원하는 자취의 방정식 $f(x,\ y)=0$을 바로 얻을 수 있는 경우를 말한다.
  ⇨ $x,\ y$ 외 변수가 0개

- 매개변수 관계식 : 우리가 구하고자 하는 도형 위의 임의의 점을 $(x,\ y)$라 할 때, 두 변수 $x,\ y$가 또 다른 변수 t에 의해 결정되는 경우이다. 이런 경우에는 보통 <t를 소거>하면서 우리가 원하는 자취의 방정식 $f(x,\ y)=0$을 얻을 수 있는 경우가 많다.
  ⇨ $x,\ y$ 외 변수가 1개

- 변환 관계식 : 우리가 구하고자 하는 도형 위의 임의의 점을 $(x,\ y)$라 할 때, (어떤 규칙에 의해) 이 점에 대응되는 또 다른 점 $(x',\ y')$이 존재하고, 이 점에 대한 자취의 방정식 $g(x',\ y')=0$이 주어진 경우를 말한다. 이런 경우에는 보통 <x'을 $x,\ y$에 대한 식>, <y'을 $x,\ y$에 대한 식>으로 정리하여 주어진 자취의 방정식 $g(x',\ y')=0$에 대입함으로써 우리가 원하는 $(x,\ y)$에 대한 자취의 방정식 $f(x,\ y)=0$을 얻을 수 있다.
  ⇨ $x,\ y$ 외 변수가 2개 + 그에 대한 관계식

코칭 자취의 방정식 문제가 감이 잘 오지 않는다고 느낀다면 이것은 자취의 방정식을 세우는 상황임을 제대로 느끼고 있는 것이다. 연속적인 점들이 모여 있음을 파악했는데 감이 잘 오지 않으면 <자취의 방정식>을 세운다.
+ 추가로 식을 세우는 3가지 느낌까지 안다면 자취의 방정식을 더욱 확신할 수 있고 식도 자연스럽게 세울 수 있을 것이다. (바로 뒤의 세 문제는 확률과 연관이 없는 자취의 방정식 문제이다.)

025 이해를 위한 예제

두 점 $\mathrm{A}(-2, 0)$, $\mathrm{B}(2, 0)$으로부터의 거리의 비가 $3 : 1$인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

연속적이긴 하지만 잘 감이 오지 않으면 해석기하다.

- 이 문제는 <아폴로니우스의 원>이라는 유명한 문제이다. <원이 나온다는 사실>을 모른다고 생각하자. 교과서에서 이 문제를 설명하는 이유도 <원이 나올 것 같지 않은 상황>에서 주어진 조건을 이용하여 식을 세움으로써 나온 결과의 식을 가지고 <원이 나오는 것을 알 수 있다.>라는 사실을 설명하기 위함이다.

  좌표가 발명되기 전 고대 그리스의 아폴로니우스가 발견해서 이름이 붙여진 것이다. (이 당시 증명은 기하학적으로 했다.)
  이렇게 발견자의 이름까지 붙여준 이유는 위의 조건만으로 P의 자취가 원이라고 생각하는 것은 직관적이지 않다는 뜻이다.

- 두 점 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$으로부터의 거리의 비가 $3 : 1$인 점 P에 대하여

  ⇨ P에 해당하는 점이 무수히 많다는 것을 인지한다. 또한 어떤 그림이 될 지 애매함을 느낌으로써 <자취의 방정식>을 세워야겠다는 생각을 한다.

  ⇨ $P(x,\ y)$라고 놓을 경우 x, y외에 변수가 없다는 사실을 인지한다. 즉, <조건 관계식>

- 주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$이므로 $\overline{AP} = 3\overline{BP}$ 즉, $\overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$

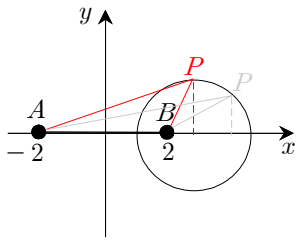
  <두 점 사이의 거리공식>에 의하여 $(x+2)^2+y^2 = 9\{(x-2)^2+y^2\} \Leftrightarrow x^2+y^2-5x+4 = 0$

  $\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2 = \frac{9}{4}$

  ⇨ 따라서 점 P는 중심의 좌표가 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이고, 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원 위의 점이다.

  오른쪽 그림에서 $\overline{AB} = 4$이므로 높이가 가장 큰 순간은 반지름인 순간이다.

  $\triangle PAB$의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3}{2} = 3$



정답은 ②

026 이해를 위한 예제

두 직선 $y=mx$, $y=-\frac{1}{m}(x-2)+3$ 의 교점을 P라고 할 때, 점 P의 자취의 길이는?

① $2\sqrt{3}\pi$ ② $\sqrt{13}\pi$ ③ 4π ④ $3\sqrt{2}\pi$ ⑤ $4\sqrt{2}\pi$

연속적이긴 하지만 잘 감이 오지 않으면 해석기하다.

- 이 문제 역시 두 직선의 기울기가 m, $-\frac{1}{m}$이라는 사실에서 <수직관계>임을 알아낸다면 앞에서 공부한 <지름의 원주각>을 떠올려 원의 상황임을 알 수 있다. 그러나 일단은 <자취의 방정식>을 공부하는 입장에서 P의 자취를 눈치 채지 못했다고 가정하고 이 문제를 풀어보도록 한다.

- 두 직선 $y=mx$, $y=-\frac{1}{m}(x-2)+3$ 의 교점을 P라고 할 때,

⇨ P에 해당하는 점이 무수히 많다는 것을 인지한다. 또한 어떤 그림이 될 지 애매함을 느낌으로써 <자취의 방정식>을 세워야겠다는 생각을 한다.

⇨ m의 값이 결정됨에 따라 두 직선이 결정되고 또한 두 직선의 교점도 결정된다. $P(x', y')$라고 놓을 경우 x', y' 이외에 변수가 한 개(m) 더 존재한다는 사실을 인지한다. 즉, <매개변수 관계식>

- 주어진 조건에서 $P(x', y')$는 두 직선의 교점이므로 두 직선 위의 점이다. 두 직선에 $P(x', y')$을 대입하여 $m=\frac{y'}{x'}$과 $y'=-\frac{1}{m}(x'-2)+3$ 을 얻을 수 있다. (이제 m을 소거시키면 우리가 원하는 x', y'에 대한 관계식을 얻을 수 있다.)

⇨ $m=\frac{y'}{x'}$를 $y'=-\frac{1}{m}(x'-2)+3$ 에 대입하면 $y'=-\frac{x'}{y'}(x'-2)+3$ 즉, $x'^2+y'^2-2x'-3y'=0$

$$\Leftrightarrow (x'-1)^2+\left(y'-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$$

⇨ 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 인 원이므로 점 P의 자취의 길이는 $\sqrt{13}\pi$

정답은 ②

티칭 이 문제를 해설하는 과정에는 오류가 있다. 사실 엄밀하게 따지면 $y'=mx'$에서 $m=\frac{y'}{x'}$으로 넘어가는 과정에서 분모가 0일 수 있는 $x'=0$인 경우는 따로 고려를 해야 한다. 그럴 경우 <$y'=mx'$가 표현할 수 없는 직선>에 대한 언급과 추가적인 방정식의 풀이 그리고 그림까지 활용해야 하므로 해설이 너무 길어지고 <자취의 방정식을 세우는 느낌>을 전달하려는 의도가 희석될 수 있어서 위와 같이 <답을 구하는 것에 있어서는 문제가 없는 풀이>를 했다.

027 이해를 위한 예제

x축 위의 점 A와 y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB}=6$이고, 각각 x축, y축의 양의 부분 위를 움직일 때, 선분 AB의 중점의 자취의 방정식을 구하시오.

연속적이긴 하지만 잘 감이 오지 않으면 해석기하다.

- x축 위의 점 A와 y축 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB}=6$이고, 각각 x축, y축의 양의 부분 위를 움직일 때, 선분 AB의 중점의 자취의 방정식

⇨ P에 해당하는 점이 무수히 많다는 것을 인지한다. 또한 어떤 그림이 될 지 애매함을 느낌으로써 <자취의 방정식>을 세워야겠다는 생각을 한다.

⇨ $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$라 하면 두 변수 a, b가 결정되어야 $P(x,\ y)$도 결정된다. x, y 이외에도 변수가 두 개 더 존재한다는 사실을 인지한다. 즉, <변환 관계식>의 상황이므로 반드시 a, b의 관계식도 주어질 것이다.

⇨ $\overline{AB}=6$에서 $a^2+b^2=36$ (단, $a>0$, $b>0$)의 관계식을 얻는다.

- 주어진 조건에서 $P(x,\ y)$와 a, b와의 관계식을 얻을 수 있다.

⇨ $A(a,\ 0)$와 $B(0,\ b)$의 중점의 좌표가 $P(x,\ y)$이므로 $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{b}{2}$ 즉, $a=2x$, $b=2y$ (단, $x>0$, $y>0$)

이 식을 $a^2+b^2=36$에 대입하면 $(2x)^2+(2y)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2+y^2=9$ (단, $x>0$, $y>0$)

정답은 $x^2+y^2=9$ (단, $x>0$, $y>0$)

코칭 이 문제도 결국 <자취의 방정식>을 세우고 나서야 <아, 이런 규칙을 가지면 원의 일부가 되는구나!>라는 깨달음을 얻을 수 있다. <자취의 방정식>은 원래 비직관적인 상황에서 세우는 것이다. 어떤 도형이 그려질지 예측되지 않는 상황이라고 당황하지 말고 주어진 상황을 차분히 분석하여 자취의 방정식을 세운다. 또한 <자취의 방정식을 세우는 과정>이 크게 <3가지 과정>이라는 것을 이해한다면 자취의 방정식을 세울 때, 큰 도움이 된다.

028 이해를 위한 예제

길이가 $2a$인 선분 AB 위에 임의의 두 점 P, Q를 잡을 때, $AP > QB$일 확률을 구하여라.

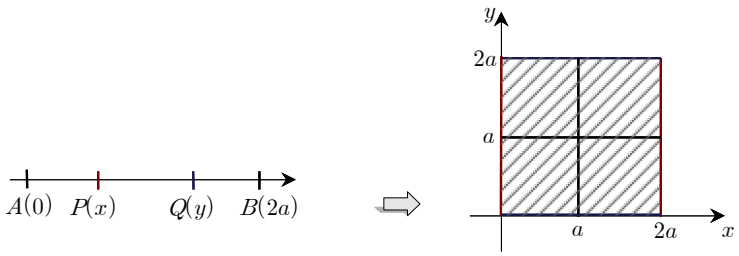
연속적이긴 한데 잘 감이 오지 않으면 해석기하다.

시행 길이가 $2a$인 선분 AB 위에 임의의 두 점 P, Q를 잡을 때,

- 이 각각의 점이 연속적으로 움직임에 따라 우리는 <기하학적 확률>임을 예측할 수 있다.
- 사실 이 문제를 처음 접해보는 경우 당황할 수 있다. 이유는 움직이는 점이 2개이기 때문이다.

  앞에서 $\dfrac{\text{영역의 크기}}{\text{영역의 크기}}$로 계산되는 기하학적 확률을 다룰 때는 움직이는 점이 1개만 존재했기 때문이다.

  이 문제를 통해서 아이디어를 기억하면 그만이다.



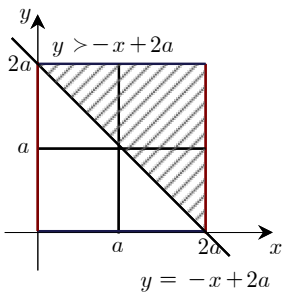
- 두 점은 서로 독립적으로 움직이므로 변수를 2개로 두어 $P(x)$, $Q(y)$라고 표현할 수 있다.

  이때, x와 y의 제한범위는 각각 $0 \le x \le 2a$, $0 \le y \le 2a$이 되는데 이 두 변수를 $(x,\ y)$라는 하나의 점으로 대응시킬 경우 문제의 상황은 위와 같은 그림으로 표현될 수 있다.

사건 $AP > QB$일 확률

- 위의 수직선에서 이 상황을 식으로 표현하면 $x > 2a - y$이고, 이것은 좌표평면에서 영역을 나타낸다. (부등식의 영역)

  $y > -x + 2a$, $0 \le x \le 2a$, $0 \le y \le 2a$를 좌표평면에 나타내면 아래 그림과 같다.



결국, $P(AP > QB) = \dfrac{2a^2}{4a^2} = \dfrac{1}{2}$

코칭 연속적이긴 하지만 감이 잘 오지 않는다면 움직이는 점을 변수로 잡아 <식을 세우고> 그것을 통해 <그림을 그리는> <해석기하의 아이디어>를 꼭 떠올려보자.

(원래 해석기하 문제는 비직관적이므로 반드시 자취의 방정식을 세워야 그 다음 단계로 나아갈 수 있음을 꼭 명심하자.)

공부는 예제를 가지고 하는 거야

촌철살인 경우의 수 | PART 1 수학적 확률

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 001

2006. 10. 가형(87%), 나형(87%). 4번. 3점

흰 공이 2개, 검은 공이 8개 들어있는 주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 개가 흰 공일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{11}{45}$ ③ $\frac{13}{45}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{17}{45}$

예제 002

2010. 11. 나형(51%). 17번. 4점

한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?

11	12	13
21	22	23

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

예제 003

2012. 사관학교. 문과. 5번. 3점

정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 나온 순서대로 x, y, z라 할 때, $x-y+z=7$이 될 확률은?

① $\frac{5}{72}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{7}{72}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

예제 004

2010. 4. 가형(32%). 20번. 3점

50원, 100원, 500원 짜리 동전이 각각 3개씩 모두 9개가 들어있는 지갑에서 동전 3개를 임의로 꺼낼 때, 꺼낸 모든 동전 금액의 합이 250원 이상일 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

예제 005

2010. 7. 나형(40%). 23번. 4점

다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수를 $a_1 a_2 a_3 a_4$라 한다. 예를 들면 1230인 경우 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 0$이다. 이와 같이 네 자리 자연수 $a_1 a_2 a_3 a_4$가 $a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

예제 006

2004. 11. 가형(80%), 나형(65%). 9번. 3점

키가 서로 다른 네 사람이 있다. 이들을 일렬로 세울 때, 앞에서 세 번째 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작을 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

예제 007

2010. 9. 나형(66%). 22번. 4점

어느 여객선의 좌석이 A구역에 2개, B구역에 1개, C구역에 1개 남아 있다. 남아 있는 좌석을 남자 승객 2명과 여자 승객 2명에게 임의로 배정할 때, 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정될 확률을 p라 하자. $120p$의 값을 구하시오.

예제 008

2007. 3. 가형(59%). 26번. 3점

$0, 1, 2, 3, \cdots, 9$의 정수가 각각 하나씩 적혀 있는 10장의 카드 중 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 a라 하고, 남은 9장의 카드 중 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 b라 하자. 이때 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 5, a, b인 세 자리 자연수가 6의 배수가 될 확률은?

① $\frac{7}{45}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{14}{45}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

예제 009

2006. 3. 가형(53%). 13번. 4점

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 가 있다. A 의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하였을 때, 한 집합이 다른 집합의 부분집합이 될 확률은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{13}{24}$ ⑤ $\frac{15}{28}$

예제 010

2007. 11. 나형(69%). 27번. 4점

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 임의로 2명씩 짝을 지어 3개의 조로 편성하려고 한다. A와 B는 같은 조에 편성되고, C와 D는 서로 다른 조에 편성될 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

예제 011

2009. 10. 나형(61%). 30번. 4점

보리, 팥, 수수, 조, 콩의 다섯 가지 잡곡 중 한 가지 이상의 잡곡과 쌀을 섞어서 모든 종류의 잡곡밥을 지었다. 이 중 임의로 하나의 잡곡밥을 선택할 때 2가지 잡곡만 들어간 잡곡밥을 선택할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 각 잡곡밥을 선택할 확률은 모두 같고 잡곡이 섞인 비율은 무시한다.)

예제 012

2004. 10. 나형(76%). 13번. 4점

숫자 1이 적힌 카드가 1장, 2가 적힌 카드가 2장, 3이 적힌 카드가 3장, 4가 적힌 카드가 4장 있다. 이 10장의 카드를 모두 섞은 후 두 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 두 장의 카드에 적힌 수가 같을 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

예제 013

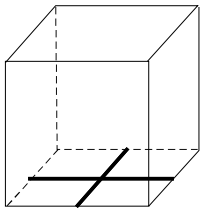
2007. 6. 가형(84%). 10번. 4점

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 구슬이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 그 구슬에 적힌 수를 m이라 할 때, 직선 $y=m$과 포물선 $y=-x^2+5x-\frac{3}{4}$이 만나도록 하는 수가 적힌 구슬을 꺼낼 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

예제 014

한 모서리의 길이가 $10cm$인 정육면체의 상자가 있다. 밑면이 네 개의 합동인 정사각형이 되도록 직교하는 두 직선이 밑면에 그어져 있다. 이 상자 속에 반지름이 $1cm$인 동전을 넣어서 충분히 흔들어 정지시킬 때, 이 동전이 직선과 만날 확률을 구하여라.



예제 015

두 사람이 일정한 장소에서 12시와 13시 사이에 만나기로 하고, 누가 먼저 도착하든 20분 이상은 기다리지 않기로 하였다. 두 사람이 12시와 13시 사이에 임의로 도착한다고 할 때, 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

정답과 해설

예제 001

REVIEW 적어도의 상황 - 촌철살인 확률과 통계 1

2006. 10. 가형(87%), 나형(87%). 4번. 3점

흰 공이 2개, 검은 공이 8개 들어있는 주머니에서 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 적어도 한 개가 흰 공일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{11}{45}$ ③ $\frac{13}{45}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{17}{45}$

- 흰 공이 2개, 검은 공이 8개 들어있는 주머니 : 같은 것도 모두 다른 것으로 본다.

시행 두 개의 공을 동시에 꺼낼 때, - 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다. ⇨ 즉, $n(S) = {}_{10}C_2$

사건 적어도 한 개가 흰 공일 확률

사건의 분석 적어도 한 개가 흰 공은 상황은

⇨ n(적어도 1개 흰공) $=$ n(흰 공 1개, 검은 공 1개) $+$ n(흰 공만 2개) 과 같이 계산해도 되고

$= {}_{10}C_2 - n$(검은 공만 2개) $= {}_{10}C_2 - {}_2C_0 \times {}_8C_2$ 과 같이 여사건의 아이디어를 이용할 수도 있다.

즉, P(적어도 1개 흰공) $= \dfrac{{}_{10}C_2 - {}_2C_0 \times {}_8C_2}{{}_{10}C_2} = \dfrac{45-28}{45} = \dfrac{17}{45}$ 이므로 정답은 ⑤

예제 002

REVIEW 분할적 사고

2010. 11. 나형(51%). 17번. 4점

한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?

11	12	13
21	22	23

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

시행 좌석 번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, ⇨ $n(S) = 6!$

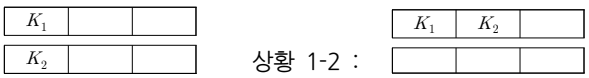
사건 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률

사건의 분석 분할적 사고 : 11번 자리에 누군가는 온다.

⇨ 한국 학생 2명을 K_1, K_2, 중국 학생 2명을 C_1, C_2, 일본 학생 2명을 J_1, J_2라고 할 때, 11번 자리에 누군가는 반드시 앉아야 하고 누가 앉든 각각에 대해서 같은 경우의 수가 발생한다.

- 누가 앉더라도 <다른 나라 학생 2쌍, 같은 나라 학생 1명>이 남기 때문에 경우의 수적 본질이 같은 상황이다.

- n(문제의 사건) $= 6 \times n$(상황 1)



- <K_2를 기준 : 대상을 기준>으로 상황을 다시 분할하면 n(상황 1) $= n$(상황 1−1) $+ n$(상황 1−2)

- n(상황 1−1)에서 중국 학생 2명을 C_1, C_2가 자리를 정하는 경우 4가지
- 이 4가지 각각에 대하여 <C_1, C_2의 자리를 정하는 2!가지>, <J_1, J_2를 남은 두 자리에 배치하는 2!가지> 이므로 n(상황 1−1) $= 4 \times 2! \times 2!$

- n(상황 1−2)에서 중국 학생 2명을 C_1, C_2가 자리를 정하는 경우 2가지
- 이 2가지 각각에 대하여 <C_1, C_2의 자리를 정하는 2!가지>, <J_1, J_2를 남은 두 자리에 배치하는 2!가지> 이므로 n(상황 1−1) $= 2 \times 2! \times 2!$

⇨ n(문제의 사건) $= 6 \times n$(상황 1) $= 6 \times \{n$(상황 1−1) $+ n$(상황 1−2)$\}$

$= 6 \times \{4 \times 2! \times 2! + 2 \times 2! \times 2!\} = 144$

P(문제의 사건) $= \frac{144}{6!} = \frac{1}{5}$ 이므로 정답은 ④

예제 003

REVIEW 부정방정식과 센다의 법칙 - 촌철살인 확률과 통계 1

2012. 사관학교. 문과. 5번. 3점

정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 나온 순서대로 x, y, z라 할 때, $x-y+z=7$이 될 확률은?

① $\frac{5}{72}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{7}{72}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

시행 정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 ⇨ $n(S) = 6\times6\times6$

사건 $x-y+z=7$이 될 확률

⇨ 부정방정식은 일일이 센다. 주어진 방정식을 변형하면 $x+z = 7+y$이고, y에 1부터 6까지 자연수 중 무엇인가가 들어갈 것이므로 <y에 들어가는 수>를 기준으로 상황을 분할한다.

표본공간 S : $6\times6\times6$가지

$y=1$인 경우	$x+z = 8$	⇨ 5가지
$y=2$인 경우	$x+z = 9$	⇨ 4가지
$y=3$인 경우	$x+z = 10$	⇨ 3가지
$y=4$인 경우	$x+z = 11$	⇨ 2가지
$y=5$인 경우	$x+z = 12$	⇨ 1가지
$y=6$인 경우	$x+z = 13$	⇨ 0가지

- 사실 $x+z = 8$만 보면 <중복조합의 아이디어>도 자연스럽게 떠오를 수 있지만 <공식을 쓰기 전에> 먼저 구체적으로 $(x,\ 1,\ z)$의 순서쌍의 상황을 생각해보면 $(1,\ 1,\ 7)$이나 $(0,\ 1,\ 8)$같은 상황을 세면 안 되므로 <중복조합의 공식>으로 한 번에 셀 수 없음을 인지해야 한다. 결국 위와 같이 일일이 세면 쉽게 경우의 수를 구할 수 있다.

즉, $P(x-y+z=7) = \frac{1+2+3+4+5}{6\times6\times6} = \frac{5}{72}$이므로 정답은 ①

코칭 느낌이 오지 않는 공식은 위험하다. 공식은 당연히 써도 된다고 확신이 될 때만 쓰는 것이다.
경우의 수는 항상 <분할적 사고>로 시작해서 <전체를 논리적으로 나열하는 과정>을 거친다. 그 과정에서 우리가 알고 있는 <공식의 상황>이 연결되어 공식을 써도 된다는 100%의 확신이 선다면 그 때 공식을 쓰는 것이다.
확신이 서지 않는다면 일일이 나열해야 하고, 일일이 나열해서 경우의 수를 세는 문제는 생각보다 많이 나온다.

티칭 정육면체 모양의 주사위 한 개를 세 번 던져서 - 시간의 순서가 있고, 전 시행의 결과에 후 시행이 영향을 받지 않으므로 독립적 선후시행이다.

예제 004

REVIEW 부정방정식과 센다의 법칙 - 촌철살인 확률과 통계 1

2010. 4. 가형(32%). 20번. 3점

50원, 100원, 500원 짜리 동전이 각각 3개씩 모두 9개가 들어있는 지갑에서 동전 3개를 임의로 꺼낼 때, 꺼낸 모든 동전 금액의 합이 250원 이상일 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. 이때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

- 50원, 100원, 500원 짜리 동전이 각각 3개씩 모두 9개가 들어있는 지갑 : 확률에서는 같은 동전도 다른 동전으로 본다.

시행 동전 3개를 임의로 꺼낼 때, - 한 번에 뽑고 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다. ⇨ $n(S) = {}_9C_3$

사건 꺼낸 모든 동전 금액의 합이 250원 이상일 확률

⇨ 전형적인 부정방정식 (or 문자가 여러 개인 부등식)의 해의 개수를 세는 문제이다. 이것은 <촌철살인 확률과 통계 1>에서 <센다의 법칙>으로 다룬 적이 있으며 일일이 셀 수밖에 없는 상황임을 설명하였다.

50원 짜리를 x개, 100원짜리를 y개, 500원 짜리를 z개 뽑았다고 할 때,

$50x+100y+500z \geq 250$ $(x,y,z=0,1,2,3)$과 $x+y+z=3$(총 3개를 뽑아야 하므로)을 만족하는 순서쌍 (x,y,z)의 개수가 곧 꺼낸 모든 동전 금액의 합이 250원 이상인 경우의 수이다.

오른쪽 문자가 여러 개인 부등식에서 계수가 가장 큰 z를 기준으로 일일이 대입하여 나열하되 $(x,y,z=0,1,2,3)$과 $x+y+z=3$을 만족하도록 대입한다. 예를 들어 $z=2$이면 $(x,\ y)$는 $(1,\ 0)$과 $(0,\ 1)$만 되는지 확인해보면 된다.

$10z$ +	$2y$ +	x ≥ 5	
3	0	0	상황 1
2	1	0	상황 2
	0	1	상황 3
1	2	0	상황 4
	1	1	상황 5
	0	2	상황 6
0	3	0	상황 7
	2	1	상황 8

위의 표와 같이 일일이 세면 8가지가 나오는 것을 알 수 있다. 문제는 위와 같이 8개라고 생각하면 틀린다는 것.

예를 들어 표본공간 ${}_9C_3$에서는 n(상황2)의 경우를 <서로 다른 500원 짜리 동전 3개 중 2개, 서로 다른 100원 짜리 동전 3개 중 1개>를 뽑은 경우의 수를 모두 고려하여 센 것이므로

$$n(250\text{원 이상}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) + n(\text{상황}4) + n(\text{상황}5) + n(\text{상황}6) + n(\text{상황}7) + n(\text{상황}8)$$

$$= {}_3C_3 + {}_3C_2\times{}_3C_1 + {}_3C_2\times{}_3C_1 + {}_3C_1\times{}_3C_2 + {}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1 + {}_3C_1\times{}_3C_2 + {}_3C_3 + {}_3C_2\times{}_3C_1$$

$$= 1 + 9 + 9 + 9 + 27 + 9 + 1 + 9 = 74$$

$$P(250\text{원 이상}) = \frac{74}{{}_9C_3} = \frac{74}{84} = \frac{37}{42}$$ 즉, $p+q = 79$ 정답은 79

정형화된 풀이 방식이 꼭 효율적이진 않다. 문제의 맞게 상황을 이해하며 푼다.

사건 : 500원짜리의 개수를 기준으로 상황을 나누면

상황 1	500원 3개, 나머지 0개		⇨ ${}_3C_3 \times {}_6C_0 = 1$	
상황 2	500원 2개, 나머지 1개		⇨ ${}_3C_2 \times {}_6C_1 = 18$	
상황 3	500원 1개, 나머지 2개		⇨ ${}_3C_1 \times {}_6C_2 = 45$	
상황 4	500원 0개	상황 4-1	100원 3개, 50원 0개	⇨ ${}_3C_0 \times {}_3C_3 \times {}_3C_0 = 1$
		상황 4-2	100원 2개, 50원 1개	⇨ ${}_3C_0 \times {}_3C_2 \times {}_3C_1 = 9$

- $n(250\text{원 이상}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) + n(\text{상황}4-1) + n(\text{상황}4-2)$

$$= {}_3C_3\cdot{}_6C_0 + {}_3C_2\cdot{}_6C_1 + {}_3C_1\cdot{}_6C_2 + {}_3C_0\cdot{}_3C_3\cdot{}_3C_0 + {}_3C_0\cdot{}_3C_2\cdot{}_3C_1 = 74$$

코칭 지면상 ${}_9C_3$의 상황을 구체적으로 나열하는 과정이 생략되었다. 이 과정을 통해 뽑힌 500원 짜리 동전의 개수를 기준으로 자연스럽게 조건을 만족하는 경우의 수를 세는 두 번째 풀이가 훨씬 좋은 풀이이다.

예제 005

REVIEW 조합과 자동배열의 상황 - 촌철살인 확률과 통계 1

2010. 7. 나형(40%). 23번. 4점

다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수를 $a_1 a_2 a_3 a_4$라 한다. 예를 들면 1230인 경우 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 0$이다. 이와 같이 네 자리 자연수 $a_1 a_2 a_3 a_4$가 $a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

시행 다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 ⇨ $n(S) = 4\times5\times5\times5$

사건 네 자리 자연수 $a_1 a_2 a_3 a_4$가 $a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4$를 만족할 확률

사건의 분석 결국 문제의 상황을 a_3의 자리를 기준으로 나누면 다음과 같다.

사건

	a_1	a_2	a_3	a_4
상황 1	1	2	3	
상황 2			4	

- a_3의 자리에 숫자 3보다 작은 수는 들어갈 수 없다. 예를 들어 2가 a_3의 자리에 들어갈 경우 <사건>을 만족하려면

a_1	a_2	a_3	a_4
0	1	2	

이어야 하는데 이것은 표본공간에서 고려한 네 자리 자연수에 포함되지 않는다.

- <상황 1> 경우 a_1과 a_2자리는 1과 2로 고정된다. a_4에 들어갈 수 있는 숫자가 $0,\ 1,\ 2$이므로 3가지

- <상황 2>의 경우 a_1과 a_2에는 0을 제외한 $1,\ 2,\ 3$ 중 두 개를 뽑을 경우 <문제의 사건>에 맞게 자동 배열된다. 이 각각에 대하여 a_4에 들어갈 수 있는 숫자는 $0,\ 1,\ 2,\ 3$ 네 가지 이므로 ${}_3C_2\times4$가지

⇨ 즉, $n(a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4) = n(\text{상황 1}) + n(\text{상황 2})$

$= 3 + {}_3C_2\times4 = 15$

$P(a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4) = \frac{15}{4\times5\times5\times5} = \frac{3}{100}$이므로 정답은 103

티칭 기준선정 Tip

⇨ 앞서 <촌철살인 확률과 통계 1>에서 다룬 것처럼 <제약조건>이 많은 자리 or 대상을 기준으로 세우는 것이 좋다. <제약조건>이 많을수록 고려해야 하는 가짓수가 적어지고, 각 분할된 상황 안에 <제약조건이 없는 대상 or 자리>가 남아야 공식을 사용하기 용이하기 때문이다.

티칭 다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수

⇨ 행위 자체가 언급되지 않았으므로 시행의 종류를 굳이 나눌 필요는 없다. 하지만 $n(S) = 4\times5\times5\times5$임을 생각해 봤을 때, 4번 뽑는 시행에 대응시킬 수 있다. (단, 첫 시행에서는 $1, 2, 3, 4$중에서만 1개를 뽑는다.)

결국 독립적 선후시행으로 봐도 상관없다. (너무 애매하면 굳이 구분하지 않아도 좋다.)

⇨ 자꾸 억지로라도 시행을 구분하는 이유는 그래야 후에 배우는 <확률의 곱셈정리>를 적용할 수 있기 때문이다. 하지만 현재는 가볍게 보고 넘어가자. 그리고 어차피 이 문제는 곱셈정리를 적용해서 푸는 것이 더 비효율적이다.

예제 006

REVIEW 여러 가지 배열 - 촌철살인 확률과 통계 1

2004. 11. 가형(80%), 나형(65%). 9번. 3점

키가 서로 다른 네 사람이 있다. 이들을 일렬로 세울 때, 앞에서 세 번째 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작을 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

- 키를 숫자에 대응시켜 1, 2, 3, 4로 표현해보자. (숫자가 크면 키도 큰 것이라고 생각하자.)

시행 이들을 일렬로 세울 때 ⇨ $n(S) = 4!$

사건 앞에서 세 번째 사람이 자신과 이웃한 두 사람보다 키가 작을 확률

사건의 분석 결국 문제의 상황을 세 번째 자리를 기준으로 나누면 다음과 같다. (3이나 4는 올 수 없음을 이해한다.)

사건 A

	첫 번째	두 번째	세 번째	네 번째
상황 1			1	
상황 2			2	

- <상황 1>은 세 사람을 배열하는 모든 경우에 대해서 <주어진 사건>를 만족시킨다. 즉, $n(\text{상황}1) = 3!$
- <상황 2>는 1의 위치는 첫 번째로 정해지고, 3, 4를 배열하는 경우에 대해서 <사건 A>을 만족시킨다.
  즉, $n(\text{상황}2) = 2$

⇨ $n(\text{문제의 사건}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) = 3! + 2$이므로

$P(\text{문제의 사건}) = \frac{3!+2}{4!} = \frac{1}{3}$이다. 정답은 ①

예제 007

REVIEW 여러 가지 배열 - 촌철살인 확률과 통계 1

2010. 9. 나형(66%). 22번. 4점

어느 여객선의 좌석이 A구역에 2개, B구역에 1개, C구역에 1개 남아 있다. 남아 있는 좌석을 남자 승객 2명과 여자 승객 2명에게 임의로 배정할 때, 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정될 확률을 p라 하자. $120p$의 값을 구하시오.

시행 남아 있는 좌석을 남자 승객 2명과 여자 승객 2명에게 임의로 배정할 때 ⇨ $n(S) = 4!$

- 서로 구분하지 않는다는 말이 없다면 4자리는 모두 구분이 가는 것이다.

사건 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정

사건의 분석 주어진 사건의 상황을 생각해보면 보면 다음과 같다.

A	A	B	C
남	남	여	여

표본공간에서 A구역의 2개의 자리를 다른 것으로 생각했기 때문에 남자를 A구역 두 자리에 배치하는 경우의 수도 고려해야 한다. 즉, $n(\text{남자승객 모두}A\text{구역}) = 2!\times 2!$

⇨ 그러므로 $P(\text{남자승객 모두}A\text{구역}) = \frac{2!\times 2!}{4!} = \frac{1}{6}$

$120p = 20$이므로 정답은 20

예제 008

REVIEW 정수론 : 정수분류법과 배수판정법 - 촌철살인 확률과 통계 1

2007. 3. 가형(59%). 26번. 3점

$0, 1, 2, 3, \cdots, 9$의 정수가 각각 하나씩 적혀 있는 10장의 카드 중 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 a라 하고, 남은 9장의 카드 중 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 b라 하자. 이때 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 5, a, b인 세 자리 자연수가 6의 배수가 될 확률은?

① $\frac{7}{45}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{14}{45}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

시행 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 a, 남은카드 중 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수를 b

⇨ $n(S) = 10 \times 9$

사건 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 각각 5, a, b인 세 자리 자연수가 6의 배수

사건의 분석 3의 배수는 각 자리숫자의 합의 3의 배수이어야 하고,
2의 배수는 끝의 한자리가 0 또는 2의 배수이다. <- 배수판정법>
6의 배수는 3의 배수이면서 2의 배수이기 때문에 이 두 가지 조건을 모두 만족해야 한다. 이 상황을 정리하면 오른쪽과 같다. 결국 하나하나 센다.

상황 1	5		0
상황 2	5		2
상황 3	5		4
상황 4	5		6
상황 5	5		8

$n(\text{문제의 사건}) = n(\text{상황}1) + n(\text{상황}2) + n(\text{상황}3) + n(\text{상황}4) + n(\text{상황}5)$

$= n(1,4,7) + n(5,8) + n(0,3,6,9) + n(1,4,7) + n(2,5)$

$= 3 + 2 + 4 + 3 + 2 = 14$

$P(\text{문제의 사건}) = \frac{14}{10 \times 9} = \frac{7}{45}$ 이므로 정답은 ①

예제 009

REVIEW 집합과 확률 - 촌철살인 확률과 통계 1

2006. 3. 가형(53%). 13번. 4점

집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$가 있다. A의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하였을 때, 한 집합이 다른 집합의 부분집합이 될 확률은?

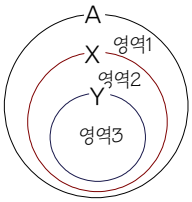
① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{13}{24}$ ⑤ $\frac{15}{28}$

시행 A의 부분집합 중에서 임의로 서로 다른 두 집합을 택하였을 때,

⇨ A의 부분집합의 개수가 $2^4 = 16$이므로 이 중 서로 다른 두 집합을 택하면 $n(S) = {}_{16}C_2$

사건 한 집합이 다른 집합의 부분집합

사건의 분석 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램을 그려놓고 3개의 영역으로 나누고 각 영역에 원소 1, 2, 3, 4를 적당히 배치하면 문제의 조건을 만족한다.
즉, 원소 1, 2, 3, 4가 각각 들어갈 수 있는 영역의 수는 각각 3가지씩이므로 3^4
이 중 <영역 1>과 <영역 3>에만 모든 원소가 들어가는 모든 경우인 2^4가지는 <서로 같은 두 집합>이 되므로 제거해야 한다. (표본공간에서 서로 다른 두 집합을 뽑았다.)



⇨ $n(\text{문제의 사건}) = 3^4 - 2^4$

$P(\text{문제의 사건}) = \frac{3^4 - 2^4}{{}_{16}C_2} = \frac{13}{24}$ 이므로 정답은 ④

예제 010

REVIEW 분할의 상황과 선분할 개념 - 촌철살인 확률과 통계 1

2007. 11. 나형(69%). 27번. 4점

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 임의로 2명씩 짝을 지어 3개의 조로 편성하려고 한다. A와 B는 같은 조에 편성되고, C와 D는 서로 다른 조에 편성될 확률은?

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

시행 6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 임의로 2명씩 짝을 지어 3개의 조로 편성 ⇨ $n(S) = {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$

사건 A와 B는 같은 조에 편성되고, C와 D는 서로 다른 조에 편성

사건의 분석 문제에서 정해준 특정한 상황에서 각 조들은 <명확한 구분기준>이 생겼기 때문에 더 이상 <분할의 상황>이 아닌 <조합의 상황>이다. - 선분할 개념

A B	C □	D □

위와 같이 조를 나누는 경우의 수는 E와 F가 C와 D가 있는 두개의 조 중에서 하나를 선택하여 들어가는 경우의 수와 같다. 즉, n(문제의 사건) $= 2!$

P(문제의 사건) $= \frac{2}{15}$이므로 정답은 ③

예제 011

REVIEW 이항계수의 성질 - 촌철살인 확률과 통계 1

2009. 10. 나형(61%). 30번. 4점

보리, 팥, 수수, 조, 콩의 다섯 가지 잡곡 중 한 가지 이상의 잡곡과 쌀을 섞어서 모든 종류의 잡곡밥을 지었다. 이 중 임의로 하나의 잡곡밥을 선택할 때 2가지 잡곡만 들어간 잡곡밥을 선택할 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 서로소인 두 자연수 p, q의 합 $p+q$의 값을 구하시오. (단, 각 잡곡밥을 선택할 확률은 모두 같고 잡곡이 섞인 비율은 무시한다.)

시행 보리, 팥, 수수, 조, 콩의 다섯 가지 잡곡 중 한 가지 이상의 잡곡과 쌀을 섞어서 모든 종류의 잡곡밥을 지었다.
이 중 임의로 하나의 잡곡밥을 선택할 때 - 결국 모든 가능한 결과는 다음과 같이 계산 된다.

⇨ $n(S) = n$(한 가지) $+ n$(두 가지) $+ n$(세 가지) $+ n$(네 가지) $+ n$(다섯 가지)

$= {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 - {}_5C_0 = 2^5 - 1$

사건 2가지 잡곡만 들어간 잡곡밥을 선택하는 경우

사건의 분석 위의 표본공간 중 n(두 가지)을 말한다. 즉, n(두 가지) $= {}_5C_2 = 10$

그러므로 P(두 가지) $= \frac{10}{2^5-1} = \frac{10}{31}$이고, $p+q = 41$이다.

정답은 41

예제 012

REVIEW 파스칼 삼각형 - 촌철살인 확률과 통계 1

2004. 10. 나형(76%). 13번. 4점

숫자 1이 적힌 카드가 1장, 2가 적힌 카드가 2장, 3이 적힌 카드가 3장, 4가 적힌 카드가 4장 있다. 이 10장의 카드를 모두 섞은 후 두 장의 카드를 임의로 뽑을 때, 두 장의 카드에 적힌 수가 같을 확률은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

시행 이 10장의 카드를 모두 섞은 후 두 장의 카드를 임의로 뽑을 때, ⇨ $n(S) = {}_{10}C_2$

사건 두 장의 카드에 적힌 수가 같은 경우

사건의 분석 n(문제의 사건) $= n$(2적힌카드 2장) $+ n$(3적힌카드 2장) $+ n$(4적힌카드 2장)

$= {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 = {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 = {}_4C_3 + {}_4C_2 = {}_5C_3$

- 물론 그냥 계산해도 쉽다. 하지만 이식을 보면서 파스칼 삼각형의 성질을 떠올리지 못한다면 이 문제가 조금 더 복잡하게 나왔을 때 풀 수 없게 된다.

P(문제의 사건) $= \frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{9}$ 이므로 정답은 ②

예제 013

REVIEW 수학내적소재

2007. 6. 가형(84%). 10번. 4점

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10개의 구슬이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 그 구슬에 적힌 수를 m이라 할 때, 직선 $y=m$과 포물선 $y=-x^2+5x-\frac{3}{4}$이 만나도록 하는 수가 적힌 구슬을 꺼낼 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

시행 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼내어 그 구슬에 적힌 수를 m이라 할 때 ⇨ $n(S) = {}_{10}C_1$

사건 직선 $y=m$과 포물선 $y=-x^2+5x-\frac{3}{4}$이 만나도록 하는 수가 적힌 구슬을 꺼내는 경우

사건의 분석 직선 $y=m$과 포물선 $y=-x^2+5x-\frac{3}{4}$이 만난다.

$\Leftrightarrow$ $-x^2+5x-\frac{3}{4} = m$이 실근을 갖는다. $\Leftrightarrow$ $4x^2-20x+4m+3 = 0$이 실근을 갖는다.

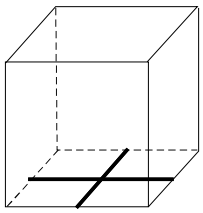
$\Leftrightarrow$ $D/4 = 100-4(4m+3) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \leq \frac{11}{2}$ 결국 n(문제의 사건) $= 5$

P(문제의 사건) $= \frac{5}{{}_{10}C_1} = \frac{1}{2}$ 이므로 정답은 ④

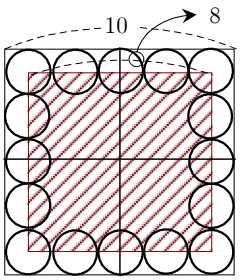
예제 014

REVIEW 기하학적 확률

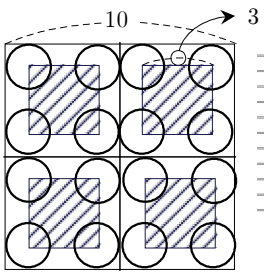
한 모서리의 길이가 $10cm$인 정육면체의 상자가 있다. 밑면이 네 개의 합동인 정사각형이 되도록 직교하는 두 직선이 밑면에 그어져 있다.
이 상자 속에 반지름이 $1cm$인 동전을 넣어서 충분히 흔들어 정지시킬 때, 이 동전이 직선과 만날 확률을 구하여라.



- 동전은 원이므로 원과 직선이 만날 확률을 구하는 것이다.
  원을 중심에 일대일 대응시켰을 때. 원의 중심이 존재할 수 있는 영역의 넓이가 표본공간이 된다.



원의 중심이 존재할 수 있는 영역의 넓이는 $8\times8 = 64$ 그러므로 표본공간에 해당하는 영역의 넓이는 64이다.



이 동전이 직선과 만나지 않으려면 원의 중심이 이 그림과 같이 있어야 한다. 즉, 이 조건을 만족시키는 영역의 넓이는 $9\times4 = 36$

- 위의 그림을 참조하면 표본공간에 해당하는 영역의 넓이는 64이고,
  동전이 직선과 만나지 않기 위해 원의 중심이 존재할 수 있는 영역의 넓이는 36이다.

- 즉, 동전이 직선과 만나기 위해 중심이 존재할 수 있는 영역은 $64-36 = 28$

$$P(\text{동전이 이 직선과 만날}) = \frac{28}{64} = \frac{7}{16}$$

예제 015

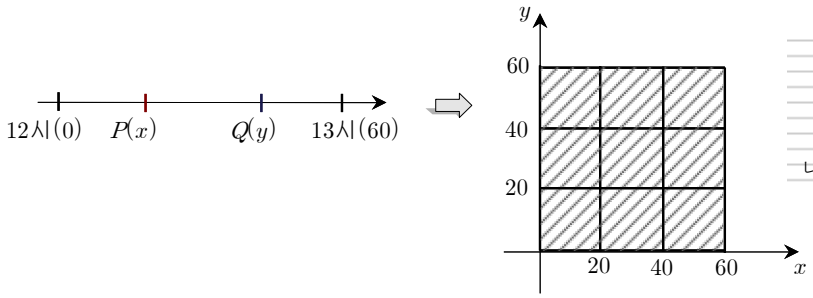
REVIEW 기하학적 확률과 해석기하

두 사람이 일정한 장소에서 12시와 13시 사이에 만나기로 하고, 누가 먼저 도착하든 20분 이상은 기다리지 않기로 하였다. 두 사람이 12시와 13시 사이에 임의로 도착한다고 할 때, 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

연속적이긴 한데 잘 감이 오지 않으면 해석기하다.

시행 두 사람이 12시와 13시 사이에 임의로 도착한다고 할 때,

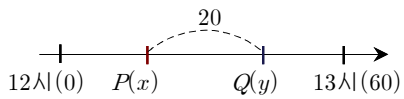
- 이 두 사람을 독립된 확률변수 $P(x), P(y)$라 둔다. 아래와 같이 좌표로 표현할 경우 x, y의 제한범위를 정하면 각각 $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$이므로 이것을 좌표평면에 표현하면 표본공간의 영역의 크기는 3600이다.



표본공간에 해당하는 영역을 나타내는 점 (x, y)는 $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$의 범위를 만족하는 점이다. 즉, 표본공간을 나타내는 영역의 넓이는 $(60)^2 = 3600$이다.

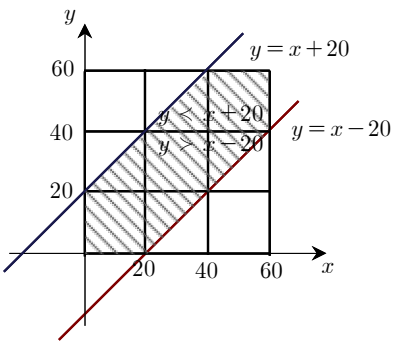
사건 서로 20분 이상 기다리지 않는 두 사람이 만날 확률

사건의 분석 이 상황을 수직선에 표현하면 다음과 같다.



즉, 이 상황을 식으로 표현하면 $|x-y| < 20$이고, 이것을 풀면 $y > x-20$, $y < x+20$이다.

$0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$, $y > x-20$, $y < x+20$을 좌표평면에 나타내면 아래 그림과 같다.



표본공간의 부분집합 중 $y > x-20$과 $y < x+20$ 을 만족하는 영역의 넓이는 이 그림과 같으므로 2000이다.

⇨ 위의 그림을 참조하면 결국 $P(\text{두 사람이 만날}) = \dfrac{2000}{3600} = \dfrac{5}{9}$이다.

정답은 $\dfrac{5}{9}$

Part 2. 확률의 계산 1	
	#1. 비율의 면적화와 영역 분할
	#2. 확률의 덧셈정리
	#3. 조건부확률
	#4. 사건의 독립과 종속 (VS 시행의 독립과 종속)

촌철살인 #2. <개수>가 아닌 <비율의 연산>으로 구하는 확률

- 확률은 비율이고 비율은 얼마든지 여러 가지 방식으로 표현될 수 있다. ⇨ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{0.2}{0.3} = \cdots$

  우리가 특정 확률을 반드시 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구해야 되는 것은 아니다.

- 옛 이야기 <오성과 한음>에서 하루는 장난이 심한 오성에게 아버지가 한 말의 콩을 세라는 숙제를 내준다. 여기에서 오성은 한 가지 꾀를 생각해 냈는데 방법은 이러하다. 콩 한 되를 센 다음 한 말에 몇 되가 나오는지 센 후 곱하는 것이다. 그냥 직관적으로 생각하기에도 이러한 방법은 정확하지는 않겠지만 전체의 개수를 파악하는 매우 효율적인 방법임을 알 수 있다. 이 과정에서 <개수 → 부피>를 환산하여 생각하는 과정이 들어가는데 콩의 크기가 일정하고, 부피도 정확하게 측정했다는 이상적인 상황을 가정한다면, 이 방법은 매우 효율적이기도 하면서 매우 정확하기도 하다.

- 이 단원에서는 앞에서 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구했던 확률을 $\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$ 또는 <비율끼리의 연산>을 통해서 구하는 방법을 배운다. 이러한 방법은 오성과 한음의 일화에서 볼 수 있듯이 <개수>로 구하는 것에 비해 훨씬 효율적이다. 하지만 이러한 방법이 항상 효율적인 것만은 아니며, (콩의 개수가 몇 개 되지 않는다면 부피를 이용해서 세는 것보다 일일이 세는 것이 나을 수 있다.) 눈에 보이는 <개수>에 비해서 <비율>이라는 개념은 다소 추상적이기 때문에 받아들이기 어려운 부분이 있을 수 있다. 그럼에도 불구하고 우리는 <효율성>을 포기할 수 없고, 결국 이 단원에서 <연산의 정당성>을 받아들여야 한다.

비율을 느껴라.

- 우리는 흔히 <비례상수>를 활용하여 <비율 값 → 실제 값>으로 바꾸어 계산한다.
  예를 들면 속도라는 개념이 대표적인 <분수로 표현되는 비율 값>이다. 속도가 2인 경우 <실제 거리 2>라는 뜻이 아니라 <단위시간 당 간 거리>가 2라는 뜻이다. 이런 경우 t라는 시간이 흘렀다고 가정하고 <단위시간 당 간 거리>를 <실제로 간 거리 $2t$>로 두고 푸는 것이 이런 맥락이다.
  농도 또한 <분수로 표현되는 비율 값>인데 소금물의 농도가 2%라고 하는 것은 <실제 소금의 양>이 아닌 <소금물 $100g$ 당 소금의 양>을 뜻하므로 소금물의 양을 k라고 가정하고 <실제 소금의 양 $2k$>로 두고 푸는 것도 같은 맥락이라고 볼 수 있다. 하지만 <확률>에서는 이처럼 실제 값으로 환산해서 푸는 것이 아닌 <비율> 그 자체로 느끼고 <비율> 그 자체로 연산해야 한다. 비율 그 자체를 느끼고 계산하는 대표적인 교과서 내용 중 <가비의 리>가 있다.

- <비율> 그 자체를 느끼기 위해서는 <비율의 면적화>를 진행한다. 이것은 개수를 비율과 면적으로 환산하는 과정이며 위에서 언급한 <오성이 생각해낸 꾀>와 근본적으로는 같은 아이디어이다.

공식에 연연하지 않고 푼다.

- 수학에서 사실 <공식>은 거의 없다. 대부분이 <사고방식>이다. 공식을 외우고 그 공식에 상황을 끼워 맞추려고만 한다면 경직된 사고를 하게 될 것이고, 당연히 그것이 불가능하거나 어색한 상황들을 마주하게 될 것이다. 문제가 생긴다. <촌철살인 확률과 통계 1,2>에서는 <경우의 수와 확률>을 공식에 연연하지 않고, 의미 그대로 이해하여 우리가 가진 Base 안에서 합리적 추론을 통해 푸는 것을 추구한다. 그리고 그런 이해와 느낌을 추구하다보면 우리가 배우는 대부분의 식들은 사실 그냥 <공식>이 아닌 <사고방식>임을 깨닫게 된다.

MAP

뼈대가 되는 기본 개념

#1 비율의 면적화와 영역 분할

- 비율이라는 추상적인 개념을 면적이라는 구체적인 양으로 환산하여 생각하는 이론이다.

- 확률이 $\frac{개수}{개수}$라는 고정관념을 버려야한다. 물론 $\frac{개수}{개수}$는 고등학교에서 다루는 확률 중에 가장 많은 비중을 차지하기는 하지만 이것 역시 <전체에서 부분이 차지하는 비율>을 구하는 한 가지 방법에 불과하다. <비율의 면적화>를 통해 <개수를 면적으로 환산>하는 것을 받아들일 수 있다면 이를 통해 <덧셈정리>, <조건부 확률>, <곱셈정리> 그리고 <사건의 독립과 종속>까지 모두 직관적으로 이해할 수 있다.

- <확률의 연산>에서도 부분적으로는 수학적 확률을 구해야 하는데, <표본공간을 추론하고 관찰하는 과정>은 앞에서 이미 앞에서 충분히 설명했으므로 생략하기로 한다. 물론, 어려운 문제나 과정을 서술할 필요가 있는 문제에서는 간단히 서술하기로 한다.

1. 단순시행

1) 비율의 면적화와 영역 분할

- 확률은 전체에서 부분이 차지하는 비율이고 비율은 얼마든지 여러 가지 방식으로 표현될 수 있다.

⇨ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{0.2}{0.3} = \cdots$ 와 같이 똑같은 확률도 구하는 방법에 따라 여러 가지 방식으로 표현될 수 있다.

특정 확률을 반드시 $\frac{개수}{개수}$로만 구해야 하는 것은 아니다.

- 교과서에서 말하고 있는 <표본공간의 각 근원사건은 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되어야 한다.>라는 조건은

⇨ 확률을 $\frac{개수}{개수}$로 구하는 것에 있어서는 필수적인 조건이지만

⇨ 확률을 $\frac{비율}{비율}$로 구하거나 비율끼리의 연산을 통해서 확률을 구하는 것에 있어서는 필수적인 조건이 아니다.

- 오히려 <표본공간의 각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대가 되지 않기 때문에> 앞으로는 확률을 비율×비율, 비율±비율, $\frac{비율}{비율}$로 표현해야 하고 이것을 시각적으로 표현한 방법이 바로 <비율의 면적화와 영역분할> 개념이다. 여기에서 확률을 구한다는 것은 곧 면적을 구한다는 것과 같다.
<비율의 면적화와 영역분할>을 이용하면 <확률의 연산>을 직관적으로 받아들일 수 있다.

코칭 <확률의 연산>을 모두 공부하더라도 <부분적으로는 수학적 확률>을 구해야 한다.

2) 단순시행에서 비율의 면적화

⇨ 예를 들어 1, 1, 1, 2, 3, 4가 각각 적혀있는 공이 주머니에 있을 때 하나를 뽑는 경우를 생각해보자.
이것은 단순시행이므로 집합으로 표현하면 $S = \{1_a, 1_b, 1_c, 2, 3, 4\}$과 같이 표현할 수 있고, $P(S)$는 항상 1이다.
비율의 면적화란 모든 가능한 경우를 집합으로 표현하지 않고 면적을 이용하여 시각적으로 표현한 것이다.

사고방식 1 - 1, 1, 1, 2, 3, 4를 서로 다른 6개의 숫자 1_a, 1_b, 1_c, 2, 3, 4로 보고 면적을 분할하면 다음과 같다.

표본공간 S (전체면적=1)

1_a	1_b	1_c
2	3	4

- 이때 표본공간의 확률 $P(S) = 1$이므로 전체면적을 1로 생각한다.

- 1이 나올 확률을 구하는 것은 1에 해당하는 면적을 구하는 것과 같다.

1_a	1_b	1_c
2	3	4

⇨ $\frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$

- 짝수가 나올 확률을 구하는 것은 2와 4에 해당하는 면적을 구하는 것과 같다.

1_a	1_b	1_c
2	3	4

⇨ $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

사고방식 2 - 면적으로 표현할 경우, 확률을 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구하는 것이 아니기 때문에 1_a, 1_b, 1_c을 반드시 서로 다른 세 개로 표현할 필요가 없다. ⇨ 1의 비율을 면적으로 표현하면 된다.

표본공간 S (전체면적=1)

	1	
2	3	4

- 이때 표본공간의 확률 $P(S) = 1$이므로 전체면적을 1로 생각한다.

- 1이 나올 확률을 구하는 것은 1에 해당하는 면적을 구하는 것과 같다.

	1	
2	3	4

⇨ $\frac{1}{2}$

- 짝수가 나올 확률을 구하는 것은 2와 4에 해당하는 면적을 구하는 것과 같다.

	1	
2	3	4

⇨ $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

티칭 용어의 신정의

1) 표본공간 : 면적이 1인 직사각형 (or 정사각형)
2) 시행 : 영역의 분할
3) 사건 : 분할된 영역의 일부
4) 확률 : 사건에 해당하는 영역의 면적

코칭 위의 두 가지 사고 방식의 차이가 <수학적 확률>과 <확률의 계산>을 구분해 주는 근본적인 사고의 차이이다.
첫 번째는 <경우의 수를 고려하여 영역을 분할>한 것이고, 두 번째는 <사건의 비율을 고려해 영역을 분할>한 것이다.
전자는 영역을 6개의 부분으로 나누고 있는 반면에 후자는 영역을 4개의 부분으로만 나누는 효율성을 보여준다.

코칭 좋은 개념의 가치는 어려운 문제에서 더욱 잘 느낄 수 있다.

2. 독립적 선후시행

- $1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6$이 각 면에 하나씩 써져있는 정육면체 주사위를 던진 후,
  $1,\ 1,\ 3,\ 4$가 각 면에 하나씩 써져있는 정사면체 주사위를 던지는 시행에 대하여 <비율의 면적화와 영역 분할>을 해보자.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1
4
5
6

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1, 1	1, 3	1, 4
4, 1	4, 3	4, 4
5, 1	5, 3	5, 4
6, 1	6, 3	6, 4

- 표본공간의 면적을 1로 정한 후 <선 시행 : S_1>에서 나올 수 있는 <근원사건의 비율>을 고려하여 영역을 분할하고,
  <선 시행 : S_1>의 결과로 분할된 각 영역을 다시 <후 시행 : S_2>에서 나올 수 있는 근원사건의 비율에 따라 분할한다.

- 앞에 던진 주사위가 1이 나오는 사건을 A라 하면 $P(A)$는 최종 분할된 표본공간에서 A에 해당하는 넓이이다.

  ⇨ $P(A) = \frac{1}{2}$

- 뒤에 던진 주사위가 4가 나오는 사건을 B라 하면 $P(B)$는 최종 분할된 표본공간에서 B에 해당하는 넓이이다.

  ⇨ $P(B) = \frac{1}{4}$

3. 종속적 선후시행

- $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이 각 면에 하나씩 써져있는 정육면체 주사위를 던져서
  홀수의 눈이 나오면 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이 각 면에 하나씩 써져있는 같은 정육면체 주사위를 던지고,
  짝수의 눈이 나오면 $1,\ 2,\ 3,\ 4$가 각 면에 하나씩 써져있는 정사면체 주사위를 던지는 시행의 모든 가능한 결과는
  순서쌍 집합 $S = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,(1,\ 6),\ (3,\ 1),\ \cdots,\ (5,\ 6),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 4),\ (4,\ 1)\ \cdots,\ (6,\ 4)\}$
  으로 표현될 수 있다. 이 문제에 대하여 <비율의 면적화 : 표본공간의 영역분할>을 해보자.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1
2
3
4
5
6

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4		
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4		
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4		

- 표본공간의 면적을 1로 정한 후 <선 시행 : S_1>에서 나올 수 있는 <근원사건의 비율>을 고려하여 영역을 분할하고,
  <선 시행 : S_1>의 결과로 분할된 각 영역을 다시 <후 시행 : S_2>에서 나올 수 있는 근원사건의 비율에 따라 분할한다.

- 보다시피 $(1,\ 1)$과 $(2,\ 1)$은 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않기 때문에 이 시행에서는 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구할 수 없다. 여기에서 만약 뒤에 던진 주사위의 눈이 4가 나올 확률을 구하라고 한다면 어떻게 될까?

표본공간 S (전체면적=1)

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4		
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4		
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4		

- 이것은 전체면적 중 ▭의 부분이 차지하고 있는 비율을 구하라고 하는 것이고,

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{24}\text{이다.}$$

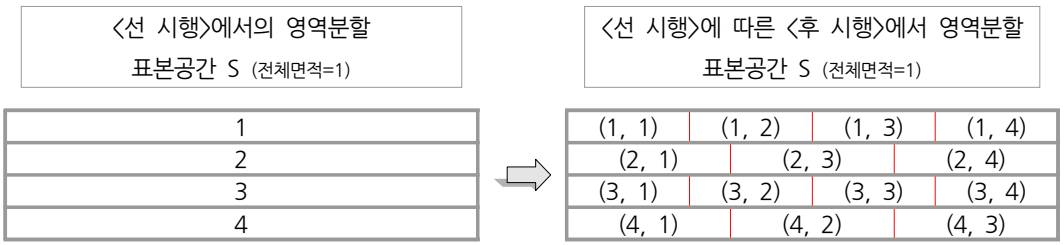
⇨ 예를 들어 $(1,\ 4)$에 해당하는 부분의 면적 ⇨ 전체면적의 $\frac{1}{6}$의 면적의 다시 $\frac{1}{6}$을 차지하고 있으므로 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

$(2,\ 4)$에 해당하는 부분의 면적 ⇨ 전체면적의 $\frac{1}{6}$의 면적의 다시 $\frac{1}{4}$을 차지하고 있으므로 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}$

029 이해를 위한 예제

주머니에 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내 홀수의 눈이 나오면 공을 다시 넣은 후 같은 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고 짝수의 눈이 나오면 다시 넣지 않고 한 개의 공을 꺼낸다. 다음 시행에 따른 표본공간의 각 원소를 일어날 수 있는 비율에 따라 직사각형의 면적으로 표현하라. (단, 전체면적은 1이다.)

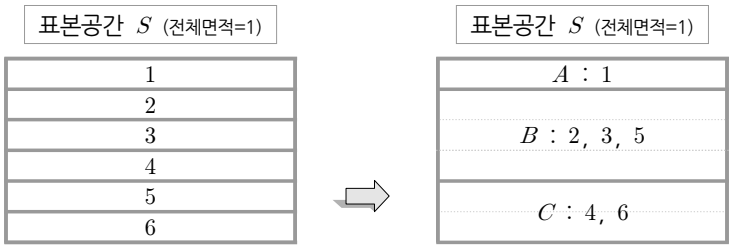
종속적 선후시행 에서 표본공간을 <면적화>하는 기본 연습



- <선 시행>의 나올 수 있는 결과에 따라 표본공간의 면적을 1로 정한 후 분할하고,
  <선 시행>의 결과로 분할된 각 영역을 다시 <후 시행>의 나올 수 있는 결과에 따라 다시 분할한다.

030 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나 씩 적인 정육면체 주사위를 한 번 던질 때, 나오는 수를 약수의 개수가 1개인 사건을 A, 2개인 사건을 B, 3개 이상인 사건을 C라고 할 때, 각 사건을 일어날 수 있는 비율에 따라 직사각형의 면적으로 표현하라. (단, 전체면적은 1이다.)



- 꼭 근원사건을 기준으로 영역을 분할해야 하는 것은 아니다.
  문제에서 요구하는 조건에 따라서 <같은 성질이 있는 원소들>끼리 함께 묶어 처리할 수도 있다.

#2 확률의 덧셈정리

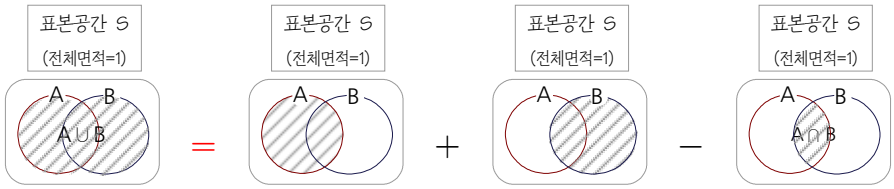
- <수학적 확률>을 통해서 증명되는 식이 아니다.

즉, $\frac{개수}{개수}$로 증명하는 <공식>이 아니라 있는 그대로 받아들이는 자명한 식이다. <확률끼리 더하고 빼서> 확률을 구할 수 있다는 사실을 자연스럽게 인정하고 받아들였다면 <#2. 확률의 덧셈정리>를 알았다고 생각해도 좋다.

1. 확률의 덧셈정리

1) A 또는 B가 발생할 확률

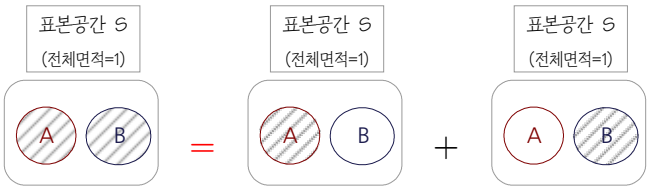
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



- 비율의 면적화 위의 벤다이어그램처럼 표현한 도표는 <확률을 면적>으로 표현한 것이라고 생각한다.
- $P(A \cup B)$에 해당하는 면적을 구하기 위해 $P(A)$와 $P(B)$에 해당하는 면적을 더한 후 $P(A \cap B)$에 해당하는 면적을 빼는 것을 자연스럽게 받아들인다.

2) A와 B가 배반인 경우 A 또는 B가 발생할 확률

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



- 비율의 면적화 위의 벤다이어그램처럼 표현한 도표는 확률을 면적으로 표현한 것이라고 생각한다.
- A와 B가 배반인 경우 $P(A \cup B)$에 해당하는 면적을 구하기 위해 $P(A)$와 $P(B)$에 해당하는 면적을 더한다는 것을 자연스럽게 받아들인다.

티칭 사건 A와 사건 B는 우리가 정하는 것이다. 문제에서 주어진 상황이 한 번에 계산할 수 없는 경우에는 주어진 상황을 분할해야 하고, 이때는 가급적이면 <서로 배반이도록 상황을 분할>해야 한다.

- 문제에서 <구하는 사건 K>를 <서로 배반>인 사건 A과 B로 분할하여 $K = A \cup B$을 만족하는 경우
  ⇨ $P(K) = P(A) + P(B)$로 계산할 수 있다.

- 만약 <구하는 사건K>를 어쩔 수 없이 <동시에 발생하는 경우>가 존재하도록 분할했다면
  ⇨ $P(K) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$로 계산해야 한다.

코칭 <개수>를 구할 수 있는 상황이 주어진 경우에는 $P(A\cup B)$를 구하기 위해 굳이 $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$을 각각 구해서 $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$의 연산을 적용할 필요가 없다.

⇨ 사실 대부분의 덧셈정리 문제는 $\dfrac{n(A\cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$ 와 같이 $\dfrac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 푼다.

하지만 이 부분을 배우는 이유는 모든 상황이 반드시 개수를 따질 수 있는 수학적 확률의 상황은 아니기 때문이다.

(개수를 따질 수 없는 상황에서) 확률의 덧셈과 뺄셈을 통해서 $P(A\cup B)$를 구할 수 있다는 사실을 받아들였다면 그만이다.

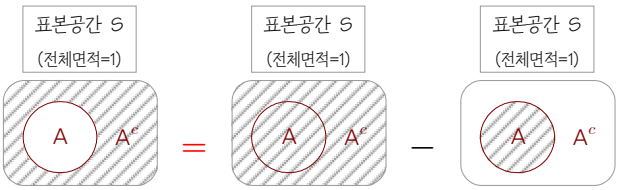
<이해를 위한 예제 33번>과 <이해를 위한 예제 34번>을 통해서 느껴보자.

2. 여사건의 아이디어

- 덧셈정리에서 다루기는 하지만 여사건의 아이디어는 항상 생각해야 하는 근본적인 사고방식이다.
  이것은 <촌철살인 확률과 통계 1>에서도 아주 많이 강조한 바 있다.

1) 여사건의 확률

$$P(A^c) = P(S) - P(A) = 1 - P(A)$$



- 비율의 면적화 위에 있는 벤다이어그램처럼 표현한 도표는 <확률을 면적>으로 표현한 것이라고 생각한다.
  - $P(A^c)$에 해당하는 면적을 구하기 위해 $P(S)(=1)$에서 $P(A)$에 해당하는 면적을 빼는 것을 자연스럽게 받아들인다.

티칭 예를 들어 문제에서 $P(A^c) = \dfrac{2}{3}$가 주어지면 반사적으로 $P(A) = \dfrac{1}{3}$을 쓰고 시작해야 한다.

2) 여사건의 아이디어

- 경우의 수와 마찬가지로 $P(A)$를 직접 구하는 것이 효율적인지 $P(A^c)$을 구하여 $P(S)(=1)$에서 빼는 것이 효율적인지는 항상 생각해봐야 하는 <근본적인 아이디어>이다. <적어도>라는 말이 나오든 나오지 않든 전체상황을 상상하고 여사건의 아이디어로 간단하게 풀 수 있는지는 매 번 고려해봐야 한다.

031 이해를 위한 예제

세 개의 주사위를 동시에 던져서 나타나는 눈을 a,b,c라 할 때, $(a-b)(b-c)=0$일 확률을 구하여라.

시행 세 개의 주사위를 동시에 던져서 나타나는 눈 - 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다.

⇨ $n(S) = 6\times6\times6$

사건 나타나는 눈을 a,b,c라 할 때, $(a-b)(b-c)=0$일 확률

사건의 분석 $n((a-b)(b-c)=0)$인 경우는 다음과 같이 세 가지로 분할된다.

전체상황

상황 1	$a=b$ and $b\neq c$
상황 2	$a\neq b$ and $b=c$
상황 3	$a=b$ and $b=c$
상황 4	$a\neq b$ and $b\neq c$

: $n((a-b)(b-c)=0) = n(\text{상황 1}) + n(\text{상황 2}) + n(\text{상황 3})$

$= n(\text{전체}) - n(\text{상황 4}) = 6^3 - 6\times5\times5 = 66$

$P(\text{문제의 사건}) = \dfrac{66}{6\times6\times6} = \dfrac{11}{36}$

티칭 위와 같이 접근하는 것은 경우의 수적인 사고방식이다. 물론 집합적인 사고방식을 이용해서 셀 수도 있다.

$n((a-b)(b-c)=0) = n(a=b) + n(b=c) - n(a=b=c) = 36 + 36 - 6 = 66$이다.

티칭 이 문제를 확률의 덧셈정리를 이용하여 푼다면

$P((a-b)(b-c)=0) = P(\text{상황 1}) + P(\text{상황 2}) + P(\text{상황 3})$와 같이 구하거나 $= 1 - P(\text{상황 4})$와 같이 구하거나

$= P(a=b) + P(b=c) - P(a=b=c)$와 같이 구할 수 있다.

덧셈정리를 마치 공식처럼 생각하면 안 된다. <확률끼리 더하거나 뺄 수 있다.>를 받아들이는 것이 덧셈정리이다.

032 이해를 위한 예제 2005. 9. 나형(80%). 13번. 3점

2개의 당첨제비가 포함되어 있는 10개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 동시에 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨제비일 확률은?

① $\dfrac{2}{15}$ ② $\dfrac{4}{15}$ ③ $\dfrac{2}{5}$ ④ $\dfrac{8}{15}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

시행 2개의 당첨제비가 포함되어 있는 10개의 제비 중에서 임의로 3개의 제비를 동시에 뽑을 때

- 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다. ⇨ ${}_{10}C_3$

사건 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률

사건의 분석 적어도 한 개가 당첨 제비인 경우는 다음과 같이 두 가지로 분할된다. (이번엔 덧셈정리를 이용하여 계산해 본다.)

전체상황

상황 1	당첨제비 0개
상황 2	당첨제비 1개
상황 3	당첨제비 2개

: $P(\text{적어도 한개의 당첨제비}) = P(\text{당첨제비 1개}) + P(\text{당첨제비 2개})$

$= 1 - P(\text{당첨제비 0개})$

$P(\text{적어도 한개의 당첨제비}) = 1 - P(\text{당첨제비 0개}) = 1 - \dfrac{{}_2C_0\times{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = 1 - \dfrac{7}{15} = \dfrac{8}{15}$이므로 정답은 ④

033 이해를 위한 예제

어떤 문제를 A가 풀 확률은 $\frac{7}{10}$, B가 풀 확률은 $\frac{3}{5}$이고 A와 B가 모두 풀 확률은 $\frac{2}{5}$일 때, A, B중 적어도 한 사람이 풀 확률을 구하여라.

어떤 문제를 A가 풀 확률은 $\frac{7}{10}$ ⇨ $P(A) = \frac{7}{10}$

B가 풀 확률은 $\frac{3}{5}$이고 ⇨ $P(B) = \frac{3}{5}$

A와 B가 모두 풀 확률은 $\frac{2}{5}$일 때, ⇨ $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

A, B중 적어도 한 사람이 풀 확률 ⇨ $P(A \cup B) = ?$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$을 통해서 $P(A \cup B)$를 구하면 그만이다.

즉, $\frac{7}{10} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$

티칭 상황조건과 확률조건

- <상황조건>이란 우리가 개수를 셀 수 있는 상황이 주어진 상태에서 확률을 물어보는 문제를 말한다.
- <확률조건>이란 (개수를 셀 수 있는) 상황은 생략되고 어떤 사건이 일어날 확률 그 자체를 조건으로 주는 문제를 말한다.

이 두 조건은 각각 물어보고자 하는 바가 다르다.

⇨ 예를 들어 <수열의 극한>에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n}$처럼 a_n의 식을 구체적으로 주는 경우는 구체적인 상황에서 수열의 극한의 계산을 이해하고 답을 낼 수 있냐고 물어보는 것이고 계산의 논리를 통해서 $\frac{1}{2}$이라는 답을 내면 그만이다.

반면에 $\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{2}$과 같이 ($a_n$의 식을 구체적으로 주지 않고) 결과만 알려주고, 결과를 토대로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{a_n+1}$과 같은 다른 극한의 극한값을 계산할 수 있는지를 물어보는 문제는 조금 더 본질적인 <극한의 성질>을 물어본 것이다.

(a_n이 어떤 식인지 궁금할 수도 있지만 문제를 풀기 위해 굳이 a_n을 알아야 할 필요는 없다.)

이와 같이 확률에서도 <상황조건>이 나오면 <수열의 극한에서 구체적인 식을 준 것과 같이> 구체적인 상황에서 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구하면 되는 것이고, <확률조건>이 나오면 <수열의 극한에서 결과만 준 것과 같이> 그 확률을 연산하는 이론적 토대를 통해서 다른 확률의 값을 구하면 되는 것이다.

034 이해를 위한 예제

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5가 각각 적힌 공 9개가 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 2개 또는 3개의 공을 임의로 뽑을 때 적힌 눈의 수의 합이 홀수일 확률을 구하시오.

시행 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5가 각각 적힌 공 9개가 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 2개 또는 3개의 공을 임의로 뽑을 때 ⇨ 이 문제의 핵심은 분모가 ${}_9C_2 + {}_9C_3$이 아니라는 것이다. 이것이 <경우의 수>는 될 수 있지만 수학적 확률의 분모가 될 수 없는 이유는 <근원사건이 일어날 가능성>이 다르기 때문이다. 이것은 아래 <비율의 면적화>를 통해 직관적으로 이해할 수 있다.

사건 적힌 눈의 수의 합이 홀수일 확률

사건의 분석 뽑는 공의 개수를 선택하는 <선 시행>에 의하여 <후 시행>자체가 영향을 받으므로 종속적 선후시행 이라고 볼 수 있다. <임의로>라는 말은 <2개>를 뽑을 확률과 <3개>를 뽑을 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이라는 뜻이다.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

2개	3개

<선 시행>에 의하여 표본공간을 2개의 영역으로 분할한다.
표본공간의 면적이 1이므로 각 영역의 면적은 $\frac{1}{2}$이다.

⇨

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
: 표본공간 S (전체면적=1)

${}_9C_2(36)$개의 영역으로 동일하게 분할	${}_9C_3(84)$개의 영역으로 동일하게 분할

면적이 $\frac{1}{2}$인 각 영역을 36개와 84개로 나누는 것은 너무 많아 지면상 생략했다.

- 2개를 뽑는 상황에서 <두 수의 합이 홀수>인 경우는 <짝 1개, 홀 1개>가 뽑히는 상황이므로

⇨ $P(2\text{개} \rightarrow \text{합이 홀수}) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_9C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_9C_2} = \frac{5}{18}$

- 3개를 뽑는 상황에서 <세 수의 합이 홀수>인 경우는 <짝 2개, 홀 1개> 또는 <홀 3개>가 뽑히는 상황이므로

⇨ $P(3\text{개} \rightarrow \text{합이 홀수}) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_1}{{}_9C_3} + \frac{{}_5C_3}{{}_9C_3} \right) = \frac{5}{21}$

- 이 두 사건은 동시에 발생할 수 없으므로 서로 배반이다.

$P(\text{합이 홀수}) = P(2\text{개} \rightarrow \text{합이 홀수}) + P(3\text{개} \rightarrow \text{합이 홀수}) = \frac{5}{18} + \frac{5}{21} = \frac{75}{126}$

정답은 $\frac{75}{126}$

티칭 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5가 각각 적힌 공 9개가 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 2개 또는 3개의 공을 임의로 뽑을 때 ⇨ 느낌으로는 시간의 순서를 구분할 필요가 없는 복합시행의 상황이지만 표본공간은 종속적 선후시행과 비슷하게 2번에 걸쳐 분할되어야 한다.

이처럼 모든 상황을 $\frac{n(A \cup B)}{n(S)}$와 같이 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 풀 수 없다. 그래서 확률끼리 더하고 빼는 <확률의 덧셈정리>의 이론을 공부한 것이다.

티칭 <임의로> 라는 말 ⇨ 이 말은 <같은 비율로>라는 말을 함축하고 있는 말이다.

<임의로>라는 말이 없어도 어색하지 않은 상황을 살펴보자.

⇨ 1, 2, 3, 4, 5가 각각 적힌 5개의 공 중 임의로 1개의 공을 꺼낸다.

- 이것은 많이 나오는 상황이므로 <임의로>라는 말을 빼도 크게 이상함을 느끼지 못한다.
  <1, 2, 3, 4, 5 가 각각 적힌 5개의 공 중 1개의 공을 꺼낸다.>라고 해도 이상하진 않다. (이것은 관용이다.)

<임의로>라는 말이 없으면 어색한 상황을 살펴보자.

⇨ 1, 2, 3, 4, 5가 각각 적힌 5개의 공 중 2개의 공을 꺼내거나 3개의 공을 꺼낸다.

- 이것은 자주 등장하는 상황이 아니기 때문에 이상한 느낌을 가질 수 있다.
  <1, 2, 3, 4, 5 가 각각 적힌 5개의 공 중 임의로 2개의 공을 꺼내거나 3개의 공을 꺼낸다.>라고 표현하면 훨씬 더 매끄러운 느낌을 갖게 되는데 이것은 <임의로>라는 말이 2개의 공을 꺼낸 상황이나 3개의 공을 꺼낸 상황이 <비율적으로 1:1로 같다>는 말을 함축하고 있기 때문이다

그렇다면 어떤 시행에 대해 시행의 횟수 자체가 비율적으로 다르다는 말은 어떻게 표현할까?
이것은 통계적 확률의 표현을 통해 해결할 수 있다.

⇨ 1, 2, 3이 각각 적힌 3개의 공 중 1개의 공을 꺼내거나 2개의 공을 꺼낸다. 세 번 중 두 번의 꼴로는 1개의 공을 꺼내고, 세 번 중 한 번의 꼴로는 2개의 공을 꺼낸다.

- 이 상황에서는 1개를 꺼낼 확률이 $\frac{2}{3}$, 2개를 꺼낼 확률이 $\frac{1}{3}$임을 알려주고 있다. 이 시행에 따라 공을 꺼냈을 때, 꺼낸 공에 적힌 숫자의 합이 홀수일 확률을 구하라고 한다면 이 상황은 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 풀기 어려운 상황이 된다.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1개의 공을 꺼내는 시행	2개의 공을 꺼내는 시행

⇨

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1	1, 2
2	2, 3
3	1, 3

- 이처럼 사건의 비율을 고려하여 영역을 분할하면 확률의 계산이론을 사용하지 않아도 충분히 직관적으로 이해하며 문제를 풀 수 있다.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

#3 조건부 확률

- 수학적 확률이든 조건부 확률이든 전체에서 부분이 차지하는 비율을 구하는 것이므로 내용적 본질은 같다.
  단지, 전체의 개념이 <시행에서 나오는 가능한 모든 결과>에서 <문제에서 주어진 특정 결과(사건)>로 바뀔 뿐이다.

- 조건부 확률의 본질은 분모로 계산되는 <전체의 개념>이 문제의 조건에 따라 바뀔 수 있음을 이해하는 것이다.

- 조건부 확률의 식은 공식이 아닌 <의미>이다. 공식이라는 것은 중간의 계산과정을 생략하여 결론으로 도달하는 시간을 단축해 주는 것인 반면에 조건부 확률은 그 식을 유도하는 과정이 없다. 조건부 확률은 그 자체로 <수학적 확률>과는 조금 다른 느낌으로 구해지는 확률을 기호로 만들어 표시한 것뿐이다. (느낌이 다를 뿐, 위에 언급한 것처럼 내용적 본질은 같다.)

1. 조건부 확률의 뜻과 기호 : 바뀐 표본공간의 이해

1) 조건부 확률의 뜻

- 간단한 상황을 통해서 이해할 수 있다.

⇨ (상황 1) 1부터 6까지의 숫자가 각 면에 적힌 정육면체 주사위를 던졌을 때 소수의 눈이 나올 확률은? ⇨ $\frac{1}{2}$

⇨ (상황 2) 같은 주사위를 던졌는데 홀수의 눈이 나온 상황에서 나온 그 숫자가 소수일 확률은? ⇨ $\frac{2}{3}$

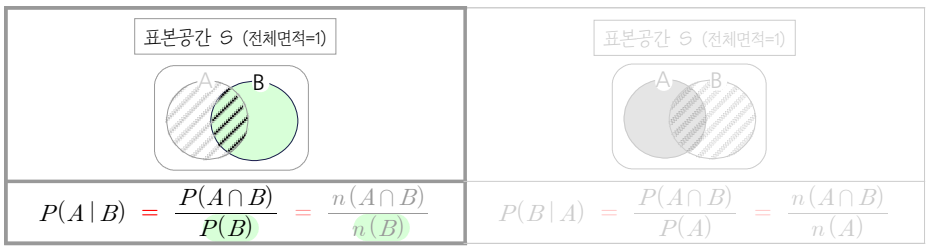
<상황 2>에서 주사위를 던졌는데 홀수의 눈이 나온 상황이라는 것은 주사위를 던져서 나올 가능성이 있는 숫자가 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이 아니라 $\{1,\ 3,\ 5\}$라는 것을 제시한 것이다.
<상황 1>과 똑같이 소수가 나올 확률을 구하는 것이지만 <상황 2>에서 우리가 고려해야 하는 전체는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이 아니라 $\{1,\ 3,\ 5\}$가 되므로 결국 <상황 2>에서의 소수가 나올 <수학적 확률>을 구하면 $\frac{2}{3}$가 된다.

이와 같이 <조건부 확률>은 매우 직관적인 개념이다.

2) 조건부 확률의 기호와 계산

- 어떤 시행에서 B 라는 사건의 발생을 전제로 A가 발생할 확률을 기호로 $P(A\,|\,B)$라고 하고,
  A 라는 사건의 발생을 전제로 B가 발생할 확률을 기호로 $P(B\,|\,A)$라고 한다.

⇨ $P(A\,|\,B)$의 경우 <결과로 주어진 사건 B>에서 <사건 A>가 차지하는 비율을 찾는 것으로 다음의 도표와 식은 이것의 의미를 표현하고 있을 뿐이다. (사실 지금까지 공부한 $P(A)$도 사실은 $P(A\,|\,S)$라고 생각할 수 있다.)



- 위의 오른쪽 상황은 사실 위의 왼쪽과 같은 의미이므로 따로 기억할 필요는 없다.
- $P(A\,|\,B)$는 <B를 전체>로 봤을 때 그 안에서 <A라는 부분>이 차지하는 비율을 뜻한다.
  ⇨ <비율의 면적화>로 설명하면 <조건부 B>의 면적을 1로 봤을 때, <B 안에서 A가 차지하는 면적>을 뜻한다.
- $P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{n(A\cap B)}{n(B)}$에서 흐린 부분의 이유는 다음 페이지에서 설명이 나온다.

- 앞의 상황을 다시 한 번 살펴보자. 1부터 6까지 숫자가 적힌 주사위를 던진 시행에 따른 표본공간을 S, 홀수의 눈이 나오는 사건을 B, 소수의 눈이 나오는 사건 A라고 하면

⇨ 홀수의 눈이 나오는 사건 안에서 소수의 눈이 나오는 사건은 $A \cap B$라고 생각할 수 있다.

여기에서 $P(A|B)$의 의미를 생각해 볼 때 $P(A|B)$는 직관적으로 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$와 같이 계산됨을 알 수 있다.

그럼에도 불구하고 조건부 확률을 정의 할 때 <개수>로 정의하지 않고 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$와 같이 정의하는 이유는 모든 상황에서 확률을 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$과 같이 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 계산할 수는 없기 때문이다.

확률을 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구하기 위해서는 표본공간의 각 원소가 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되어야 한다는 전제가 있어야하기 때문에 쓰기 위한 상황적 제약이 많다. 그럼에도 불구하고 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$으로 계산하는 것이 효율적인 경우가 많기 때문에 <각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되는 상황>이라면 $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$을 이용해 조건부 확률을 구하는 것도 적절하게 활용해야 한다. - 반드시 $P(B)$와 $P(A \cap B)$를 구해서 대입하려고 할 필요는 없다.

그래서 모든 책에는 조건부 확률이 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$와 같이 나오지만

이 책에서는 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$와 같이 표현하였다.

코칭 확률을 구하기 위한 조건으로 <개수를 구할 수 있는 상황>을 주는 경우와 <비율>을 주는 경우와 <확률>을 주는 경우가 있는데 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 구하든 $\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$로 구하든 $\frac{\text{확률}}{\text{확률}}$로 구하든 $\frac{\text{부분}}{\text{전체}}$으로 구해진 값은 모두 명확한 확률 값이다.

그런데 학습자들은 $\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$이나 $\frac{\text{확률}}{\text{확률}}$을 통해서 우리가 구하고자 하는 확률을 구하는 경우는 생각보다 못 받아들이는 경우가 종종 있다. 이유는 지금까지는 계속 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구해왔고 이것에 비해 $\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$이나 $\frac{\text{확률}}{\text{확률}}$은 추상적이기 때문이다. 그렇다고 비율이나 확률 값을 비례상수를 이용하여 개수로 환산해서 푸는 것은 (가능은 하겠으나) 이 확률과 통계라는 과목에서는 절대 좋은 방법이 아니다.

$\frac{\text{비율}}{\text{비율}}$로 구하든 $\frac{\text{확률}}{\text{확률}}$로 구하든 $\frac{\text{부분}}{\text{전체}}$으로 구해진 값은

모두 명확한 확률 값이라는 사실을 다시 한 번 상기하자.

티칭 조건부 확률의 식은 증명되는 식이 아니다. 또한 정의되었다고 보기도 어려운데 왜냐하면 인간이 만들어낸 창조물이 아니기 때문이다. 그래서 조건부 확률 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$을 공리라 한다. 공리는 증명을 필요로 하지 않거나 증명할 수 없지만 직관적으로 자명(自明)한 진리의 명제인 동시에 다른 명제들의 전제가 되는 명제이다.

- 과학에도 이러 비슷한 공식들이 정말 많은데 과학에서는 모델링 공식이라는 말을 사용한다. 예를 들면 F=ma 같은 공식이 모델링 공식이다. 뉴턴이 발견했을 뿐 원래부터 자연에서 존재하는 원리이다.

- 위의 식이 공리인지 공준인지 성질인지 공식인지 이런 논의는 중요하지 않으므로 넘어가도록 하자. <위의 식을 증명하지 않고 직관적으로 받아들인다.>라는 사실 외에는 중요하지 않다.

035 이해를 위한 예제 2008. 9. 가형(92%), 나형(85%). 5번. 3점

다음은 어느 고등학교 학생 1000명을 대상으로 혈액형을 조사한 표이다.

남학생 (단위: 명)

	A형	B형	AB형	O형
Rh^+형	203	150	71	159
Rh^-형	7	6	1	3

여학생 (단위: 명)

	A형	B형	AB형	O형
Rh^+형	150	80	40	115
Rh^-형	6	4	0	5

이 1000명의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생의 혈액형이 B형일 때, 이 학생이 Rh^+형의 남학생일 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

비율이 곧 확률이다, 표가 나온 경우는 쉽다.

남학생 (단위: 명)

	A형	B형	AB형	O형
Rh^+형	203	150	71	159
Rh^-형	7	6	1	3

여학생 (단위: 명)

	A형	B형	AB형	O형
Rh^+형	150	80	40	115
Rh^-형	6	4	0	5

시행 이 1000명의 학생 중에서 임의로 선택 - 단순시행이다.

조건부 사건 Y 선택한 학생의 혈액형이 B형일 때, ⇨ 시행에 따른 특정 결과를 준 것으로 새로운 표본공간이 된다.

구하는 사건 X 이 학생이 Rh^+형의 남학생일 확률 ⇨ Y라는 새로운 표본공간 안에서 X를 찾는다.

즉, $P(X|Y) = \frac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \frac{150}{150+6+80+4} = \frac{150}{240} = \frac{5}{8}$ 정답은 ④

036 이해를 위한 예제 2005. 4. 가형(81%). 4번. 3점

3학년 전체 학생에 대한 남학생의 비율이 48%인 어느 고등학교에서 이들 학생을 대상으로 수시모집 응시 여부를 조사하였다. 그 결과 응시를 희망한 남학생은 3학년 전체 학생의 30%가 되었다. 이때, 이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 한 학생을 뽑았더니 남학생이었다. 이 학생이 수시모집 응시에 희망했을 확률은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

비율이 곧 확률이다,

시행 3학년 전체 학생 중에서 임의로 한 학생을 뽑아서 수시모집 응시 여부를 조사하였다. - 단순시행이다.

조건부 사건 Y 이 학교 3학년 전체 학생 중에서 임의로 한 학생을 뽑았더니 남학생이었다.

⇨ 시행에 따른 특정 결과를 준 것으로 새로운 표본공간이 된다. 문제의 조건에서 <3학년 전체 학생에 대한 남학생의 비율이 48%>라고 나왔으므로 $P(Y) = 0.48$이다. (비율이 곧 확률이다.)

구하는 사건 X 이 학생이 수시모집 응시에 희망했을 확률

⇨ Y라는 새로운 표본공간 안에서 X를 찾는다. 문제의 조건에서 <응시를 희망한 남학생은 3학년 전체 학생의 30%>라고 나왔으므로 $P(X\cap Y) = 0.3$이다.

즉, $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.3}{0.48} = \frac{5}{8}$ 정답은 ③

코칭 수식적으로 구할 필요 없이 조건을 통해서 $P(Y) = 0.48$와 $P(X\cap Y) = 0.3$을 모두 준 문제이다.
공식으로서의 조건부 확률이 아닌 조건부 확률의 기본적이고 본질적인 의미를 아는지 물어본 문제이다.

037 이해를 위한 예제

어느 학생이 1차 시험에 합격할 확률은 $\frac{5}{100}$이고, 1차와 2차 시험에 모두 합격할 확률은 $\frac{2}{100}$이다. 이 학생이 1차 시험에 합격했을 때, 2차 시험에 합격할 확률을 구하여라.

시행 시행이 생략되어 있지만 어느 학생이 시험에 응시하는 것이 시행이다.

- 굳이 따지자면 (합, 불) (합, 합) (불, X) 으로 결과를 나눌 수 있고, 시간의 순서가 있는 시행이며 앞의 시행의 결과에 따라 뒤의 시행이 영향을 받는다고 생각할 수 있으므로 종속적 선후시행이라고 볼 수 있다.

조건부 사건 Y 이 학생이 1차 시험에 합격했을 때,

⇨ 시행에 따른 특정 결과를 준 것으로 새로운 표본공간이 된다. 문제의 조건에서 <1차 시험에 합격할 확률은 $\frac{5}{100}$>라고 나왔으므로 $P(Y) = 0.05$이다.

구하는 사건 X 2차 시험에 합격할 확률

⇨ Y라는 새로운 표본공간 안에서 X를 찾는다. 문제의 조건에서 <1차와 2차 시험에 모두 합격할 확률은 $\frac{2}{100}$>라고 나왔으므로 $P(X \cap Y) = 0.02$이다.

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{0.02}{0.05} = \frac{2}{5}$$

코칭 관용적으로 생각하면 <1차 시험>에 합격해야 <2차 시험>을 볼 수 있다고 생각할 수 있겠으나 <1차 시험>의 합격여부에 상관없이 <2차 시험>을 볼 수 있다고 하더라도 문제의 정답을 구하는 데에는 무리가 없다.

티칭 상황조건과 확률조건 (복습)

- <상황조건>이란 우리가 개수를 셀 수 있는 상황이 주어진 상태에서 확률을 물어보는 문제를 말한다.
- <확률조건>이란 (개수를 셀 수 있는) 상황은 생략되고 어떤 사건이 일어날 확률 그 자체를 조건으로 주는 문제를 말한다.

이 두 조건은 각각 물어보고자 하는 바가 다르다.

⇨ 예를 들어 <수열의 극한>에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n}$처럼 a_n의 식을 구체적으로 주는 경우는 구체적인 상황에서 수열의 극한의 계산을 이해하고 답을 낼 수 있냐고 물어보는 것이고 계산의 논리를 통해서 $\frac{1}{2}$이라는 답을 내면 그만이다.

반면에 $\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{2}$과 같이 ($a_n$의 식을 구체적으로 주지 않고) 결과만 알려주고, 결과를 토대로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{a_n+1}$과 같은 다른 극한의 극한값을 계산할 수 있는지를 물어보는 문제는 조금 더 본질적인 <극한의 성질>을 물어본 것이다.

(a_n이 어떤 식인지 궁금할 수도 있지만 문제를 풀기 위해 굳이 a_n을 알아야 할 필요는 없다.)

이와 같이 확률에서도 <상황조건>이 나오면 <수열의 극한에서 구체적인 식을 준 것과 같이> 구체적인 상황에서 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구하면 되는 것이고, <확률조건>이 나오면 <수열의 극한에서 결과만 준 것과 같이> 그 확률을 연산하는 이론적 토대를 통해서 다른 확률의 값을 구하면 되는 것이다.

038 이해를 위한 예제 2007. 11. 가형(91%), 나형(79%). 12번. 3점

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 6, 7, 8, 9, 10의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼냈다. 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수일 때, 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은?

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{2}{13}$ ⑤ $\frac{1}{13}$

시행 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼냈다.

- 동시에 한 장을 꺼낸 복합시행이라고 봐도 되고, A에서 뽑은 후 B에서 뽑는 독립적 선후시행이라고 봐도 무방하다. (표본공간은 같은 비율로 분할되기 때문이다.)

조건부 사건 Y 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 홀수일 때,

⇨ 결과로 준 사건이 <새로운 표본공간>이 된다.

구하는 사건 X 주머니 A에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 짝수일 확률

⇨ Y라는 새로운 표본공간 안에서 X를 찾는다.

- 아래 시행에 따른 전체 상황은 (A에서 꺼낸 공, B에서 꺼낸 공)으로 상황을 표현하고 분할한 것이다.

전체상황

	$(A,\ B)$
상황 1	(홀, 홀)
상황 2	(홀, 짝)
상황 3	(짝, 짝)
상황 4	(짝, 홀)

- 결국 $n(Y) = n(\text{상황 } 2) + n(\text{상황 } 4) = {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1$이고,

$n(X \cap Y) = n(\text{상황 } 4) = {}_2C_1 \times {}_2C_1$이므로

$$P(X|Y) = \frac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1} = \frac{4}{9+4} = \frac{4}{13}$$ 이므로 정답은 ②

2. <계산적 조건부>와 <의미상 조건부>

1) 계산적 조건부

- 앞에서 기본예제로 다룬 모든 상황이 <계산적 조건부>의 상황이었다.
- <계산적 조건부>란 <시행>에서 <결과로 주어진 사건>안에서 또 다른 사건이 차지하는 비율을 찾는 <조건부 확률>을 일컫는 말이다.

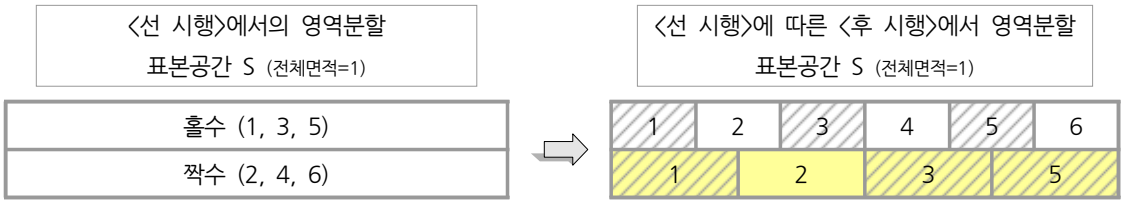
2) 의미상 조건부

- 선후시행은 느낌상 (S_1)과 (S_2) 두 번의 시행이 있는 것처럼 느껴지지만 사실 문제 전체로 봤을 때는 표본공간의 원소가 $(S_1,\ S_2)$로 표현되는 하나의 시행 S가 있을 뿐이다.
- <의미상 조건부>란 보통은 선후시행의 상황에서 <선 시행의 결과인 선행사건 A>가 발생했음을 전제로 <후 시행에서 결과인 후행사건 B>가 발생할 확률을 물어보는 상황이다.
  <의미상 조건부>는 <계산적 조건부>처럼 <사건>안에서 또 다른 사건이 차지하는 비율을 찾는 느낌이 아닌 <시행 S_2에서 사건 B가 발생할 수학적 확률>을 구하는 것과 비슷한 느낌으로 구해진다. 그래서 조건부 확률을 계산하는 느낌이 없지만 실제로 구한 결과가 조건부 확률인 경우 <의미상 조건부>라고 한다.

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 써져있는 정육면체 주사위를 던져
홀수의 눈이 나오면 ⇨ 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 써져있는 같은 정육면체 주사위를 던지고,
짝수의 눈이 나오면 ⇨ 1, 2, 3, 5가 각 면에 써져있는 정사면체 주사위를 던지는 시행을 한다고 하자.
먼저 던진 주사위가 짝수가 나왔을 때(선행사건), 나중에 던진 주사위가 홀수가 나올 확률(후행사건)을 생각해보자.

설명 1) 조건부 확률을 공식처럼 생각해서 풀어보자. - 계산적 조건부처럼 푸는 법

(현재는 확률의 곱셈정리를 배우지 않은 상태이므로 <비율의 면적화 개념>을 이용해서 구해보자.)



$$P(\text{나중에 던진 주사위 홀수}\,|\,\text{먼저 던진 주사위 짝수}) = \frac{P(\text{먼저 짝수} \cap \text{나중에 홀수})}{P(\text{먼저 짝수})} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$

설명 2) 조건부 확률의 이론을 생각하지 않고 풀어보자. - 직관적으로 푸는 법

먼저 던진 주사위는 이미 짝수가 나왔으므로 우리는 1, 2, 3, 5가 각 면에 써져있는 정사면체 주사위를 던지게 된다.
이때 우리가 구하고자 하는 확률은 곧 정사면체 주사위에서 홀수가 나올 확률이 되므로 $\frac{3}{4}$이라고 <수학적 확률>을 계산하듯이 가볍게 계산할 수 있다.

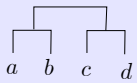
(참고 - 비율의 면적화 개념으로 생각해보면 표본공간 부분의 면적을 1로 봤을 때 의 면적을 구하는 것이므로 $\frac{3}{4}$이다.)

우리가 구한 확률을 의미상으로만 본다면 <시행에 따른 특정 결과를 조건으로 다른 사건이 일어날 확률>을 구한 것이므로 $P(\text{나중에 던진 주사위 홀수}\,|\,\text{먼저 던진 주사위 짝수})$라는 조건부 확률을 구한 것과 같다.

$P(\text{후행사건}\,|\,\text{선행사건}) = P(\text{정해진 후시행에서의 확률}) = \frac{n(B)}{n(S_2)}$ - 이것이 <의미상 조건부>의 느낌이다.

039 이해를 위한 예제

a, b, c, d가 다음 토너먼트 대진표와 같이 대진되어 경기를 한다. a가 b를 이겼고, c가 d를 이겼을 때 a가 우승할 확률은 얼마일까? (단, 모든 팀의 승률은 같다.)



<의미상 조건부>

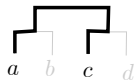
시행 a, b, c, d가 다음 토너먼트 대진표와 같이 대진되어 경기를 한다.

조건부 사건 Y a가 b를 이겼고, c가 d를 이겼을 때

구하는 사건 X a가 우승할 확률

⇨ 이 문제에서 물어보는 상황이 $P(a\text{가 우승})$이 아니고 $P(a\text{가 우승} \mid a\text{가 } b\text{이김}, c\text{가 } d\text{이김})$이기 때문에 역시 의미상으로는 <조건부 확률>이라고 생각할 수 있다.

단지 직관적으로 생각해보면 이미 a가 b를 이겼고, c가 d를 이긴 것이 결과로 주어졌기 때문에 현재 우리에게 주어진 상황은 오른쪽 표와 같다.



즉, 이 상황은 결국 a와 c가 맞붙는 상황이고 a가 이기면 우승이므로 $P(a\text{가 우승}) = \frac{1}{2}$이다.

$$P(a\text{가 우승}) = \frac{1}{2}$$

티칭 <의미상 조건부>를 왜 배울까?

확률을 단순히 <공식>으로만 받아들이지 않기 위해서이다. <촌철살인 확률과 통계>에서는 <경우의 수나 확률>을 공식에 연연하지 않고, 의미 그대로 이해해서 푸는 것을 추구한다. 그리고 그런 이해와 느낌을 추구하다보면 <교과서의 식>들이 무작정 외워야 하는 <공식>이 아닌 <사고방식>임을 깨닫게 된다.

조건부 확률은 <확률의 곱셈정리>와 함께 사용되어야 진정한 의미를 알았다고 할 수 있고.

현재는 <확률의 곱셈정리>를 배우지 않았으므로 <조건부 확률의 표면적 의미>만 공부하는 것이나 다름이 없다.

하지만 뒤에서 <확률의 곱셈정리>를 공부하게 될 때, <확률의 곱셈정리>가 <공식>이 아닌 <사고방식>임을 이해하기 위해서 <의미상 조건부>의 느낌이 필요하게 되므로 잘 익혀두어야 한다.

040 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 한 번 던지는 시행에서 짝수의 눈이 나왔을 때, 그 눈이 소수일 확률을 구하시오.

<단순시행>은 쉽다.

시행 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 한 번 던지는 시행 . - 단순시행이다.

조건부 사건 Y 짝수의 눈이 나왔을 때 ⇨ 구하는 사건 X 그 눈이 소수

표본공간 S

1	3	5
2	4	6

- $P(X|Y)$는 새로운 표본공간 Y에서 <사건 X>가 차지하는 비율을 구하는 것이다.

즉, $P(X|Y) = \dfrac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \dfrac{1}{3}$

041 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 적힌 같은 크기와 모양이 같은 6개의 공이 있다. 강인이가 이 공 중 2개를 뽑아서 확인해 보니 짝수가 적어도 하나 포함되어 있었다고 한다. 이 2개에 공에 적힌 숫자의 합이 짝수일 확률은 구하시오.

<복합시행>에서 <계산적 조건부> 확률의 느낌

시행 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 공 6개 중 2개를 뽑아 확인

조건부 사건 Y 짝수가 적어도 하나 포함 ⇨ 구하는 사건 X 2개에 공에 적힌 숫자의 합이 짝수

표본공간 S

<상황 1> 홀 2개	(1, 3)	(1, 5)	(3, 5)	⇨ ${}_3C_2$
<상황 2> 짝 2개	(2, 4)	(2, 6)	(4, 6)	⇨ ${}_3C_2$
<상황 3> 홀 1개, 짝 1개	(1, 2)	(1, 4)	(1, 6)	⇨ ${}_3C_1\times{}_3C_1$
	(3, 2)	(3, 4)	(3, 6)	
	(5, 2)	(5, 4)	(5, 6)	

- $P(X|Y)$는 새로운 표본공간 Y에서 <사건 X>가 차지하는 비율을 구하는 것이다. 위와 같이 표본공간을 표현하면 $\frac{1}{4}$인 것이 그냥 보이지만 굳이 식으로 계산하면 $n(Y) = n(\text{상황 } 2) + n(\text{상황 } 3)$이고, $n(X\cap Y) = n(\text{상황 } 2)$이므로

$$P(X|Y) = \frac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \frac{{}_3C_2}{{}_3C_1\cdot{}_3C_1 + {}_3C_2} = \frac{1}{4}$$

즉, 정답은 $\frac{1}{4}$

042 이해를 위한 예제 2005. 9. 가형(64%), 나형(45%). 23번. 4점

네 학생 A, B, C, D가 각각 자신의 수학 교과서를 한 권씩 꺼내어 4권을 섞어 놓고, 한 권씩 임의로 선택하기로 하였다. D가 먼저 A의 교과서를 선택하였을 때, 나머지 세 학생이 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

<복합시행>에서 <계산적 조건부> 확률의 느낌

시행 한 권씩 꺼내어 4권을 섞어 놓고, 한 권씩 임의로 선택하기로 하였다. - 복합시행이다.

조건부 사건 Y D가 먼저 A의 교과서를 선택하였을 때,

구하는 사건 X 나머지 세 학생이 아무도 자신의 교과서를 선택하지 못할 확률

선 시행의 결과에 따른 조건부 Y : $3!$

A	B	C	D
b	c	d	a
b	d	c	a
c	b	d	a
c	d	b	a
d	b	c	a
d	c	b	a

- 즉, $P(X|Y)$에서 $P(Y)$와 $P(X\cap Y)$를 각각 구해서 조건부 확률의 식에 대입할 필요는 없다.
- $n(Y) = 3!$이고, $n(X\cap Y) = 3$이므로 $P(X|Y) = \frac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$이다.

$$10(p+q) = 10(2+1) = 30$$

코칭 D가 먼저 A의 교과서를 선택하였을 때,

- <먼저>라는 말 때문에 <의미상 조건부>라고 생각이 될 수도 있다. 그리고 사실 그렇게 생각해도 상관없다.

- <의미상 조건부>와 <계산적 조건부>는 서로 대립적인 개념이 아니다. <의미상 조건부>는 <조건부 확률>을 무조건 공식으로 인지하여 문제를 무조건 $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$을 사용해서 해결하려는 학생들을 위해 이러한 행위를 경계하고자 하는 의미에서 만들어낸 용어이다.

- 앞에서 (2. <계산적 조건부>와 <의미상 조건부>) <직관적으로 조건부 확률>을 구할 수 있는 <의미상 조건부>의 상황을 억지로 $P(X|Y) = \frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}$에 대입하여 풀어봄으로써 <직관적 계산>이 옳았음을 확인하였다.

- 이 문제를 <의미상 조건부>로 본다는 것은 시행을 <선 시행 : D가 먼저 뽑고>과 <후 시행 : 나머지가 뽑음> 두 개의 시행으로 본다는 뜻인데, <기존의 시행>처럼 <선후시행>도 <표본공간>을 같은 비율로 나누기 때문에 그렇게 풀어도 상관없다.

- 이 문제는 <의미상 조건부>로 보든 <계산적 조건부>로 보든 계산이 같으므로 구분할 필요가 없다.

043 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 영희가 한 번 던지고 이어서 철수가 또 한 번 던지는 시행을 한다고 하자.
(1) 두 눈의 수의 합이 짝수라고 할 때, 홀수가 포함되어 있을 확률
(2) 영희가 던진 눈이 홀수 일 때, 철수가 던진 주사위가 짝수일 확률

<독립적 선후시행>에서 <계산적 조건부> 확률의 느낌

시행 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 영희가 한 번 던지고 이어서 철수가 또 한 번 던지는 시행

조건부 사건 Y 두 눈의 수의 합이 짝수 ⇨ 구하는 사건 X 홀수가 포함되어 있을 확률

- $P(X|Y)$는 <새로운 표본공간 Y>에서 <사건 X>가 차지하는 비율을 찾는 것이다.
- $n(Y) = n(\text{홀, 홀}) + n(\text{짝, 짝}) = 3\cdot3 + 3\cdot3 = 18$

  $n(X\cap Y) = n(\text{홀, 홀}) = 3\cdot3 = 9$ 이므로

$$P(X|Y) = \frac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

<독립적 선후시행>에서 <의미상 조건부> 확률의 느낌

시행 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 영희가 한 번 던지고 이어서 철수가 또 한 번 던지는 시행

조건부 사건 Y 영희가 던진 눈이 홀수 ⇨ 구하는 사건 X 철수가 던진 주사위가 짝수

영희는 이미 주사위를 던졌고 이것은 홀수가 나왔다. 그것을 전제로 철수가 주사위를 던지고 여기에서 짝수가 나올 확률은 그냥 생각해도 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 정답은 $\frac{1}{2}$

티칭 시간 순서상 먼저 일어난 사건의 확률까지 고려하여 <계산적 조건부>의 느낌으로 풀어보자.

아래와 같이 표본공간에서 조건부 확률을 구할 경우 $P(X|Y) = \frac{n(X\cap Y)}{n(Y)} = \frac{3\times3}{3\times6} = \frac{1}{2}$이다.

표본공간 S (전체면적=1)

1,1	2,1	3,1
1,2	2,2	3,2
1,3	2,3	3,3
1,4	2,4	3,4
1,5	2,5	3,5
1,6	2,6	3,6
4.1	5,1	6,1
4.2	5,2	6,2
4.3	5,3	6,3
4.4	5,4	6,4
4.5	5,5	6,5
4.6	5,6	6,6

하지만 선후시행의 상황에서 <선행사건>이 발생했음을 전제로 <후행사건>이 발생할 확률을 물어보는 상황은 꼭 조건부 확률의 식에 맞추어 대입할 필요가 없다.

044 이해를 위한 예제

1부터 6까지의 숫자가 적힌 정육면체 주사위를 한 번 던져서 홀수가 나오면 같은 주사위를 한 번 더 던지고 짝수가 나오면 1부터 4까지의 숫자가 적힌 정사면체 주사위를 한 번 던진다고 할 때

(1) 두 눈의 수의 합이 4 라고 할 때, 홀수가 포함되어 있을 확률

(2) 먼저 던진 눈이 짝수일 때 후에 던진 주사위가 2가 나올 확률

<종속적 선후시행>에서 <계산적 조건부>의 느낌

- 현재는 <확률의 곱셈정리>를 배우지 않았으므로 <비율의 면적화 개념>을 이용해서 구해보겠다.

표본공간 S (전체면적=1)

1,1	2,1	3,1
1,2	2,2	3,2
1,3		3,3
1,4	2,3	3,4
1,5	2,4	3,5
1,6		3,6
4,1	5,1	6,1
4,2	5,2	6,2
	5,3	
4,3	5,4	6,3
	5,5	
4,4	5,6	6,4

$\Rightarrow P(\text{홀수 포함} \mid \text{두 눈의 합이 } 4)$

$= \dfrac{P(\text{홀수 포함} \cap \text{두 눈의 합이 } 4)}{P(\text{두 눈의 합이 } 4)}$

$= \dfrac{2}{3.5} = \dfrac{4}{7}$ (나중에는 <곱셈정리와 조건부 확률의 식>을 이용하여 구한다.)

이 식을 계산하는 과정에서

<공식을 쓰지 않고 의미만 생각해서>

왼쪽 <면적화>된 표에서 전체에 해당하는 에서

이 차지하는 비율을 찾아보았다.

정답은 $\dfrac{4}{7}$

<종속적 선후시행>에서 <의미상 조건부>의 느낌

시행 1부터 6까지의 숫자가 적힌 정육면체 주사위를 한 번 던져서 홀수가 나오면 같은 주사위를 한 번 더 던지고 짝수가 나오면 1부터 4까지의 숫자가 적힌 정사면체 한 번 던지는 시행

조건부 사건 Y 먼저 던진 눈이 짝수 $\Rightarrow$ 구하는 사건 X 후에 던진 주사위가 2가 나올 확률

먼저 던진 주사위가 짝수가 나왔다. 그것을 전제로 후에 주사위를 던졌고 이때 던진 주사위는

<1부터 4까지의 숫자가 적힌 정사면체 주사위>이다. 당연히 여기에서 2가 나올 확률은 그냥 생각해도 $\dfrac{1}{4}$이다.

정답은 $\dfrac{1}{4}$

티칭 시간 상 먼저 일어나 사건의 확률까지 고려하여 <계산적 조건부>의 느낌으로 풀어보자.

표본공간 S (전체면적=1)

1,1	2,1	3,1
1,2	2,2	3,2
1,3		3,3
1,4	2,3	3,4
1,5	2,4	3,5
1,6		3,6
4,1	5,1	6,1
4,2	5,2	6,2
	5,3	
4,3	5,4	6,3
	5,5	
4,4	5,6	6,4

왼쪽과 같이 표본공간에서 조건부 확률을 구할 경우

$P(Y) = \dfrac{1}{2}$이고 $P(X \cap Y) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4}$이므로

$P(X \mid Y) = \dfrac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}$이다.

하지만 선후시행의 상황에서 <선행사건>이 발생했음을 전제로 <후행사건>이 발생할 확률을 물어보는 상황은 꼭 조건부 확률의 식에 맞추어 대입할 필요가 없다.

#4 독립과 종속

- 시행의 독립과 종속은 직관적이다. 사건의 독립과 종속은 비직관적이다.

- 비교적 많은 예제들을 통해 사건의 독립과 종속이 왜 비직관적인지를 경험할 것이다.

1. 시행의 독립과 종속 : 직관적

- 시행
  - 시간의 순서 無
    - 단순시행
    - 복합시행
  - 시간의 순서 有
    - 독립적 선후시행
    - 종속적 선후시행

- 시행은 항상 위와 같이 <단순시행> <복합시행> <독립적 선후시행> <종속적 선후시행>으로 나뉜다.
- 시행의 독립과 종속은 이미 <독립적 선후시행>과 <종속적 선후시행>이라는 말로 앞에서도 꾸준히 다뤄왔다.

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 **두 번** 던지는 시행을 하는 경우,
<선 시행>의 결과가 <후 시행>에 영향을 주지 않으므로 두 시행은 독립시행이라고 말할 수 있다.
참고) 앞에서도 여러 번 강조했듯이 이 문제에서 <표본공간>은 <선 시행> 또는 <후 시행> 둘 중 하나만을 고려하여 표현하면 안 되고, 두 시행을 모두 고려하여 <순서쌍>을 원소로 가지는 집합으로 표현해야 한다.

⇨ 예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 던져서
홀수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 같은 정육면체 주사위를 던지고
짝수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위를 던지는 시행을 하는 경우,
<선 시행>의 결과가 <후 시행>에 영향을 주므로 두 시행은 종속시행이라고 말할 수 있다.
참고) 이 문제 역시 <표본공간>은 두 시행을 모두 고려하여 <순서쌍>을 원소로 가지는 집합으로 표현해야 한다.
또한, 이 경우는 표본공간에서 각 <근원사건들이 일어날 가능성>이 같은 정도로 기대되지 않기 때문에 어떤 사건이 일어날 확률을 <수학적 확률>로 구하는 데에는 무리가 있다.

이처럼 <시행의 독립과 종속>은 주어진 상황을 이해하는 것 자체로 구분할 수 있는 매우 직관적인 상황이다.
시행의 독립과 종속은 따로 정의할 필요가 없는, 사건의 독립과 종속을 이해하기 위한 보조 도구이다.

2. 사건의 독립과 종속의 정의

1) 사건의 독립과 종속의 뜻과 수식적 정의

- 두 사건의 독립의 뜻

  독립이라는 말의 뜻은 두 사건이 서로 영향을 주지 않는다는 뜻이지만 **시행**과는 달리 **사건**에서는 **비직관적**이다.

  따라서 어떤 시행에서의 두 사건 A, B의 독립과 종속은 반드시 **<수식적으로 확인>**해야 한다.

- 독립과 종속의 수식적 정의

  두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A) = P(A|B) = P(A|B^c)$을 만족한다.

  이 식을 만족하면 독립, 만족하지 않으면 종속이라고 한다.

<B가 발생함을 전제로 A가 일어날 확률>과 <그냥 A가 일어날 확률>이 같다는 것은 A가 B에 영향을 받지 않음을 의미한다. 즉, 독립임을 의미한다.

$$P(A) = P(A|B) = P(A|B^c)$$

<B가 발생하지 않음을 전제로 A가 일어날 확률>과 <그냥 A가 일어날 확률>이 같다는 것은 A가 B에 영향을 받지 않음을 의미한다. 즉, 독립임을 의미한다.

2) 13개의 식

- 아래의 13개의 식 중에서 하나라도 만족하면 나머지는 모두 만족한다.

  ⇨ 예를 들어 $P(B^c|A) = P(B^c|A^c)$라는 식이 나오면 <A와 B는 독립>이라고 판단 할 수 있고, 나머지 12개의 식 또한 모두 만족한다.

3개의 식 : $P(A) = P(A\|B) = P(A\|B^c)$	3개의 식 : $P(A^c) = P(A^c\|B) = P(A^c\|B^c)$
3개의 식 : $P(B) = P(B\|A) = P(B\|A^c)$	3개의 식 : $P(B^c) = P(B^c\|A) = P(B^c\|A^c)$
13번째 식 : $P(A\cap B) = P(A)P(B)$	

- $P(A) = P(A|B) = P(A|B^c)$의 식은

  $P(A) = P(A|B)$ / $P(A) = P(A|B^c)$ / $P(A|B) = P(A|B^c)$의 3개의 식을 표현할 수 있다.

- 다음의 명제와 그 명제의 역이 <참>이 됨을 이해했다면

  일단은 <13개의 식>에서 설명하고자 하는 요점을 이해했다고 생각해도 좋다.

  ① A와 B가 독립이면 $P(B^c) = P(B^c|A)$

  ② $P(A) = P(A|B)$이면 $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

  ③ A와 B가 독립이면 A^c과 B도 독립이다.

  ④ A와 B가 종속이면 $P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$

  → 네 명제의 역도 모두 참이다.

티칭 의미상 직관적으로 받아들이는 것이 좋지만 수학적으로 얼마든지 증명이 가능하다.

⇨ 만약 $P(A) = P(A|B)$을 만족한다면

- $P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ <조건부 확률의 정의> $\Leftrightarrow P(A)P(B) = P(A\cap B)$ - 13번째 식 증명
- $P(A|B^c) = \dfrac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \dfrac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$ <분자 : 벤다이어그램을 이용한 집합의 연산 / 분모 : 여사건의 성질>

$= \dfrac{P(A)-P(A)P(B)}{1-P(B)}$ <이미 증명된 13번째 식> $= \dfrac{P(A)\{1-P(B)\}}{1-P(B)} = P(A)$ 즉, $P(A|B^c) = P(A)$

- 나머지 식도 모두 증명할 수 있지만 이 부분의 핵심과 거리가 멀기 때문에 이 정도로 넘어가기로 한다.
- <개념의 외연>에서 <가비의 리>를 이용하여 매우 직관적이고 쉽게 증명할 것이다.

코칭 <독립>이라는 말의 뜻이 <서로 영향을 주지 않는다.>라는 뜻인데 <두 사건>의 관계에서는 서로 영향을 주는지 주지 않는지 주어진 상황만으로는 전혀 느껴지지 않는다.

그럼에도 불구하고 <사건의 독립>을 모두 한결같이 <서로 일어날 확률에 영향을 주지 않는 사건>이라고 설명하는 이유는 <Part 3의 확률의 곱셈정리>를 학습하다 보면 자연스럽게 이해가 갈 것이다.

045 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 크기와 모양이 같은 공 6개가 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자.

(1) 이 공들 중에서 1, 2, 3이 적힌 공이 빨간 공이고 나머지는 흰 공 일 때 빨간 공이 나오는 사건을 B라고 하자.
사건 A와 사건 B는 독립인지 종속인지 확인하여라.

(2) 이 공들 중에서 1, 2, 3, 4가 적힌 공이 빨간 공이고 나머지는 흰 공 일 때 빨간 공이 나오는 사건을 B라고 하자.
사건 A와 사건 B는 독립인지 종속인지 확인하여라.

단순시행에서 두 사건의 관계 : 비직관적

13개의 식 중에서 아무거나 하나만 확인하면 된다.

(1) 1개의 공을 꺼낼 때, (시행) / 짝수의 눈 - 사건 A / 빨간 공 - 사건 B

1 2 3 4 5 6

$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$이고 $P(A) = \frac{1}{2}$이므로 $P(A|B) \neq P(A)$이다. 즉, 사건 A와 B는 종속이다.

(2) 1개의 공을 꺼낼 때, (시행) / 짝수의 눈 - 사건 A / 빨간 공 - 사건 B

1 2 3 4 5 6

$P(A|B) = \frac{n(A\cap B)}{n(B)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$이고 $P(A) = \frac{1}{2}$이므로 $P(A|B) = P(A)$이다. 즉, 사건 A와 B는 독립이다.

정답은 (1) 종속 (2) 독립

티칭 (1)의 경우 종속이므로 13개의 식 중에서 그 어떤 식도 성립하지 않는다. 사실 이미 앞에서 배워 알고 있지만 확신이 들 때까지 몇 번 더 확인해 보는 것은 수학적 논리를 기르는데 아주 좋은 습관이다.
예를 들어 13번째 식인 $P(A\cap B)$와 $P(A)\times P(B)$를 비교해 보자.
(1)에서 $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$이고, $P(A)$와 $P(B)$는 각각 $\frac{1}{2}$이므로 $P(A)\times P(B) = \frac{1}{4}$이다.
즉, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$이므로 역시 종속임이 확인된다.

046 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 두 개의 공을 꺼낼 때

(1) 두 공 중에서 1이 적힌 공이 포함된 사건을 A, 2가 포함되고 두 수의 차가 1인 사건을 B라고 할 때 두 사건이 독립인지 종속인지 확인하여라.

(2) 두 공 중에서 1이 적힌 공이 포함된 사건을 A, 두 수의 차가 1인 사건을 B라고 할 때 두 사건이 독립인지 종속인지 확인하여라.

복합시행에서 두 사건의 관계 : 비직관적

표본공간 S

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)

(1)번 문제의 표

표본공간 S

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)

(2)번 문제의 표

(1) 두 개의 공을 꺼낼 때 (시행) / 1이 적힌 공이 포함된 - 사건 A / 2가 포함되고 두 수의 차가 1인 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ 즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이므로 독립

(2) 두 개의 공을 꺼낼 때 (시행) / 1이 적힌 공이 포함된 - 사건 A / 두 수의 차가 1인 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ 즉, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$이므로 종속

정답은 (1) 독립 (2) 종속

코칭 두 사건의 독립과 종속을 확인하기 위해서는 <13개의 식> 중에서 아무거나 골라서 확인을 하면 된다.

코칭 $P(A\cap B)$를 구하기 위해서는 뒤에서 배우는 <확률의 곱셈정리>를 이용해야 하지만 <선 시행>에 따라 영역을 분할하고, 분할된 영역을 <후 시행>에 따라 다시 분할하여 각 근원사건의 확률(비율)을 면적화하면 <확률의 곱셈정리>를 이용하지 않아도 $P(A\cap B)$를 구할 수 있다.

047 이해를 위한 예제

유원이가 1, 2, 3, 4가 각 면에 적힌 정사면체 주사위를 1개 먼저 던진 후 현서가 앞면과 뒷면에 1, 2가 각각 적힌 동전 1개를 던지는 시행을 한다.

(1) 주사위와 동전 면에 적힌 수 중 3 또는 4가 포함된 사건을 A라 하고, 주사위와 동전에 적힌 수의 합이 4인 사건을 B라고 할 때, 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

(2) 주사위와 동전 면에 적힌 수 중 3 또는 4가 포함된 사건을 A라 하고, 두 주사위의 면에 적힌 수의 합이 5인 사건을 B라고 할 때, 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

<독립적 선후시행> + <전행사건> – 두 사건의 관계 : 비직관적

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)

(1)번 문제의 표

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)

(2)번 문제의 표

(1) 3 또는 4가 포함된 사건 - 사건 A / 주사위와 동전에 적힌 눈의 합이 4 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ 즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이므로 독립

(2) 3 또는 4가 포함된 사건 - 사건 A / 주사위와 동전에 적힌 눈의 합이 5 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ 즉, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$이므로 종속

정답은 (1) 독립 (2) 종속

048 이해를 위한 예제

유원이가 1, 2, 3, 4가 각 면에 적힌 정사면체 주사위를 1개 먼저 던진 후 홀수가 나오면 현서는 앞면과 뒷면에 1, 2가 각각 적힌 동전 1개를 던지고, 짝수가 나오면 같은 정사면체 주사위를 한 번 더 던지는 시행을 한다고 하자.

(1) 유원이와 현서가 던져 나온 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하고, 유원이가 던진 주사위의 눈이 1 또는 2인 사건을 B라고 할 때, 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

(2) 유원이와 현서가 던져 나온 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하고, 유원이가 던진 주사위의 눈이 소수인 사건을 B라고 할 때, 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

(3) 유원이와 현서가 던져 나온 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하고, 유원이가 던진 주사위의 눈이 소수인 사건을 B라고 할 때, 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

<종속적 선후시행> + <전행사건> – 두 사건의 관계 : 비직관적

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)		(4, 2)
(1, 2)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 3)
	(2, 4)		(4, 4)

(1)번 문제의 표

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)		(4, 2)
(1, 2)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 3)
	(2, 4)		(4, 4)

(2)번 문제의 표

(1) 두 수의 곱이 짝수인 사건 - 사건 A / 유원이가 던진 주사위의 눈이 1 또는 2인 사건 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ 즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이므로 독립

(2) 두 수의 곱이 짝수인 사건 - 사건 A / 유원이가 던진 주사위의 눈이 소수인 사건 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ 즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이므로 독립

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)		(4, 2)
(1, 2)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 3)
	(2, 4)		(4, 4)

(3) 두 수의 곱이 짝수인 사건 - 사건 A / 유원이가 던진 주사위의 눈이 1인 사건 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ 즉, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$이므로 종속

정답은 (1) 독립 (2) 독립 (3) 종속

코칭 이처럼 <시행의 독립, 종속>과 <사건의 독립, 종속>은 서로 무관하다. (완전히 무관한 것은 아니지만 그렇다고 생각해도 좋다.)
위와 같이 시행 자체는 종속이더라도 사건은 독립일 수 있다.

049 이해를 위한 예제

지용이가 1, 2, 3, 4가 각 면에 적힌 정사면체 주사위를 1개 먼저 던진 후 홀수가 나오면 형원이는 앞면과 뒷면에 1, 2가 각각 적힌 동전 1개를 던지고, 짝수가 나오면 같은 정사면체 주사위를 한 번 더 던지는 시행을 한다고 하자. 지용이가 홀수가 나오는 사건을 A, 형원이가 짝수가 나오는 사건을 B라고 할 때 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

<종속적 선후시행> + <선행사건, 후행사건> – 두 사건의 관계 : 비직관적

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)		(4, 2)
(1, 2)	(2, 3)	(3, 2)	(4, 3)
	(2, 4)		(4, 4)

- 지용이가 홀수가 나오는 사건 - 사건 A / 형원이가 짝수가 나오는 사건 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ 즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이므로 독립

코칭 심지어 <종속적 선후시행>에서 <선행사건>과 <후행사건>도 얼마든지 독립일 수 있다.

050 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니가 있다. 지용이가 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 짝수가 나오면 형원이는 1, 2, 3이 적힌 크기와 모양이 같은 공 3개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고, 홀수의 눈이 나오면 형원이는 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낸다. 지용이가 홀수인 공을 꺼내는 사건을 A, 형원이가 짝수인 공을 꺼내는 사건을 B라고 할 때 두 사건이 독립인지 종속인지 설명하여라.

<종속적 선후시행> + <선행사건, 후행사건> – 두 사건의 관계 : 비직관적

표본공간 S

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
(1, 4)		(3, 4)	

- 지용이가 홀수가 나오는 사건 - 사건 A / 형원이가 짝수인 공을 꺼내는 사건 - 사건 B

위의 표를 참조하면 $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

즉, $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$이므로 종속

051 이해를 위한 예제 2006. 11. 나형(52%). 28번. 4점

3개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 나오는 동전이 1개 이하인 사건을 A, 동전 3개가 모두 같은 면이 나오는 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P(A)}=\frac{1}{2}$ ㄴ. $\mathrm{P(A\cap B)}=\frac{1}{8}$ ㄷ. 사건 A와 사건 B는 서로 독립이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

시행 3개의 동전을 동시에 던질 때 - 순서쌍을 원소로 가지므로 복합시행이다. ⇨ $n(S) = 2\times2\times2$

사건 비교적 간단하므로 바로 분석하여 계산하면

- $n(A) = n(\text{앞}1, \text{뒤}2) + n(\text{모두 뒷면}) = 3 + 1 = 4$이므로 $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ⇨ ㄱ은 참
- $n(B) = n(\text{모두 앞면}) + n(\text{모두 뒷면}) = 1 + 1 = 2$이므로 $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
- 또한 $n(A\cap B) = n(\text{모두 뒷면}) = 1$이므로 $P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$ 이다. ⇨ ㄴ도 참
- 위의 결론에서 $P(A\cap B) = P(A)P(B)$라는 것을 확인할 수 있기 때문에 사건 A와 사건B는 독립이라고 할 수 있다. ⇨ ㄷ도 참

정답은 ⑤

티칭 추가설명) 비율의 면적화

3개의 동전을 동시에 던지는 시행(복합시행)은 1개씩 3번 동전을 던지는 것(독립적 선후시행)과 같다.
3번의 독립적인 시행을 통해서 표본공간을 나누면 다음과 같다.

표본공간 S

H	
T	

⇨

HH	HT
TH	TT

⇨

HHH	HHT	HTH	HTT
THH	THT	TTH	TTT

위의 표에서 조건에 해당하는 영역의 비율을 생각해 보면 확률 값을 쉽게 찾을 수 있다.
(물론 이 문제는 위의 해설과 같은 방식도 쉽다.)

티칭 독립임을 확인하려면 <13개의 식> 중 아무거나 하나만 확인하면 된다. 주로 13번째 식을 이용하여 확인하였지만 나머지 식들이 확인하기에 더 복잡하거나 해서 그런 것은 아니다.

- 위의 해설지에 언급한대로 $P(A) = \frac{1}{2}$이고, 위의 표를 참조하면 $P(A|B) = \frac{1}{2}$이므로 ㄷ은 참이다.

<조건부 확률>을 반드시 공식에 대입하는 느낌으로 풀기보다는 <새로운 표본공간 B>에서 <사건 A>가 차지하는 비율을 찾는 느낌으로 푸는 것이 좋다. 공식은 이것을 식으로 표현해 둔 것뿐이다.

3. 독립조건

- 사건의 독립과 종속은 직관적이지 않기 때문에 앞에서는 여러 가지 상황에서 독립과 종속을 <수식적으로 판단>하는 연습을 했다.

- 여기서는 반대로 두 사건이 서로 <독립>임이 주어져서 <13개 관계식>중 하나의 관계식을 활용하여 미지수를 구하는 연습을 한다.

052 이해를 위한 예제 2004. 11. 나형(43%). 24번. 4점

다음은 어느 회사에서 전체 직원 360 명을 대상으로 재직 연수와 새로운 조직 개편안에 대한 찬반 여부를 조사한 표이다. 재직 연수가 10 년 미만일 사건과 조직 개편안에 찬성할 사건이 서로 독립일 때, a 의 값을 구하시오.

(단위: 명)

재직 연수 \ 찬반 여부	찬성	반대	계
10 년 미만	a	b	120
10 년 이상	c	d	240
계	150	210	360

비율이 곧 확률이다.

재직 연수가 10년 미만일 사건을 A라 하고, 조직 개편안에 찬성할 사건을 B라 하면

- 비율이 곧 확률이므로 $P(A) = \frac{120}{360}$, $P(B) = \frac{150}{360}$이다.
- 두 사건이 <독립>이라는 조건이 있기 때문에 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$이라는 결론을 얻어낼 수 있다.

  즉, $P(A)P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{120}{360} \times \frac{150}{360} = \frac{a}{360} \Leftrightarrow a = 50$이다.

정답은 50

티칭 독립조건에서 꼭 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$의 관계식을 이용해야 하는 것은 아니다.

(단위: 명)

재직 연수 \ 찬반 여부	찬성	반대	계
10 년 미만	a	b	120
10 년 이상	c	d	240
계	150	210	360

- 위의 표에서 $P(A) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$이고 $P(A|B) = \frac{a}{150}$이므로 <독립조건>에 의하여 $\frac{1}{3} = \frac{a}{150}$

  즉, $a = 50$이라고 풀어도 전혀 상관없다.

개념의 외연	#1. 가비의 리
	#2. 명제의 참 거짓을 판단하는 논리
	#3. 배타적 고리문제
	#4. 직관적인 사건의 독립

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것은 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다. 어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다. 이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데 이런 개념들을 집약적으로 정리해 주는 부분이 될 것이다.

#1 가비의 리

1. 가비의 리

1) <가비의 리>는 매우 쉬운 것이다.

<가비의 리>라는 것은 <수학 2>에서 공식으로만 다뤄온 학생들은 어쩌면 문제 풀면서 생각해내기 어려운 개념으로 생각할 수도 있다. 하지만 <가비의 리>라는 것은 우리 생활과 밀접하게 연관되어 있는 아주 직관적인 개념이다.

- <가비의 리>란 <비>끼리 <더하거나 빼는> <원리>를 줄여서 표현한 것이다.

사례) 우리 앞에 식염수 1L 가 있다. 이것을 휴대하고 다니며 눈에 넣기 위해서 일부를 덜어내어 작은 통에 담았다.
이때 우리가 아무 생각 없이 작은 통에 담는 이유는 일부를 덜어낸다고 <농도가 변하는 것은 아니기> 때문이다.
또한 사용하고 남은 식염수를 다시 원래 1L 통에 넣는다. (물론 1L 통에는 일부의 식염수가 남아있다.)
우리가 이런 행위를 할 수 있는 이유도 <농도가 같은> 식염수를 섞는다고 해서 <농도가 변하는 것은 아니라는> 확신이 있기 때문이다.

$$+\begin{array}{|c} 1:2 \\ 2:4 \\ \hline 3:6 \end{array} \quad +\begin{array}{|c} 3:6 \\ 2:4 \\ \hline 5:10 \end{array} \quad -\begin{array}{|c} 5:10 \\ 1:2 \\ \hline 4:8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}\left(\frac{1+2}{2+4}\right) = \frac{5}{10}\left(\frac{3+2}{6+4}\right) = \frac{4}{8}\left(\frac{5-1}{10-2}\right)$$

2) (참고) 식에서 가비의 리 - 수2 내용

- 위와 같이 가비의 리는 분수를 계산하는 데에 활용할 수 있는 매우 직관적인 <원리>임이 분명하다.
  교과서 역시 분수를 계산할 때 <비례상수>를 이용하는 방법과 더불어 <가비의 리>를 적절히 이용하라고 설명하고 있다.

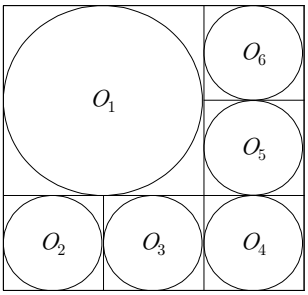
- 단지 위와 같이 <수>를 계산하는 것이 아닌 <식>을 계산해야 한다면 분모가 0인 경우가 나올 수 있으니 이것에 따라 케이스를 분류하여 비율 값을 구할 수 있다는 추가적인 생각을 공부할 뿐이다.

(이 경우 비례상수를 이용하더라도 케이스를 분류하는 경우가 생긴다.)

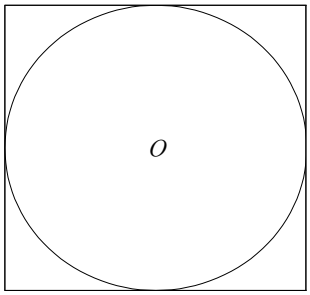
3) 면적에서 가비의 리

- 간단한 예를 통해서 이해해 보자.

다음 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형을 한 변의 길이가 4인 정사각형 1개와 한 변의 길이가 2인 정사각형 5개로 나눌 때, 각 정사각형 안에 내접하는 원 6개가 있다. 이 6개의 원의 넓이의 합을 가비의 리를 이용하여 구해보자.



<그림 1>



<그림 2>

원과 정사각형의 크기에 상관없이 모든 ◯□이 닮았으므로 ○/□가 항상 일정하다.

즉, 편의상 각 원의 넓이를 위의 <그림 1>과 같이 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6라 하고 이 원에 외접하는 정사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6라 할 때,

$$\Rightarrow \frac{O_1}{S_1} = \frac{O_2}{S_2} = \frac{O_3}{S_3} = \frac{O_4}{S_4} = \frac{O_5}{S_5} = \frac{O_6}{S_6} = \frac{O_1+O_2+O_3+O_4+O_5+O_6}{S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6}$$

6개의 정사각형의 넓이를 모두 더한 $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$는 위의 <그림 2>의 정사각형의 넓이이므로 <가비의 리>에 의하여 $O_1+O_2+O_3+O_4+O_5+O_6$은 큰 정사각형에 내접하는 원 O의 넓이임을 알 수 있다.

즉, 6개의 원의 넓이의 합은 반지름의 3인 원 O의 넓이와 같다. 즉, 정답은 9π

코칭 다음 2개의 예제를 푼 다음 <가비의 리>를 통해서 진짜로 하려던 것을 해보자.
<가비의 리>를 통해 확률의 상당히 많은 부분이 해결된다.

053 이해를 위한 예제

$\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c} = k$일 때, 모든 k은?

문제의 요지는 $\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c}$의 조건을 만족하는 비율 값을 찾으라는 것이다.

물론 식을 k에 대해서 정리한 후 k에 대한 일차방정식을 푸는 것도 방법이 될 수는 있으나 문제의 요지는 <가비의 리>를 이용하여 비율 값을 $\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}$와 같이 표현하면 비율 값을 훨씬 효율적으로 구할 수 있다는 것이다.

i) $a+2b+3c \neq 0$인 경우 : $\frac{2b+3c}{a} = \frac{3c+a}{2b} = \frac{a+2b}{3c} = \frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c} = 2$ 이므로 $k=2$

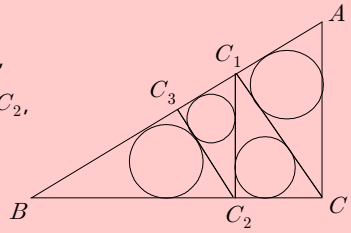
ii) $a+2b+3c=0$인 경우

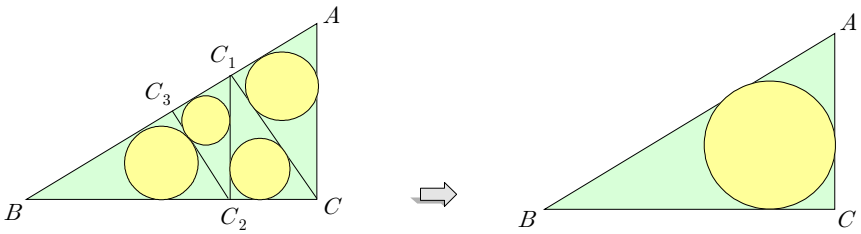
: 분모가 0일 수 없으므로 $\frac{2(a+2b+3c)}{a+2b+3c}$와 같이 표현 할 수 없다. 하지만 $a+2b+3c = 0$로부터 $a = -2b-3c$을 얻을 수 있고 주어진 식 $\frac{2b+3c}{a}$에 대입하면 $\frac{2b+3c}{a} = \frac{2b+3c}{-(2b+3c)} = -1$

즉, k값은 2 또는 -1

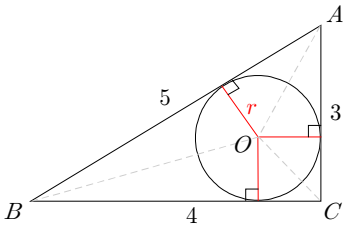
054 이해를 위한 예제

다음 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AB}=3$인 직각삼각형 ABC가 있다.
C에서 대변 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 C_1, C_1에서 대변 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 C_2, C_2에서 대변 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 C_3라고 하자. 이때 네 삼각형을 ACC_1, CC_1C_2, $C_1C_2C_3$, C_2C_3B라고 할 때, 각 삼각형에 내접한 원의 넓이의 총합을 구하여라.





- 위의 그림에서 네 삼각형 ACC_1, CC_1C_2, $C_1C_2C_3$, C_2C_3B의 넓이의 총합은 삼각형 ABC의 넓이와 같다.
  이때 <삼각형의 넓이>와 이에 <내접한 원의 넓이>는 일정한 비율을 만족하므로 <가비의 리>에 의하여
  ⇨ <원의 넓이의 총합>은 결국 삼각형 ABC에 내접한 원의 넓이와 같다.



- 원의 반지름은 <넓이 관계식>을 이용하여 구한다.
  즉, $\Delta\, ABC$의 넓이 $=\frac{1}{2}r(5+4+3)=\frac{1}{2}\times3\times4$이므로 $r=1$이다.

즉, 원의 넓이는 $1^2\pi=\pi$

티칭 <넓이 관계식>이란 삼각형의 넓이를 2가지 방법으로 구하고, 이 2가지 값이 같음을 이용하여 관계식을 세우는 것을 말한다. <넓이 관계식>은 항상 <유효한 관계식>이며 삼각형 내부에 수선이 있을 때 주로 사용된다는 점을 기억해두면 요긴하게 쓸 수 있다. 고등과정에서 다음 정도의 삼각형의 넓이 공식을 알면 충분하다.

1) $\frac{1}{2}ah$ 2) $\frac{1}{2}ab\sin C$ 3) 내접원의 반지름을 알 때 : $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ - 교과 內

4) $O(0,0)$, $A(a,b)$, $B(c,d)$를 알 때 $\Delta\, OAB$: $S=\frac{1}{2}|ad-bc|$ (크로스 공식) - 교과 外

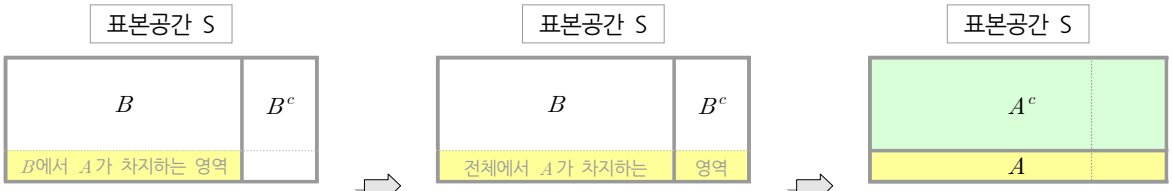
세 점 중 원점이 없는 경우는 한 점을 원점이 되도록 만들고 크로스 공식 적용.

2. 사건의 독립과 종속

1) 13개의 식

3개의 식 : $P(A) = P(A\|B) = P(A\|B^c)$	3개의 식 : $P(A^c) = P(A^c\|B) = P(A^c\|B^c)$
3개의 식 : $P(B) = P(B\|A) = P(B\|A^c)$	3개의 식 : $P(B^c) = P(B^c\|A) = P(B^c\|A^c)$
13번째 식 : $P(A\cap B) = P(A)P(B)$	

- 이 13개의 식 중 $P(A) = P(A|B)$의 의미를 생각해보자.
  $P(A)$라는 것은 S에서 A가 차지하는 비율이다. 또한 $P(A|B)$은 S의 일부인 B에서 A가 차지하는 비율이다.
  즉, <전체에서 A가 차지하는 비율>과 <B 안에서 A가 차지하는 비율>이 같음을 의미한다.
  이것을 면적화시켜 나타내면 다음과 같다.



<그림 1> <그림 2> <그림 3>

<그림 1>과 같이 $P(A|B)$ 즉, <사건 B>에서 <사건 A>가 차지하는 부분이 과 같다면
⇨ 전체에서 <사건 A>가 차지하는 비율인 $P(A)$도 $P(A|B)$와 같은 비율 값을 가지기 위해서는 <그림 2>처럼 될 수밖에 없다. (가비의 리의 느낌을 떠올려 봐라.)
결국 $P(A) = P(A|B)$를 만족한다면 <사건 A>는 면적화를 통해 <그림 3>과 같이 결정될 수밖에 없다.

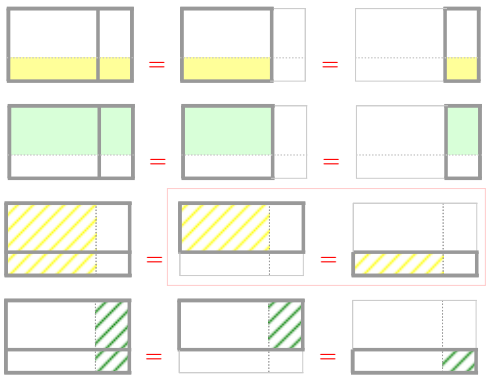
- 이제 나머지 식이 성립할 수밖에 없음을 식이 아닌 그림으로 이해해 본다. 아래 오른쪽 <12개의 그림>에서 <한 개의 등식>만 만족하면 나머지 등식을 모두 만족할 수밖에 없음을 <가비의 리>를 통해서 쉽게 설명할 수 있다.
  각 <각 확률의 의미>는 오른쪽 그림의 <굵은 선으로 표현된 영역>에서 <색깔 부분이 차지하는 비율>이다.

$P(A) = P(A|B) = P(A|B^c)$ ⇨

$P(A^c) = P(A^c|B) = P(A^c|B^c)$ ⇨

$P(B) = P(B|A) = P(B|A^c)$ ⇨

$P(B^c) = P(B^c|A) = P(B^c|A^c)$ ⇨



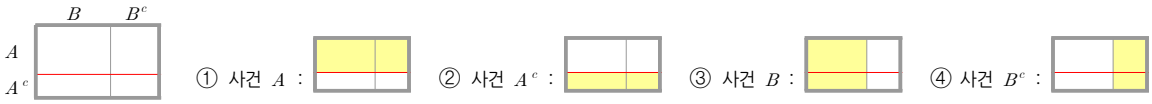
- 예를 들어 $P(B|A) = P(B|A^c)$과 같은 조건이 주어진다면 <사건 A>와 <사건 A^c>에서 <사건 B>가 차지하는 비율이 같다는 뜻이므로 <가비의 리>에 의하여 <A와 B 그리고 A^c과 B^c의 비율관계는 하나로 결정>된다.
  즉, (비율 관계가 결정되었으므로) 남은 등식도 모두 성립할 수밖에 없다.

- 13번째 식은 조건부 확률로 간단히 증명되므로 굳이 <면적화와 가비의 리>를 통해서 보이지 않겠다.

2) 독립이 되도록 표본공간을 분할하는 법

- 문제를 푸는데 사용할 수도 있지만 <독립>의 느낌을 구체적으로 가질 수 있다는 점에서 의의가 있다.
  사건 A와 사건 B가 독립이 되도록 표본공간을 분할하는 방법 ⇨ 십자가 분할

- 예컨대 면적인 1인 직사각형을 표본공간이라고 할 때,



과 같이 <십자가의 모양으로 보조선을 그어 영역을 분할>하면 <사건 A>와 <사건 B>는 독립이 된다.

- Part3 개념의 외연에서 문제 푸는 데도 잠깐 활용할 것. (필수는 아니다.)

055 이해를 위한 예제 2005. 6. 가형(선택 확률과 통계). 고3. 30번. 4점

표본공간 S는 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12\}$이고 모든 근원사건의 확률은 같다. 사건 A가 $A=\{4,\ 8,\ 12\}$일 때, 사건 A와 독립이고 $n(A\cap X)=2$인 사건 X의 개수를 구하시오. (단, $n(B)$는 집합 B의 원소의 개수를 나타낸다.)

표본공간 S

X^c	1개	3개
X	2개	6개
	A	A^c

두 사건이 독립이려면 12개의 식 중 하나인 $P(X|A)=P(X|A^c)$을 만족하면 된다.

말 그대로 A에서 X가 차지하는 비율인 $P(X|A)$가 $\frac{2}{3}$이므로

A^c에서 X가 차지하는 비율인 $P(X|A^c)$ 역시 $\frac{2}{3}$가 되어야 한다. (위의 표 참조)

즉, A^c의 원소가 9개이므로 이 중 아무 원소나 6개가 X에 포함된다면 $P(X|A^c)=\frac{2}{3}$를 만족하게 된다.

⇨ 결국 사건 X는 <사건 A>의 원소 중 2개의 원소를 포함하고, <사건 A^c>의 원소 중 6개의 원소를 포함하는 사건이기만 하면 무조건 독립이므로 사건 X의 개수는 ${}_3C_2\times{}_9C_6=252$

정답은 252

1. 명제의 증명법

1) 일반적인 이야기

- 명제의 증명법에는 가장 기본적으로는 <직접증명법>과 <간접증명법>이 있다.
  더 구체적으로는 고교과정에서 주로 쓰이는 증명법은 <조건에 해당하는 모든 대상을 확인하는 방법> <삼단논법> <당위법> <배반율과 귀류법> <대우명제를 활용하는 방법> <수학적 귀납법>이 있다. 이 방법들은 모두 교과서에서 언급되어 있는 방법으로 고등학교 과정에서 주로 <ㄱ, ㄴ, ㄷ 문제>의 형태로 출제된다.
  이런 논리가 정립되지 않아도 문제를 풀 수 있는 경우가 많지만 정확한 의미와 느낌을 안다면 더욱 안정적이고 정확하게 풀 수 있다.

- 위의 증명의 논리들은 주로 <참>임을 증명할 때 사용되고 <거짓>임을 증명하진 못한다.
  다만 위의 방법들로 <참>임이 증명되지 않을 때는 <거짓>임을 생각해 볼 수 있고, 적절한 <반례>를 찾아내야 한다. <반례>는 거짓인 명제를 증명하는 유일한 방법이며 <반례>를 들지 않고도 거짓임을 알아차렸다면 이런 명제는 거짓인 경우가 너무 많아 <구체적 반례>를 찾지 않아도 틀렸다고 느껴질 뿐이다.

  그래서 거짓인 명제를 판단하는 것이 수학의 가장 어려운 부분 중 하나이며 수학의 3대 난제 중 하나인 <리만의 가설> 역시 같은 어려움에 빠져있다. 잠시 언급하자면 <리만의 가설>도 수많은 수학자들이 <논리로 참 임을 증명>하려고 하였고, 이것이 실패하자 <끊임없이 반례를 찾으려고 시도하였으며> 찾는 것마다 반례가 아닌 명제를 만족하는 예들만 나와 어느 정도는 참일 것이라고, 혹은 거짓일거라고 예측하며 지금도 풀고 있는 문제이다.
  (고교과정에서도 거짓인 명제는 판별하는 것은 상당히 어렵다.)

- 한, 두 가지 정도의 반례가 존재하여 거짓인 명제들은 <수학적 경험>이 풍부한지 물어보는 문제이며, 본인이 수학실력이 부족하다고 느낄 경우 시험에서 <참 임이 증명되지 않는 ㄱ,ㄴ,ㄷ>를 만났을 경우 일단 넘어가길 바란다.
  이 경우 참일 가능성과 거짓일 가능성이 반반이기 때문에 찍어 맞추는 방법 따위는 없고, 운이 좋으면 맞을 뿐이다.
  그 문제를 통해 한 가지 수학적 경험을 더 쌓고 잘 정리해두면 그만이다. 거짓인 명제를 푸는 특별한 방법은 없다.

2) 당위법

- <식 변형의 논리를 통한 명제증명법>이다.
- 'p이면 q이다.' 의 형태의 명제를 증명할 때 <결론>에 해당하는 q가 <식으로 표현>될 경우 q를 변형하여 명제의 <참>을 증명하는 방법이다.
  1 단계) 결론에 해당하는 q를 <같은 식>으로 변형한다. 수학에서는 이것을 <필요충분조건>이라고 한다.
  예를 들어 $x=2 \Rightarrow x^2=4$와 같이 변형하는 것은 <가능>하지만 <준 식 : $x=2$>와 <변형 식 : $x^2=4$>가 같은 식은 아니다. <변형 식 : $x^2=4$>와 같은 식은 <$x=\pm 2$>이다.
  2 단계) 결론에 해당하는 q를 <같은 식>으로 변형할 때 반드시 쓰이는 식 변형이 바로 <조건 p>의 대입이다.
  <조건 p>는 이 명제의 전제가 되므로 그대로 <결론 q>에 대입해도 <같은 식>으로 변형되는 효과가 있다.
  3 단계) <결론 q>가 <당연한 식>이 될 경우 이 명제는 참이다.
  (당연한 식이란 $x=x$와 같은 항등식을 말한다.)

코칭 명제에 대한 자세한 이야기는 지면상 너무 길어질 수 있어 다음 기회에 하도록 한다.

2. 배반, 독립, 종속의 논리관계

1) 공사건이 아닌 두 사건

A와 B가 모두 공사건이 아닌 경우 : 배반이면 무조건 종속이다.

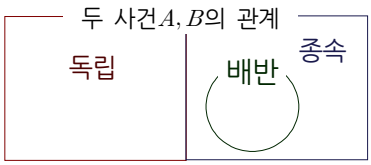
⇨ 민권이와 수현이와 가위, 바위, 보를 하는 데 민권이가 말한다.

- 민권 : 수현아 나 가위 낼 거니까, 가위 내지마.

<배반>의 정의는 <두 사건의 교집합이 없음>이므로 위와 같은 상황이 바로 배반이다.
수현이는 분명히 민권이에게 영향을 받고 있다.

⇨ 수식적으로 봐도 $P(A\cap B) = 0$인데 (배반이면 교집합이 공집합이므로)
A와 B가 모두 공사건이 아니라는 전제가 있기 때문에 $P(A)P(B) \neq 0$이다.
즉, $P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$이므로 두 사건은 종속이라고 판단 할 수 있다.

⇨ 모든 두 사건의 관계는 독립이거나 종속이므로 다음과 같은 벤다이어그램이 성립한다.



(단, $P(A)P(B) \neq 0$)인 경우

배반 · 독립 · 종속의 관계된 명제

⇨ $0 < P(A) < 1$일 때, A와 A^c은 종속이다. (참)
: $0 < P(A) < 1$이므로 $P(A) \neq 0$, $P(A^c) \neq 0$이고 A와 A^c은 배반이므로 종속이 맞다.

⇨ 공사건이 아닌 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cap B) = 0$이면 A와 B는 종속이다. (참)
: $P(A\cap B) = 0$이라는 것은 A와 B가 배반이라는 말이므로 종속이 맞다.

⇨ 공사건이 아닌 두 사건 A, B에 대하여 $P(A\cap B) \neq 0$이면 A와 B는 독립이다. (거짓)
: 두 사건 A, B가 교집합이 있다는 사실만으로 독립인지 종속인지 판단 할 수는 없다.
<13개의 식> 중 하나를 활용해서 확인해 봐야 한다.

2) 공사건의 독립과 종속 (지엽적 내용 - 중요하지 않고, 문 · 이과 모두 넘어가도 좋다.)

- A 또는 B가 공사건이면 $P(A\cap B) = P(A)P(B)$을 만족시키기 때문에 독립이다.
이렇게 기억하는 것은 어차피 별로 중요하지 않은 이 부분을 가볍게 기억하는 좋은 방법이긴 하지만 정확하진 않다.
(이것이 정확하지 않은 이유는 이 책에서 처음에 매우 길게 서술했다가 수능과 내신에 중요하지 않아 삭제하였다.)
너무 깊이 고민하지 말고 <촌철살인 확률과 통계 1>에서 설명했던 ${}_nC_0 = 1$인 이유처럼 수학적인 규칙성을 완성하기 위해 <정의되는 것>이라고 생각하면 된다.

056 이해를 위한 예제

$P(A)>0,\ P(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

□ A와 B가 독립이면 A와 B^c도 독립이다.

□ A와 B가 독립이면 A^c와 B^c도 독립이다.

□ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 $P(A^c|B)=1-P(A|B)$이다.

□ A와 B가 배반이면 A와 B는 독립이다.

□ A와 B가 배반이면 $P(B|A^c)=\dfrac{P(B)}{1-P(A)}$

□ A와 B가 독립이면 A와 B^c도 독립이다. □ A와 B가 독립이면 A^c와 B^c도 독립이다

: <12개의 식> 중 하나가 성립하면 모두 성립한다. - 이 말을 이해했다면 쉽게 알 수 있는 내용이다.
두 명제는 모두 (참)이다.

□ $P(A\cap B) = P(A)P(B)$이면 $P(A^c|B) = 1-P(A|B)$이다. - **<당위법>**을 이용해본다.

: <조건 식> $P(A\cap B) = P(A)P(B)$에서 A와 B는 독립이라는 사실을 알 수 있다.
(이 내용을 활용하여 결론 식을 변형한다.)

<결론 식 변형> 위의 <조건 식>으로부터 $P(A^c|B) = 1-P(A|B) \Leftrightarrow P(A^c) = 1-P(A)$이다.
변형된 이 식이 당연한 식이므로 주어진 명제는 (참)이다. ($P(A^c) = 1-P(A)$는 당연한 식이다.)

□ A와 B가 배반이면 A와 B는 독립이다.

: 문제의 전제인 $P(A)>0,\ P(B)>0$에서 A와 B가 배반이라면 A와 B는 반드시 종속이다. (거짓)

□ A와 B가 배반이면 $P(B|A^c) = \dfrac{P(B)}{1-P(A)}$

: <조건 식> <A와 B가 배반>임을 이용해 <결론 식>을 변형하는 **<당위법>**을 이용해 본다.

<결론 식 변형> $P(B|A^c) = \dfrac{P(B)}{1-P(A)} \Leftrightarrow \dfrac{P(B\cap A^c)}{P(A^c)} = \dfrac{P(B)}{1-P(A)}$ (- 조건부 확률의 정의식)

그런데 <조건 식>에서 A와 B가 배반이므로 $P(B\cap A^c) = P(B)$ (- 벤다이어그램을 이용하여 판단)

즉, $\dfrac{P(B\cap A^c)}{P(A^c)} = \dfrac{P(B)}{1-P(A)} \Leftrightarrow \dfrac{P(B)}{P(A^c)} = \dfrac{P(B)}{1-P(A)}$이다.

변형된 이 식이 당연한 식이므로 주어진 명제는 (참)이다. ($P(A^c) = 1-P(A)$는 당연한 식이다.)

정답은 ④

057 이해를 위한 예제 2008. 11. 가형(49%) 나형(39%). 17번. 4점

정보이론에서는 사건 E가 발생했을 때, 사건 E의 정보량 $I(E)$가 다음과 같이 정의된다고 한다.

$$I(E) = -\log_2 P(E)$$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 사건 E가 일어날 확률 $\mathrm{P(E)}$는 양수이고, 정보량의 단위는 비트이다.)

<보 기>

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E)=1$이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $P(A\cap B)>0$이면 $I(A\cap B)=I(A)+I(B)$ 이다.

ㄷ. $P(A)>0$, $P(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<수학 외적문제해결능력>의 문제 - <수학 외적문제해결능력>이란 <문제에서 관계식>을 주고 그 관계식을 활용하여 문제를 풀어나가는 방식이다. (이해력만 있다면 전혀 어려운 문제가 아니다.)

이 문제에서는 $I(E) = -\log_2 P(E)$을 활용한다.

ㄱ. 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건을 E라 하면 $I(E) = 1$이다.

⇨ <조건식>을 변형하여 바로 <결론 식>을 만들었다면 <삼단논법>을 이용한 증명이라고 볼 수 있다.

: $P(E) = \frac{1}{2}$이므로 주어진 식에 대입하면 $I(E) = -\log_2\frac{1}{2} \Leftrightarrow I(E) = 1$이다. (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $P(A\cap B)>0$이면 $I(A\cap B) = I(A)+I(B)$이다.

⇨ $P(A)P(B) = P(A\cap B)$이고, A, B는 모두 공사건이 아니라는 사실을 알 수 있다. - **<당위법>**을 이용해본다.

: <조건 식> 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $P(A\cap B)>0$

(이 내용과 문제의 조건 $I(E) = -\log_2 P(E)$을 활용하여 결론 식을 변형한다.)

<결론 식 변형> $I(A\cap B) = I(A)+I(B) \Leftrightarrow -\log_2 P(A\cap B) = -\log_2 P(A) - \log_2 P(B)$

$\Leftrightarrow \log_2 P(A\cap B) = \log_2 P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow \log_2 P(A\cap B) = \log_2 P(A)P(B)$

그런데 두 사건 A와 B가 독립이므로 <변형된 결론 식> $\log_2 P(A\cap B) = \log_2 P(A)P(B)$은 당연한 식 (참)

ㄷ. $P(A)>0$, $P(B)>0$인 두 사건 A, B에 대하여 $2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B)$이다.

<결론 식 변형> $2I(A\cup B)\leq I(A)+I(B) \Leftrightarrow -2\log_2 P(A\cup B) \leq -\log_2 P(A) - \log_2 P(B)$

$\Leftrightarrow -2\log_2 P(A\cup B) \leq -\log_2 P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow \log_2\{P(A\cup B)\}^2 \geq \log_2 P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow \{P(A\cup B)\}^2 \geq P(A)P(B)$

$\Leftrightarrow P(A\cup B)P(A\cup B) \geq P(A)P(B)$

⇨ <변형된 결론 식>은 $P(A\cup B)\geq P(A), P(B)$이기 때문에 <당연한 식>이다. (참)

정답은 ⑤

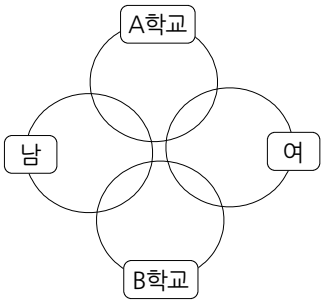
#3 배타적 고리문제

문제 유형에 불과하다.

배타적 고리문제는 표를 활용하라.

1. 배타적 고리문제

남자와 여자, 학교 A를 다니는 학생과 B를 다니는 학생 이 네 가지 집합의 관계를 생각해보면



- 남자와 여자는 서로 배타적이다. (즉, 교집합이 없다.) 그리고 학교 A와 B역시 보통은 두 학교를 동시에 다니지 않으므로 배타적이라고 생각할 수 있다. (애매한 부분은 문제에서 판단 할 수 있도록 조건을 준다.)
  즉, 이 상황을 벤다이어그램으로 생각해보면 4개의 원이 마치 고리처럼 연결되어 있는 것 같은데 이 때문에 배타적 고리문제라고 이름을 붙여봤다. 이런 문제는 벤다이어그램보다 표를 통해서 정리하는 것이 효율적이다.

2. 표 활용법

위와 같은 4개의 집합이 주어지는 상황이라면 표를 활용한다.

1) 교집합이 생기지 않는 경우

남학생 15명, 여학생 10명이 A와 B책 중 한 가지 책을 골라서 읽었을 때,
A책을 읽은 남학생 5명, B책을 읽은 여학생 2명

(표 작성) ⇨

	A	B	
남자	5	10	15
여자	8	2	10

예를 들어 위의 상황과 같이 표를 완성한 상황에서 조건부 확률을 물어보면 매우 쉽다.

(1) $P(A\,|\,\text{남}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ (2) $P(\text{여}\,|\,A) = \frac{8}{13}$ (3) $P(B\,|\,\text{여}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2) 교집합이 생기는 경우

남학생 15명, 여학생 10명이 A와 B책 중 적어도 한 가지 책을 골라서 읽었을 때,
- 이 말은 둘 다 읽은 경우가 있고, 안 읽은 경우는 없다.

A책을 읽은 남학생 7명, B책을 읽은 남학생 11명, A책을 읽은 여학생 6명, B책을 읽은 여학생 8명

(표 작성) ⇨

	A만	$A\cap B$	B만	
남자	$7-x$	x	$11-x$	15
여자	$6-y$	y	$8-y$	10

여기에서 x, y를 구하면 $x=3$, $y=4$이다.

즉, 표를 완성하면

	A만	$A\cap B$	B만	
남자	4	3	8	15
여자	2	4	4	10

예를 들어 오른쪽과 같이 표를 완성한 상황에서 조건부 확률을 물어보면 매우 쉽다. 문제는 아래와 같이 얼마든지 만들 수 있다.
단지 실제 문제는 발문이 조금 더 길기 때문에 잘 읽고 정리해야한다.

	A만	$A\cap B$	B만	
남자	4	3	8	15
여자	2	4	4	10

(1) 남학생이 뽑혔을 때, A책을 읽은 학생일 확률 : $P(A\,|\,\text{남}) = \dfrac{4+3}{15} = \dfrac{7}{15}$

(2) A책을 읽은 학생이 뽑혔을 때, 여학생일 확률 : $P(\text{여}\,|\,A) = \dfrac{2+4}{4+3+2+4} = \dfrac{6}{13}$

(3) A책과 B책을 모두 읽은 학생이 뽑혔을 때, 남학생일 확률 : $P(\text{남}\,|\,A\cap B) = \dfrac{3}{3+4} = \dfrac{3}{7}$

058 이해를 위한 예제 2005. 11. 나형(77%). 26번. 3점

어느 학급은 남학생 18명, 여학생 16명으로 이루어져 있다. 이 학급의 모든 학생은 중국어와 일본어 중 한 과목만 수업을 받는다고 한다. 남학생 중에서 중국어 수업을 받는 학생은 12명이고, 여학생 중에서 일본어 수업을 받는 학생은 7명이다. 이 학급에서 선택된 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

조건 남학생 18명, 여학생 16명 + 이 학급의 모든 학생은 중국어와 일본어 중 한 과목만 수업을 받는다고 한다.

⇨ 남학생, 여학생이 서로 배타적이고, 중국어, 일본어 역시 서로 배타적이다. 즉, 4개의 집합을 표로 정리한다.

	중국어	일본어	
남학생	12	6	18
여학생	9	7	16
	21	13	

조건부 사건 Y 이 학급에서 선택된 한 학생이 중국어 수업을 받는다고 할 때,

구하는 사건 X 이 학생이 여학생일 확률

⇨ 즉, $P(\text{여학생} \mid \text{중국어}) = \frac{9}{12+9} = \frac{3}{7}$

정답은 ③

공부는 예제를 가지고 하는 거야

촌철살인 경우의 수 | PART 2 확률의 계산 1

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 016

2008. 10. 나형(17%). 30번. 4점 - 변형

집합 X를 $X=\left\{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \middle| \square a, b, c, d\text{는 } 3 \text{ 이하의 자연수} \right\}$라 하자. 집합 X의 각 원소는 4개의 숫자를 조건과 같이 정사각형의 모양으로 나열한 것이다. 집합 X에서 임의로 하나의 원소를 선택할 때, 그 원소가 $ad-bc \neq 0$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

예제 017

2013. 11. B형(86%). 23번. 3점

어느 마라톤 대회에 참가한 50명의 동호회 회원 중 마라톤에서 완주한 회원 수와 기권한 회원 수가 다음과 같다. 참가한 회원 중에서 임의로 선택한 한 명의 회원이 여성이었을 때, 이 회원이 마라톤에서 완주하였을 확률이 p이다. $100p$의 값을 구하시오.

(단위: 명)

구분	남성	여성
완주한 회원 수	27	9
기권한 회원 수	8	6

예제 018

2011. 7. 가형(52%). 23번. 3점

정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형일 때, 그 삼각형이 이등변삼각형일 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. 이때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

예제 019

2004. 10. 나형(47%). 27번. 3점

동전 한 개를 두 번 던진 결과 적어도 한 번은 앞면이 나왔다고 한다. 두 번째 던진 동전이 앞면이 나왔을 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

예제 020

2008. 9. 나형(75%). 26번. 3점

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 철수, 영희, 은지 순서로 공을 임의로 한 개씩 꺼내기로 하였다. 철수가 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 6일 때, 남은 두 사람이 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작을 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

예제 021

2007. 9. 나형(81%). 29번. 4점

여학생 100명과 남학생 200명을 대상으로 영화 A와 영화 B의 관람 여부를 조사하였다. 그 결과 모든 학생은 적어도 한 편의 영화를 관람하였고, 영화 A를 관람한 학생 150명 중 여학생이 45 명이었으며, 영화 B를 관람한 학생 180명 중 여학생이 72명이었다. 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생들 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{31}{60}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{17}{30}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

예제 022

2007. 3. 가형(65%). 9번. 3점

1 부터 10 까지 자연수가 각각 하나씩 적힌 10 장의 카드 중에서 임의로 한 장을 뽑을 때, n 의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A_n 이라 하자. 이때 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. A_3과 A_4는 서로 배반사건이다. ㄴ. $\mathrm{P}(A_4|A_2) = \frac{1}{5}$ ㄷ. A_2와 A_5는 서로 독립이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 023

2005. 6. 가형(57%). 25번. 4점

어느 회사의 전체 직원은 기혼남성 6명, 미혼남성 20명, 기혼여성 36명, 미혼여성 x명이다. 이 회사에서 직원 중 한 사람을 선택하여 선물을 주기로 하였다. 선택된 직원이 남성인 경우를 사건 A라 하고, 미혼인 경우를 사건 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립일 때, x의 값을 구하시오. (단, 각 직원이 선택될 확률은 같다고 가정한다.)

예제 024

2005. 10. 나형(74%). 8번. 4점

근원사건 전체의 집합 S의 두 부분집합 A, B에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$)

<보 기>

ㄱ. $A \subset B$ 이면 $\mathrm{P}(B|A) = 1$ 이다.

ㄴ. A, B가 배반사건이면 $\mathrm{P}(B|A) = 0$ 이다.

ㄷ. A, B가 독립사건이면 A, B는 배반사건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답과 해설

예제 016

REVIEW 여사건의 아이디어

2008. 10. 나형(17%). 30번. 4점 - 변형

집합 X를 $X=\left\{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \middle| \square a, b, c, d\text{는 } 3 \text{ 이하의 자연수} \right\}$라 하자. 집합 X의 각 원소는 4개의 숫자를 조건과 같이 정사각형의 모양으로 나열한 것이다. 집합 X에서 임의로 하나의 원소를 선택할 때, 그 원소가 $ad-bc \neq 0$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

조건 $X=\left\{ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \middle| \square a, b, c, d\text{는 } 3 \text{ 이하의 자연수} \right\}$라 하자. 집합 X의 각 원소는 4개의 숫자를 조건과 같이 정사각형의 모양으로 나열한 것

시행 집합 X에서 임의로 하나의 원소를 선택할 때, ⇨ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$가 가능한 모든 경우의 수는 $n(S) = 3\times3\times3\times3$

사건 그 원소가 $ad-bc \neq 0$를 만족할 확률

사건의 분석 $P(ad \neq bc)$을 구하는 것보다 $1 - P(ad-bc=0)$을 구하는 것이 낫다.

	ad	$=$	bc	
<상황 1> - 곱해서 1	$(1,\ 1)$		$(1,\ 1)$	⇨ 1
<상황 2> - 곱해서 2	$(1,\ 2)$		$(1,\ 2)$	⇨ $2!\times2!$
<상황 3> - 곱해서 3	$(1,\ 3)$		$(1,\ 3)$	⇨ $2!\times2!$
<상황 4> - 곱해서 4	$(2,\ 2)$		$(2,\ 2)$	⇨ 1
<상황 5> - 곱해서 6	$(2,\ 3)$		$(2,\ 3)$	⇨ $2!\times2!$
<상황 6> - 곱해서 9	$(3,\ 3)$		$(3,\ 3)$	⇨ 1

- 표본공간 $n(S) = 3\times3\times3\times3$의 상황을 고려해보면 <상황 2>의 경우 1과 2를 배열하는 경우까지 생각해야 한다.
- $n(ad-bc=0) = 15$이므로 $P(ad-bc=0) = \frac{15}{3\times3\times3\times3} = \frac{5}{27}$이다.
- $P(ad \neq bc) = 1 - P(ad-bc=0) = 1 - \frac{5}{27} = \frac{22}{27}$이므로

$p+q = 49$이다. 정답은 49

코칭 $\frac{n(S) - n(ad-bc=0)}{n(S)}$과 같이 풀어도 되지만 <확률끼리 더하고 빼는> <덧셈정리>를 이용해 보았다.

코칭 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구할 수 있는 상황에서는 <확률의 덧셈정리>가 필수가 아니지만 앞으로 나오는 <개수>로 확률을 구하기 어려운 상황에서는 <확률의 덧셈정리>가 필수적으로 사용된다.

예제 017

REVIEW 계산적 조건부

2013. 11. B형(86%). 23번. 3점

어느 마라톤 대회에 참가한 50명의 동호회 회원 중 마라톤에서 완주한 회원 수와 기권한 회원 수가 다음과 같다. 참가한 회원 중에서 임의로 선택한 한 명의 회원이 여성이었을 때, 이 회원이 마라톤에서 완주하였을 확률이 p이다. $100p$의 값을 구하시오.

(단위: 명)

구분	남성	여성
완주한 회원 수	27	9
기권한 회원 수	8	6

(단위: 명)

구분	남성	여성
완주한 회원 수	27	9
기권한 회원 수	8	6

시행 참가한 회원 중에서 임의로 선택한 한 명- 단순시행이다.

조건부 사건 Y 선택한 한 명의 회원이 여성 ⇨ 시행에 따른 특정 결과를 준 것으로 새로운 표본공간이 된다.

구하는 사건 X 이 회원이 마라톤에서 완주하였을 확률 ⇨ Y라는 새로운 표본공간 안에서 X를 찾는다.

⇨ $P(X \mid Y) = \dfrac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \dfrac{9}{15}$

$100p = 60$이므로 즉, 정답은 60

예제 018

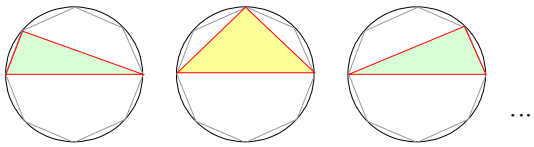
REVIEW 계산적 조건부, 지름의 원주각

2011. 7. 가형(52%). 23번. 3점

정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형일 때, 그 삼각형이 이등변삼각형일 확률을 $\dfrac{q}{p}$라 하자. 이때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

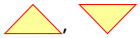
조건부 사건 Y 정팔각형의 꼭짓점 중 임의의 세 점을 택하여 만든 삼각형이 직각삼각형일 때,

⇨ 아래 그림과 같이 지름을 결정하는 4가지 각각에 대하여 직각삼각형을 결정하는 경우의 수는 6가지이다. 즉, $n(Y) = 4 \times 6$



구하는 사건 X 그 삼각형이 이등변삼각형일 확률

⇨ 직각 삼각형(조건부 : 새로운 표본공간) 중 이등변삼각형인 경우는 <지름이 결정>되는 각각에 대하여



2가지가 존재한다. 즉, $n(X \cap Y) = 4 \times 2$

즉, $P(X \mid Y) = \dfrac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \dfrac{4 \times 2}{4 \times 6} = \dfrac{1}{3}$이므로 $10p+q = 31$

예제 019

REVIEW 계산적 조건부

2004. 10. 나형(47%). 27번. 3점

동전 한 개를 두 번 던진 결과 적어도 한 번은 앞면이 나왔다고 한다. 두 번째 던진 동전이 앞면이 나왔을 확률은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

조건부 사건 Y 동전 한 개를 두 번 던진 결과 적어도 한 번은 앞면이 나왔다고 한다.

⇨ (H, H), (H, T), (T, H)의 세 가지이다. 즉, $n(Y) = 3$

구하는 사건 X 두 번째 던진 동전이 앞면이 나왔을 확률

⇨ 적어도 한 번 앞면이 나온 경우 (조건부 : 새로운 표본공간) 중 두 번째 던진 동전이 앞면이 나온 경우는 (H, H), (T, H) 2가지가 존재한다. 즉, $n(X \cap Y) = 2$

즉, $P(X \mid Y) = \frac{n(X \cap Y)}{n(Y)} = \frac{2}{3}$이므로 정답은 ④

예제 020

REVIEW 의미상 조건부

2008. 9. 나형(75%). 26번. 3점

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 주머니에 들어있다. 이 주머니에서 철수, 영희, 은지 순서로 공을 임의로 한 개씩 꺼내기로 하였다. 철수가 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 6일 때, 남은 두 사람이 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작을 확률은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

시행 이 주머니에서 철수, 영희, 은지 순서로 공을 임의로 한 개씩 꺼내기로 하였다. + 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.

- 시간의 순서가 있고, <선시행의 결과>에 의하여 <후시행>이 영향을 받으므로 종속적 선후시행이다.

조건부 사건 Y 철수가 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 6일 때,

⇨ 시간 상 앞에 일어난 사건의 결과가 조건으로 나온 것이므로 조건부 확률의 식을 이용하여 계산할 필요가 없는 <의미상 조건부>이다.

구하는 사건 X 남은 두 사람이 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작을 확률

⇨ P(하나는 6보다 크고, 하나는 작음 | 철수 6)

= <6을 제외한 9개의 공>에서 <영희, 은지가 하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작을 공을 뽑을 확률>

- 즉, <1, 2, 3, 4, 5 / 7, 8, 9, 10>에서 <영희와 은지>가 한 개씩 뽑는 모든 경우의 수는 9×8 (조건부 : 표본공간)

이 중에서 <하나는 6보다 크고 다른 하나는 6보다 작을 공을 뽑는 경우의 수>는 $2 \times 5 \times 4$이다.

$P(X \mid Y)$ (의미상 조건부) $= \frac{2 \times 5 \times 4}{9 \times 8} = \frac{5}{9}$ 답 : ⑤

티칭 P(하나는 6보다 크고, 하나는 작음 | 철수 6)이 <의미상 조건부>임을 이해했다면 이 문제를 넣은 의도는 이해한 것이다. 사실 그 이후 과정의 일반적 풀이는 Part 3에서 배우는 <종속인 사건의 곱셈정리>이다.

하지만 <영희 → 은지> 순으로 뽑는 모든 경우 9×8가지는 <일어날 가능성이 같은 정도로 기대>되므로 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구하는 것도 틀리지 않고, 현재는 <곱셈정리>를 배우지 않았으므로 이런 풀이를 선택했다.

예제 021

REVIEW 조건부 확률 - 배타적 고리문제

2007. 9. 나형(81%). 29번. 4점

여학생 100명과 남학생 200명을 대상으로 영화 A와 영화 B의 관람 여부를 조사하였다. 그 결과 모든 학생은 적어도 한 편의 영화를 관람하였고, 영화 A를 관람한 학생 150명 중 여학생이 45 명이었으며, 영화 B를 관람한 학생 180명 중 여학생이 72명이었다. 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생들 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때, 이 학생이 여학생일 확률은?

① $\frac{31}{60}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{17}{30}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

조건 여학생 100명과 남학생 200명을 대상으로 영화 A와 영화 B의 관람 여부를 조사

⇨ 남학생, 여학생이 서로 배타적이고, 영화 A와 영화 B 역시 서로 배타적이다. 즉, 4개의 집합을 표로 정리한다.

조건 모든 학생은 적어도 한 편의 영화를 관람 + 영화 A를 관람한 학생 150명 중 여학생이 45 명이었으며, 영화 B를 관람한 학생 180명 중 여학생이 72명

	A만	$A\cap B$	B만	
남자	$105-x$	x	$108-x$	200
여자	$45-y$	y	$72-y$	100

⇨

	A만	$A\cap B$	B만	
남자	92	13	95	200
여자	28	17	55	100

- $(105-x)+x+(108-x) = 200$이므로 $x=13$이고, $(45-y)+y+(72-y) = 100$이므로 $y=17$이다.

조건부 사건 Y 두 영화 A, B를 모두 관람한 학생들 중에서 한 명을 임의로 뽑을 때,

구하는 사건 X 이 학생이 여학생일 확률

⇨ 즉, $P(\text{여학생} \mid A,\ B \text{ 모두 관람}) = \frac{17}{30}$

즉, 정답은 ④

예제 022

REVIEW 계산적 조건부 - 독립과 종속

2007. 3. 가형(65%). 9번. 3점

1 부터 10 까지 자연수가 각각 하나씩 적힌 10 장의 카드 중에서 임의로 한 장을 뽑을 때, n 의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A_n 이라 하자. 이때 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. A_3과 A_4는 서로 배반사건이다.　　ㄴ. $\mathrm{P}(A_4|A_2) = \frac{1}{5}$　　ㄷ. A_2와 A_5는 서로 독립이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A_3 = \{3, 6, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$이므로 $A_3 \cap A_4 = \varnothing$ 따라서 A_3과 A_4는 서로 배반사건이다. (참)

ㄴ. $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_4 = \{4, 8\}$ ⇨ $P(A_4|A_2) = \frac{n(A_4 \cap A_2)}{n(A_2)} = \frac{2}{5}$ 이므로 (거짓)

ㄷ. $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A_5 = \{5, 10\}$ ⇨ $P(A_2|A_5) = \frac{n(A_5 \cap A_2)}{n(A_5)} = \frac{1}{2}$이고

$P(A_2) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$이므로 A_2와 A_5는 서로 독립이다. (참)

즉, 정답은 ③

예제 023

REVIEW 독립조건

2005. 6. 가형(57%). 25번. 4점

어느 회사의 전체 직원은 기혼남성 6명, 미혼남성 20명, 기혼여성 36명, 미혼여성 x명이다. 이 회사에서 직원 중 한 사람을 선택하여 선물을 주기로 하였다. 선택된 직원이 남성인 경우를 사건 A라 하고, 미혼인 경우를 사건 B라 하자. 두 사건 A와 B가 서로 독립일 때, x의 값을 구하시오. (단, 각 직원이 선택될 확률은 같다고 가정한다.)

조건 기혼남성 6명, 미혼남성 20명, 기혼여성 36명, 미혼여성 x명 + 선택된 직원이 남성인 경우를 사건 A라 하고, 미혼인 경우를 사건 B

조건 두 사건 A와 B가 서로 독립

⇨ 13개의 식 중 하나만 만족하면 된다. $P(A|B) = \frac{20}{20+x}$이고, $P(A|B^c) = \frac{6}{6+36} = \frac{1}{7}$이므로

$\frac{20}{20+x} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 140 = 20 + x \Leftrightarrow x = 120$

정답은 120

예제 024

REVIEW 배독종과 논리관계

2005. 10. 나형(74%). 8번. 4점

근원사건 전체의 집합 S의 두 부분집합 A, B에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?
(단, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$)

<보 기>

ㄱ. $A \subset B$이면 $\mathrm{P}(B|A) = 1$이다.

ㄴ. A, B가 배반사건이면 $\mathrm{P}(B|A) = 0$이다.

ㄷ. A, B가 독립사건이면 A, B는 배반사건이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $A \subset B$에서 <결론 식>을 변형하여 <당연한 식>을 만드는 <당위법>을 이용해본다.

⇨ $P(B|A) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$ (조건부 확률의 정의 식)

$\Leftrightarrow \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$ ($A \subset B$ 이므로) - 당연한 식이 나왔으므로 (참)

ㄴ. <A, B 가 배반>이라는 조건에서 <결론 식>을 변형하여 <당연한 식>을 만드는 <당위법>을 이용해본다.

⇨ $A \cap B = \phi$ 이므로 $P(B|A) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$ (조건부 확률의 정의 식)

$\Leftrightarrow \dfrac{0}{P(A)} = 0$ ($A \cap B = \phi$ 이므로) - 당연한 식이 나왔으므로 (참)

ㄷ. (단, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$)이므로 A, B 가 독립이면 반드시 교집합이 있다.

⇨ (단, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$)이므로 $P(A) \times P(B) = P(A \cap B) \neq 0$

A, B 가 배반이면 $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ 이므로 거짓이다. (조건을 만족하는 모든 경우가 다 반례이다.) (거짓)

답 : ②

코칭 당위법은 <ㄱ, ㄴ, ㄷ>의 판단 문제에서 가장 많이 쓰이는 방법이다. (개념의 외연 참조)

코칭 반드시 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$이 나올 것이라고 생각되지만 혹시 $P(A) \times P(B) = 0$이라면
(즉, A와 B중 공사건이 존재한다면) 두 사건의 관계는 반드시 독립이 된다. (개념의 외연 참조)

촌철살인 3. 공식이 아닌 사고방식

<공식>이 아닌 <사고방식>

- 과학에서 <모델링>이 수학에서는 <공리, 법칙>이라고 볼 수 있다.
  예를 들어 뉴턴이 F = ma 라는 위대한 식을 발견한 것이지 더 근본이 되는 식으로부터 유도한 것이 아니다.
  뉴턴 역시 이 식이 어떻게 나왔는지 자신에게 묻지 말고 신에게 물어보라고 했다.
  수학에서 이와 비슷한 것이 <공리, 법칙>이다. 이것은 증명하지 않고 그대로 받아들여 인정한다. 확률에서 나오는 대부분의 식 역시 <공리, 법칙>이라고 볼 수 있다.

- 물론 공리로부터 법칙을 증명할 수 있으나 이것은 <수학자>가 하는 일이지 고등학생은 관심에 둘 필요가 없다.

확률에서 <공식>은 <독립시행의 확률> 뿐

공식이라는 것은 그 자체로 생각의 출발점이 된다.
우리가 이차방정식이 인수분해 안될 때 근의 공식을 사고의 출발점으로 하여 생각하는 것처럼
직각삼각형의 두 변의 길이 가 주어졌을 때 <피타고라스의 정리>를 사고의 출발점으로 생각한다.
공식과 정리를 굳이 구분할 필요는 없다. (관용적으로 붙여진 경우가 많다.)

과거의 확률과 미래의 확률

- 확률이 오로지 미래에 일어날 일만 예측한다고 생각하는 것은 착각이다.
- 모든 재판은 <미래의 증거 : 조건부>들로 <과거의 사건이 발생했을 확률>을 생각하는 것이다. 그래서 모든 판사는 어떤 의미로는 통계학자라고 볼 수 있다.
  또한 <고고학자>나 <역사학자>들도 모두 시간 상 미래의 결과(유물과 유적 등으로)로 과거를 예측하는 일종의 통계학자라고 볼 수 있다.
- 이 단원에서는 <미래의 결과>를 조건부로 하여 <과거의 확률>을 계산하는 <베이즈 정리>를 공부한다.

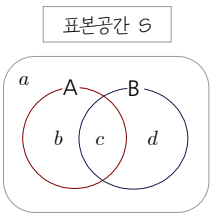
MAP

#1 비율의 마법과 확률의 곱셈정리

- 공식이 아니다. 사고방식이다. 상황을 식으로 만들어 표현한 것뿐이다.

1. 확률의 곱셈정리

1) 상황에 따른 $P(A \cap B)$



- 설명의 편의를 위해 위의 벤다이어그램에서 각 영역에 해당하는 원소의 개수를 a, b, c, d라고 하고 표본공간의 각 근원사건은 일어날 가능성이 같은 정도로 기대된다고 가정한다. (수학적 확률을 구할 수 있는 상황)

⇨ 예를 들어 위의 벤다이어그램에서 $n(S) = a+b+c+d$, $n(A) = b+c$

- 수학적 확률로부터 구해지는 자명한 식 ⇨ $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{c}{a+b+c+d}$

- 조건부 확률 $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$와 $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$으로부터 구해지는 자명한 식

⇨ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \dfrac{b+c}{a+b+c+d} \times \dfrac{c}{b+c} = \dfrac{c}{a+b+c+d}$

$= P(B) \times P(A|B) = \dfrac{c+d}{a+b+c+d} \times \dfrac{c}{c+d} = \dfrac{c}{a+b+c+d}$

- $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$으로 구하든 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$으로 구하든 상관없다.

주어진 상황에 따라서 $P(A \cap B)$를 구하는 한 가지 사고방식을 더 배운 것뿐이다.

$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$의 사고방식 ⇨ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$의 사고방식

2) <독립적 선후시행>에서 선행사건과 후행사건

⇨ 예를 들어 1, 1, 1, 4, 5, 6이 각 면에 하나씩 써져있는 정육면체 주사위를 던진 후,

1, 1, 3, 4가 각 면에 하나씩 써져있는 정사면체 주사위를 던지는 시행은 독립적 선후시행의 상황이라 볼 수 있다.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1
4
5
6

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1, 1	1, 3	1, 4
4, 1	4, 3	4, 4
5, 1	5, 3	5. 4
6, 1	6, 3	6, 4

- 선행사건을 A라 하고, 후행사건을 B라고 하자.

일단, 이해를 위해 <후행사건 B>를 뒤에 던진 주사위가 4가 나오는 사건으로 가정해보자.

이때, 우리는 선행사건 A가 어떻게 정해지든 $P(B|A)$의 확률은 항상 $\frac{1}{4}$임을 알 수 있다.

1, 1	1, 3	1, 4
4, 1	4, 3	4, 4
5, 1	5, 3	5. 4
6, 1	6, 3	6, 4

A_1 : 약수가 1개 인 사건

1, 1	1, 3	1, 4
4, 1	4, 3	4, 4
5, 1	5, 3	5. 4
6, 1	6, 3	6, 4

A_2 : 5이상이 나오는 사건

1, 1	1, 3	1, 4
4, 1	4, 3	4, 4
5, 1	5, 3	5. 4
6, 1	6, 3	6, 4

A_3 : 홀수가 나오는 사건

- 위와 같이 $P(B|A_n)$는 에서 가 차지하는 비율을 구하는 것으로, 모두 $\frac{1}{4}$로 일정하다는 것을 느껴보자.

(단, $n=1,\ 2,\ 3$) 이것은 <선행사건 A>를 위와 다르게 아무렇게나 정해도 마찬가지이다.

또한, $P(B)$는 전체에서 이 차지하는 비율이므로 역시 $\frac{1}{4}$의 값을 가진다. (A와 B는 독립이다.)

독립적 선후시행에서는 <선 시행>에 의해 **분할된 각 영역**이 <후 시행>에 의해 **동일한 비율로 다시 분할**되기 때문에 <선행사건>과 <후행사건>이 어떻게 정해지더라도 항상 <독립>일 수밖에 없다.

두 가지 결론을 기억하고 넘어간다.

첫 번째 결론 독립적 선후시행에서 <선행사건의 확률>을 구할 때는 선시행만 생각하여 확률을 구해도 상관없다.

⇨ 예를 들어 위의 상황에서 $P(A_1) = \frac{3\times4}{6\times4}$로 구하든 $P(A_1) = \frac{3}{6}$으로 구하든 상관없다.

실제상황을 생각해봐도 직관적으로 당연한 것이다. (A_1 : 선 시행에서 약수가 1개 인 사건)

두 번째 결론 독립적 선후시행에서 <선행사건>과 <후행사건>의 관계는 항상 <독립의 관계>에 있다.

위의 설명을 참조하면 <선행사건 A>와 <후행사건 B>를 어떻게 정하든 $P(B|A)$와 $P(B)$가 항상 같다.

실제상황을 생각해보면 <선시행의 결과>에 <후 시행>이 영향을 받지 않으므로 당연한 것이다.

- 사실 이 경우가 <사건의 독립>을 직관적으로 느낄 수 있는 유일한 경우이다. 이 경우를 제외하면 <사건의 독립>은 반드시 수식적인 확인이 있어야만 알 수 있다.

3) <종속적 선후시행>에서 선행사건과 후행사건

- 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 하나씩 써져있는 정육면체 주사위를 던져서
  홀수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 하나씩 써져있는 같은 정육면체 주사위를 던지고
  짝수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4가 각 면에 하나씩 써져있는 정사면체 주사위를 던지는 시행은
  종속적 선후시행의 상황이라고 볼 수 있다.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1
2
3
4
5
6

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2		2, 3		2, 4
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2		4, 3		4, 4
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2		6, 3		6, 4

- 선행사건을 A라 하고, 후행사건을 B라고 하자.
  일단, 이해를 위해 <후행사건 B>를 뒤에 던진 주사위가 4 이상이 나오는 사건으로 가정해보자.
  이때, 우리는 선행사건 A을 어떻게 정하느냐에 따라 $P(B|A)$의 확률이 항상 달라질 수 있음을 알 수 있다.

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2		2, 3		2, 4
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2		4, 3		4, 4
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2		6, 3		6, 4

A_1 : 먼저 던진 주사위가 1이하

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2		2, 3		2, 4
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2		4, 3		4, 4
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2		6, 3		6, 4

A_2 : 먼저 던진 주사위가 2이하

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2		2, 3		2, 4
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2		4, 3		4, 4
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2		6, 3		6, 4

A_3 : 먼저 던진 주사위가 3이하

- 위와 같이 $P(B|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(B|A_2) = \frac{3}{8}$, $P(B|A_3) = \frac{5}{12}$이다. 이때, $P(B)$ 역시 $\frac{3}{8}$이므로 B가 A_2와는 <독립의 관계>에 있지만 A_1, A_3와는 <종속의 관계>에 있음을 알 수 있다.

두 가지 결론을 기억하고 넘어간다.

첫 번째 결론 종속적 선후시행에서도 <선행사건의 확률>을 구할 때는 선시행만 생각하여 확률을 구해도 상관없다.

⇨ 예를 들어 위의 <선 시행>에 의한 영역분할 → <선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할 부분을 참조하면 $P(A_1)$는 표본공간을 6개의 부분으로만 나눈 단순시행으로 생각해서 $\frac{1}{6}$로 구해도 상관없다. (A_2, A_3도 마찬가지다.) 실제상황을 생각해봐도 직관적으로 당연한 것이다.

두 번째 결론 종속적 선후시행에서 <선행사건>과 <후행사건>의 관계는 <독립일수도 있고 종속일수도> 있다.
무조건 종속인 것은 아니다. $P(B|A)$가 우연치 않게 $P(B)$와 같은 값을 가질 수도 있지만, 직관적으로는 <선행사건 A>에 영향을 받아 <후 시행>을 한 것이므로 $P(B|A)$의 사고방식으로 구하는 것이 맞다.

참고 독립적 선후시행이든 종속적 선후시행이든 **<선행사건>이 발생했음을 전제로 <후행사건>이 발생할 확률**을 구하는 것은 <의미상 조건부>에서 이미 다룬 바 있다. 선행사건을 A라 하고, 후행사건을 B라고 할 때, $P(B|A)$은 <조건부 확률의 식>의 느낌이 아닌 <수학적 확률>의 느낌으로 계산된다. (예를 들면 위의 $P(B|A_1) = \frac{3}{6}$)
<조건부 사건>을 분할해야 하는 경우는 반드시 <조건부 확률의 식>을 이용하여 계산해야 하는데
<#2. 곱셈정리와 조건부확률>에서 그 비밀을 밝히도록 한다. (예를 들면 위의 $P(B|A_2)$은 <조건부 + 곱셈정리>를 이용해야 한다.)

2. 독립사건과 종속사건에서 $P(A\cap B)$

1) $P(A\cap B)$의 사고방식

- $P(A\cap B)$에서 두 사건 A와 B가 시간의 순서를 정할 수 없는 사건(단순, 복합시행에서 발생하는 사건)일 때,

⇨ $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식이 효율적인 경우가 많다.

- $P(A\cap B)$에서 두 사건 A와 B가 시간의 순서를 정할 수 있는 사건(선행사건, 후행사건)일 때,

⇨ $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 사고방식이 효율적인 경우가 많다. 문제가 어려워질수록 힘을 발휘한다.

2) 독립사건과 종속사건에서 확률의 곱셈정리

- A와 B가 <선행사건>과 <후행사건>의 관계에 있을 때,

종속적 선후시행에서는 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 사고방식으로 구해지고

독립적 선후시행에서는 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$의 사고방식으로 구해진다.

<종속적 선후시행>에서도 결과적으로 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$인 경우가 있을 수 있겠으나 이것은 중요치 않다.
우리는 $P(A)\times P(B|A)$의 느낌으로 구할 뿐이고 우연치 않게 $P(B|A)$가 $P(B)$와 같은 값을 가진 것뿐이다.

- $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$와 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$는 <독립과 종속>을 판단해서 대입하는 공식이 아닌 $P(A\cap B)$가 구해지는 사고방식일 뿐이다. 또한 $P(B|A)$도 <조건부 확률의 식>을 이용하여 구하는 개념이 아니라 <의미상 조건부>로서 <수학적 확률>의 느낌으로 구해지는 것이다.

- 마지막으로 확률의 곱셈정리를 말로 풀어보자.

종속적 선후시행에서는 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$

⇨ $P(A$와 B가 동시에 발생$) = P($선행사건$)\times P($후행사건 | 선행사건이 일어난 상황$)$

독립적 선후시행에서는 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

⇨ $P(A$와 B가 동시에 발생$) = P($선행사건$)\times P($후행사건$)$

<확률의 곱셈정리>는 <공식>이 아닌 <사고방식>

여기까지의 내용을 요약하면 다음과 같다.

1) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$의 식은 자명한 식이며
2) A와 B가 <선행사건과 후행사건의 관계>에 있을 때 <효율적인 사고방식>이며

독립적 선후시행에서는 <직관적으로 독립을 느끼며> $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$의 사고방식으로 구하고

종속적 선후시행에서는 <직관적으로 종속을 느끼며> $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 사고방식으로 구한다.

(종속적 선후시행에서도 선행사건과 후행사건의 관계가 결과적으로 독립일 수 있다. 하지만, 주어진 상황 속에서는 선행사건의 영향을 받는다고 느껴진다.)

3) 선후시행에서 $P(B|A)$는 <수학적 확률>의 느낌으로 구해지는 <의미상 조건부>이다.

코칭 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$는 <독립과 종속을 판단해서 쓰는 식>이 아니라 <독립과 종속을 판단하기 위해 쓰는 식>
$P(A\cap B)$, $P(A)$, $P(B)$를 각각 따로 구할 수 있는 경우,
$P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$이 성립하면 독립, 성립하지 않으면 종속이라고 판단한다.

059 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 적힌 정육면체 주사위를 1개 던질 때, 홀수가 나오는 사건을 A라 하고 소수가 나오는 사건을 B라고 할 때 A와 B가 동시에 발생할 확률에 대해 다음 물음에 답하여라.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

단순시행 : 두 식 모두 자명하다. 효율성의 차이일 뿐이다.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하면

$n(S) = 6$이고, $n(A\cap B) = 2$ (소수인 홀수는 3과 5만 존재)이므로 $P(A\cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$의 사고방식을 이용하여 계산하면

$P(A) = \dfrac{1}{2}$이고, $P(B|A) = \dfrac{2}{3}$ (홀수 중 소수가 차지하는 비율)이므로 $P(A\cap B) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

또한 $P(B) = \dfrac{1}{2}$이고, $P(A|B) = \dfrac{2}{3}$ (소수 중 홀수가 차지하는 비율)이므로 $P(A\cap B) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

정답은 (1) (2) 모두 $\dfrac{1}{3}$이지만 정답이 중요한 게 아니다.

티칭 정수분류법 (촌철살인 확률과 통계 1 - Part 2. 개념의 외연)

양의 약수가 한 개 ⇨ 1 (혼자)	양의 약수가 홀수 개 ⇨ 완전제곱수
양의 약수가 두 개 ⇨ 소수 (무수히 많다.)	양의 약수가 짝수 개 ⇨ 완전제곱수 이외의 수
양의 약수가 세 개 이상 ⇨ 합성수	

코칭 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$는 공식이 아닌 <사고방식>임과 동시에 <자명한 식>임을 느껴라!!

코칭 보통 시간의 순서가 없는 시행에서는 <수학적 확률>의 사고방식이 효율적이다.

060 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 4개의 공이 주머니에 들어 있다고 하자. 이 주머니에서 두 개의 공을 꺼낼 때, 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 수의 합이 짝수인 사건을 B라고 하자.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

복합시행 : 두 식 모두 자명하다. 효율성의 차이일 뿐이다.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

시행 1, 2, 3, 4이 적힌 크기와 모양이 같은 4개의 공 + 두 개의 공을 꺼낼 때,

⇨ $n(S) = {}_4C_2$

사건 두 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 두 수의 합이 짝수인 사건을 B

사건의 분석 사건 A의 경우 <짝, 짝>과 <홀, 짝>의 두 가지로 상황을 분할 할 수 있다.

사건 B의 경우 <짝, 짝>과 <홀, 홀>의 두 가지로 상황을 분할 할 수 있다.

$P(A\cap B)$는 두 수의 곱이 짝수이면서 두 수의 합도 짝수여야 하므로 <짝, 짝>의 경우에만 성립한다.

⇨ 즉 $P(A\cap B) = \dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \dfrac{1}{6}$

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(B)\times P(A|B)$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

사건의 분석 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$에서 <사건 A>는 <짝, 짝>과 <홀, 짝>의 두 가지로 상황을 분할 할 수 있고

$P(A) = \dfrac{{}_2C_2 + {}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_4C_2} = \dfrac{5}{6}$이다.

그런데 $P(B|A) = \dfrac{1}{5}$(사건 A 중 두 수의 합이 홀수인 경우 B가 차지하는 비율)이므로

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{6}$이다.

정답은 (1) (2) 모두 $\dfrac{1}{6}$이지만 정답이 중요한 게 아니다.

코칭 보통 시간의 순서가 없는 시행에서는 <수학적 확률>의 사고방식이 효율적이다.

061 이해를 위한 예제

유원이가 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위를 하나 던진 후 이어서 현서도 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 한 개 던졌다. 유원이는 짝수가 나오는 사건을 A라 하고 현서가 약수의 개수가 홀수 개인 수가 나오는 사건을 B라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

<독립적 선후시행>에서 선행사건과 후행사건 : 두 식 모두 자명하다. 효율성의 차이일 뿐이다.

(1) $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

시행 유원이가 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위 + 현서도 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위

⇨ $n(S) = 4\times 6$

사건 유원이는 짝수가 나오는 사건을 A, 현서가 약수의 개수가 홀수 개인 수가 나오는 사건을 B

사건의 분석 사건 B의 경우 <완전 제곱수>가 나와야 하므로 1과 4 두 가지가 있다.

⇨ 즉 $P(A\cap B) = \dfrac{2\times 2}{4\times 6} = \dfrac{1}{6}$

(2) $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$의 사고방식을 이용하여 계산하여라.

사건의 분석 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$에서 $P(B|A)$는 $P(B)$라고 자연스럽게 느껴진다.

(현서가 1 또는 4가 나올 확률은 앞에 던진 유원이의 결과에 영향을 받지 않기 때문이다.)

즉, $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$에서 $P(A) = \dfrac{1}{2}$이고 $P(B) = \dfrac{1}{3}$이므로

⇨ $P(A) = P(A)\times P(B) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

정답은 (1) (2) 모두 $\dfrac{1}{6}$이지만 정답이 중요한 게 아니다.

티칭 정수분류법 (촌철살인 확률과 통계 1 - Part 2. 개념의 외연)

양의 약수가 한 개	⇨ 1 (혼자)	양의 약수가 홀수개	⇨ 완전제곱수
양의 약수가 두 개	⇨ 소수 (무수히 많다.)	양의 약수가 짝수개	⇨ 완전제곱수 이외의 수
양의 약수가 세 개 이상	⇨ 합성수		

티칭 A는 시간상 앞에 발생하는 사건이므로 <선행사건>이고, B는 시간상 뒤에 발생하는 사건이므로 <후행사건>이다.

코칭 <종속적 선후시행>도 억지로 표본공간을 조작하면 $P(A\cap B) = \dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}$의 느낌으로 구할 수 있으나, 굳이 그렇게 구해야 할 필요가 없고, 나중에 책의 뒷부분에서 <그럴 수 있음>을 공부하므로 예제는 생략한다.

3. 분할과 상황의 고정

1) $A \cap B$에서 A와 B는 사실 우리가 정하는 것이다.

- 사건 A와 사건 B는 우리가 정하는 것이다. <주어진 사건>을 한 번에 계산하기 어려운 경우에는 상황을 분할해야 하고 이때, <확률의 덧셈정리와 곱셈정리>를 적용하기 위해서는 반드시 <선행사건과 후행사건의 곱사건과 합사건>으로 표현될 수 있도록 분할해야 한다. (웬만하면 **배반**이 되도록 **사건을 분할**한다.)

이러한 <사건의 분석> 과정은 <경우의 수 : 분할적 사고>와 그 맥락을 같이 한다.

⇨ 예를 들어 1부터 6까지의 숫자가 적힌 주사위를 두 번 던지는 시행에서 두 수의 합이 4가 되는 확률을 구하는 경우 <확률의 덧셈정리와 곱셈정리>를 적용하기 위해서 <1 → 3> or <2 → 2> or <3 → 1>과 같이 몇 개의 <선행사건과 후행사건>으로 분할한 후 계산한다. (독립사건이므로 각 <부분이 되는 시행>안에서 확률 값을 구하서 곱한다.)

$$P(\text{합이 } 4) = P(\text{선}1)\cdot P(\text{후}3) + P(\text{선}2)\cdot P(\text{후}2) + P(\text{선}3)\cdot P(\text{후}1)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

⇨ 예를 들어 1부터 6까지의 숫자가 적힌 주사위를 던져서
홀수가 나오면 1, 1, 2, 3이 각 면에 하나씩 적힌 정사면체 주사위를 던지고,
짝수가 나오면 처음과 같은 정육면체 주사위를 던질 때, 이 시행에서 두 수의 합이 4가 되는 확률을 구하는 경우
확률적으로 사고하려면 <1 → 3> or <2 → 2> or <3 → 1>과 같이 분할하여서
<확률의 덧셈정리와 곱셈정리>를 적용해야 한다.

$$P(\text{합이 } 4) = P(\text{선}1)\cdot P(\text{후}3|\text{선}1) + P(\text{선}2)\cdot P(\text{후}2|\text{선}2) + P(\text{선}3)\cdot P(\text{후}1|\text{선}3)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{4} = \frac{11}{72}$$

과 은 <1, 1, 2, 3이 각 면에 하나씩 적힌 정사면체 주사위>를 던지는 상황에서 수학적 확률처럼 계산되지만 <의미상으로는 조건부 확률>이다.

은 <1부터 6까지의 숫자가 적힌 처음과 같은 정육면체 주사위>를 던지는 상황에서 수학적 확률처럼 계산되지만 <의미상으로는 조건부 확률>이다.

<시간의 순서가 있는 시행>에서 <선행사건과 후행사건>은
주어진 사건을 분할하여 우리가 정하는 것이다.

코칭 종속적 선후시행에서도 <수학적 확률>처럼 문제를 풀 수 있을까?
결론부터 말하면, 풀 수 있다. 하지만 굳이 그럴 필요는 없다. 관련 내용은 <개념의 외연>에서 다루기로 한다.

코칭 앞으로 나오는 문제들에서는 항상 몇 개의 <선행사건과 후행사건의 합사건과 곱사건>으로 상황을 분할하여 <사건을 분석>한다. 우리는 이러한 과정에서 선행사건을 사건 A, 후행사건을 사건 B라고 정하게 되는데, 이렇게 사건을 정한 다음에는 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 사고방식을 사용하여 문제를 풀게 된다.
본 책에서 해설을 하는 과정을 보면 $P(A\cap B)$를 $P(A\to B)$와 같이 표시하는 경우가 있는데, 이 둘을 같은 의미로 받아들이도록 한다. 수학적으로는 $P(A\cap B)$의 기호가 옳은 표현이지만, <선행, 후행의 느낌>을 주는 $P(A\to B)$의 기호가 더욱 이해를 돕는다고 생각하기 때문에 대부분 그렇게 서술하였다.

$$P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) \quad \Leftrightarrow \quad P(A\to B) = P(A)\times P(B|A)$$

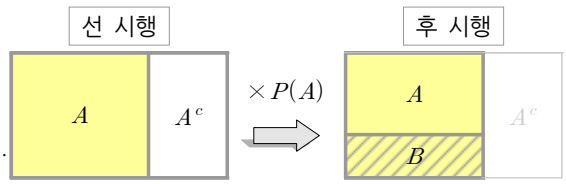
2) 곱하는 순간 상황은 고정 - 경우의 수

- 음악에는 도돌이표가 있다. 이것은 '다시 앞으로 돌아간다.'는 뜻인데 <경우의 수>와 <확률의 연산>에서는 절대 되돌아가면 안 된다. <촌철살인 확률과 통계 1>에서 경우의 수를 구했던 사고방식을 다시 한 번 간단히 복습해보자.
  <+나 ×의 기호>를 쓰는 순간, 우리는 (처음 주어진 상황과 다른) 고정된 상황에서 새로운 경우의 수 문제를 풀게 되었었다.
  만약, 본인 논리의 확신이 없어서 다시 문제의 처음 상황으로 돌아가게 된다면, <원래의 상황>과 <고정된 새로운 상황>이 서로 간섭을 일으키면서 머릿속은 아마 뒤죽박죽이 될 것이다.

전체 상황 : 어떤 기준에 의한 분할		상황 1 : 한 번에 안 세어진다면 다시 분할
상황 1 상황 2 상황 3	⇨	상황 1-1 상황 1-2
분할된 상황의 경우의 수가 같다고 판단할 경우 $n(\text{전체}) = 3\times n(\text{상황}1)$		분할된 상황의 경우의 수가 다르다고 판단할 경우 $n(\text{상황}1) = n(\text{상황}1-1) + n(\text{상황}1-2)$

- 위와 같이 <상황 1>의 경우의 수만을 구하는 상황은 문제에서 <처음에 주어진 상황>과는 다른 <새로운 상황>이다.
  제대로 분할했다는 확신이 있다면 $n(\text{전체}) = 3\times$ 까지 쓴 다음 **<상황 1>에만 집중**해서 문제를 풀어야 한다.

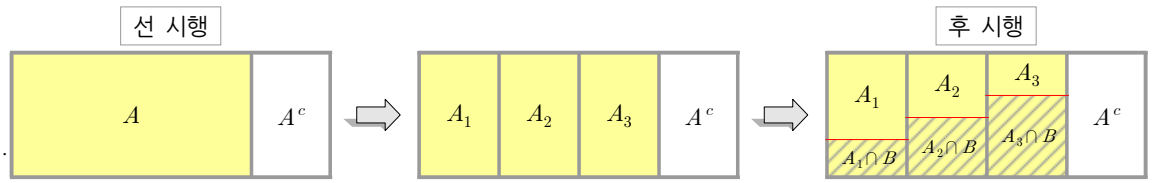
3) 곱하는 순간 상황은 고정 - 확률



- 위와 같은 상황에서 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 의미를 살펴보자.
  $P(A)$를 곱하는 순간, 이미 <선 시행에서 사건 A가 발생했음>이 반영되어 다시 전체시행에서 사건을 고려할 필요가 없다.
  그러므로 문제를 푸는 학생은 $P(A)$를 곱하는 순간, <선 시행의 결과를 사건 A에 해당하는 특정한 상황으로 고정>
  시켜버리고 $P(B|A)$를 구하기만 하면 된다. (바로 다음 장에서 조금 긴 설명이 나올 것이다.)

- 경우의 수가 헷갈리는 것과 마찬가지로 확률에서도 만약 본인 논리의 확신이 없어서 다시 문제의 처음 상황으로 돌아가게 된다면, <원래의 상황>과 <고정된 새로운 상황>이 서로 간섭을 일으키면서 머릿속은 아마 뒤죽박죽이 될 것이다.
  (뒤의 설명과 구체적 예시를 통해 이해하여 보자.)

처음부터 상황을 <정확히 분할>하고 논리의 확신이 서는 순간 <곱하거나 더한다.>



- 위와 같이 주어진 <선행사건 A>에서 <후행사건 B>가 일정한 비율을 차지하지 않을 경우에는
  처음부터 <후행사건 B>까지 고려하여 <선행사건>을 A_1, A_2, A_3 세 가지로 분할해야 한다.

$$P(A\cap B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + P(A_3\cap B)$$
$$= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)$$

1 단계 A ⇨ $(A_1\cap B) \cup (A_2\cap B) \cup (A_3\cap B)$ 교집합이 없도록 상황을 분할한다.

2 단계 $P(A_n)$를 곱하는 순간 <상황을 고정>하고, <의미상 조건부>인 $P(B|A_n)$을 구하여 곱한다.

4. 비율을 느껴라.

1) 직관과 분석 1단계 - 분석

각각의 대하여 같은 확률 1

- <선행사건 A>와 <후행사건 B>에 대하여 $P(A \cap B)$는 <확률의 곱셈정리>의 사고방식으로 구할 수 있다. 이때, <**표본공간의 일부**>를 차지하는 <선행사건 A>가 A_1, A_2, A_3와 같은 일어날 가능성이 동일한 세 근원사건으로 분할된다고 가정해보자. A와 B가 오른쪽 그림처럼 표본공간을 나눈다고 생각하고 상황을 이해해본다.

- <**표본공간의 일부**>인 <선행사건 A>를 분할한 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 나온다면 하나만 구해서 곱한다.
  $P(A \cap B) = 3 \times P(A_1 \cap B) = 3 \times P(A_1) \times P(B|A_1)$
  물론, $P(A \cap B)$를 $P(A) \times P(B|A)$와 같이 한 번에 처리할 수도 있겠지만, $3 \times P(A_1) \times P(B|A_1)$와 같이 조금 더 구체적인 상황을 이용해서 처리할 수도 있다. 둘 다 구체적 연습을 통해 자연스러운 사고방식이 되어야 한다.

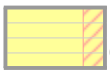
- <선행사건 A>를 분할한 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 발생하면 ⇨ 하나만 구해서 곱한다.
  각각의 부분에 대하여 다른 확률이 발생하면 ⇨ 각각 구해서 더한다.

2) 직관과 분석 2단계 - 직관

각각의 대하여 같은 확률 2

- <표본공간>이 선 시행에 의해 일어날 가능성이 동일한 네 근원사건 A_1, A_2, A_3, A_4로 분할되는 상황을 생각해보자. 이때, <후행사건B>가 분할된 각각의 부분에 대하여 같은 비율을 차지한다고 가정하면 A와 B가 오른쪽 그림처럼 표본공간을 나눈다.

- 오른쪽 그림에서 $P(B)$를 생각해보자. $P(B)$는 $P(B|S)$라고 생각할 수도 있다.
  이때, $P(B|S)$를 $P(B|A_1)$라고 생각해도 상관없다. 이것은 매우 직관적이며 아래 그림을 통해서 쉽게 이해할 수 있다.
  ($P(B|A_1)$은 선행사건이 A_1으로 나왔다고 가정하고, 사건 B가 발생할 확률을 구한 것이다.)

- $P(B|S)$는  에서 가 차지하는 비율을 의미하고,
  $P(B|A_1)$는 에서 가 차지하는 비율을 의미한다. 둘은 당연히 같다.
  <**표본공간의 전체**>를 분할한 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 나온다면 <상황을 고정>한다.

- 물론, <직관과 분석 1단계 - 분석>처럼 $P(A \cap B) = 4 \times P(A_1 \cap B)$으로 표현 하면 수식적으로도 간단히 증명된다.
  위의 가정된 상황에서 $P(A_1) = \frac{1}{4}$이므로

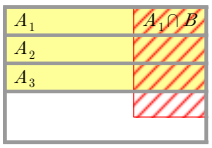
$$P(B) = 4 \times P(A_1 \cap B) = 4 \times P(A_1) \times P(B|A_1) = 4 \times \frac{1}{4} \times P(B|A_1) = P(B|A_1)$$

  하지만, 앞으로는 <확률을 계산할 필요 없이> 이러한 상황을 직관적으로 받아들이고 <상황을 고정>시킬 수 있어야 한다.

3) 직관과 분석 3단계 - 완성

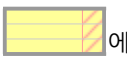
- 다시 처음으로 돌아가 보자.
  <선행사건 A>와 <후행사건 B>에 대하여 $P(A\cap B)$는 <확률의 곱셈정리>의 사고방식으로 구할 수 있다. 이때, <**표본공간의 일부**>를 차지하는 <선행사건 A>가 A_1, A_2, A_3와 같은 세 근원사건으로 분할된다고 가정해보자. 오른쪽 그림은 <비율의 면적화>를 통해서 표본공간을 표현한 것이다.

표본공간



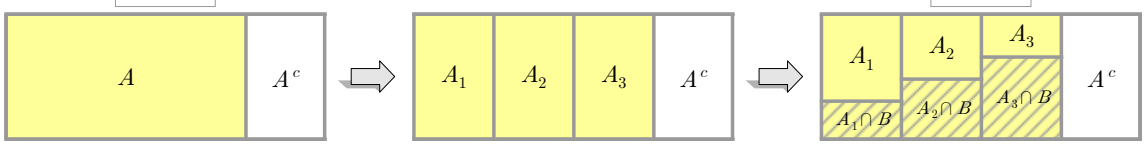
- $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A) = P(A)\times P(B|A_1)$
  물론, $P(A\cap B)$를 $P(A)\times P(B|A)$라고 생각할 수도 있지만 $P(A)\times P(B|A_1)$라고 생각해도 상관없다.

- 이 사고방식은 <직관과 분석 1단계 - 분석>에서 설명했던 $3\times P(A_1\cap B) = 3\times P(A_1)\times P(B|A_1)$보다도 훨씬 효율적인 사고방식이다.
  이 사고방식은 <선 시행의 결과를 구체적으로 고정>한다는 점에서 <시행이 여러 번 있는 복잡한 문제>를 처리할 때 특히 큰 메리트가 있다. 이것에 대한 내용은 <#3. 독립시행의 확률 - 2. 반복시행의 확률>에서 자세히 다룬다.

- $P(B|A)$는  에서 가 차지하는 비율을 의미하고,
  $P(B|A_1)$는 에서 가 차지하는 비율을 의미한다. 둘은 당연히 같다.
  <직관과 분석 2단계 - 직관>에서 설명했던 것처럼 <**표본공간(조건부) 전체**>를 분할한 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 나온다고 판단했으므로 <상황을 고정한 것>이다.
  <#3. 독립시행의 확률 - 2. 반복시행의 확률>에서 묘미를 느낄 수 있다. 이 사고방식은 최고 난이도 확률문제로 나온다.

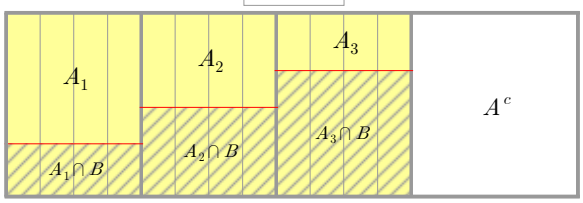
티칭 곱하는 순간, 상황은 고정될 수밖에 없다.

선 시행 후 시행



- 위와 같이 주어진 <선행사건 A>에서 <후행사건 B>가 일정한 비율을 차지하지 않는 경우에는 처음부터 <선행사건>을 A_1, A_2, A_3 세 가지로 분할해야 한다. 이 말은 <새로운 표본공간 : 조건부 A_1, A_2, A_3>는 <선 시행>에서 추가로 분할되더라도 그 안에서 <후행사건B>가 발생하는 비율이 같기 때문에 하나의 사건으로 묶어서 생각했다는 의미를 가진다. 즉, 아래 그림과 같이 표현되는 상황이다.

후 시행



- $P(A\cap B) = P(A_1\cap B) + P(A_2\cap B) + P(A_3\cap B)$
  $= P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2) + P(A_3)\cdot P(B|A_3)$

4) 구체적 상황으로 느껴라.

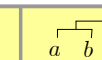
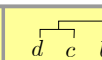
- 서로 승률이 동등한 a, b, c, d 4명을 과 같은 방식으로 임의로 대진시킨 후 경기를 할 때, a가 우승할 확률을 생각해보자.

1 단계 대진표를 작성하는 시행에 따른 표본공간의 분할

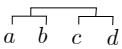
⇨ 대진표를 작성하는 <경우의 수>는 분할의 상황이므로 ${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$ 이지만 확률에서는 $4!$이라고 생각한다.

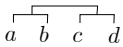
(확률에서 개수를 따질 때는 <같은 것도 다른 것>으로 봐야 틀릴 가능성이 줄어든다.)

표본공간 S (전체면적=1)

		…	
상황 1	상황 2	…	상황 4!

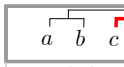
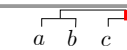
2 단계 <**표본공간 전체**>를 분할한 4!가지 각각에 대하여 a가 우승할 확률이 모두 같음을 이해한다.

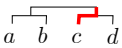
⇨ 상황을  로 고정시키고 생각해도 상관없다.

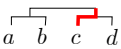
3 단계 이제 문제는  에서 a가 우승할 확률을 구하는 것으로 바뀌었다.

여기에서도 <서로 승률이 동등하다.>라는 조건 때문에 <상황 1-1>과 <상황 1-2> 각각에 대하여 a가 우승할 확률이 모두 같음을 이해한다.

새로운 표본공간 S (전체면적=1)

	
상황 1-1	상황 1-2

⇨ 상황을  로 고정시키고 생각해도 상관없다.

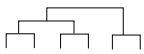
결론 이제 문제는  에서 a가 우승할 확률을 구하는 것으로 바뀌었다.

<a가 이기고 → 또 a가 이길 확률>은 너무 간단한 상황으로 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$이다.

앞에서 진행한 1 단계에서 3 단계까지는 모두 <직관>으로 간단히 처리할 수 있어야 한다.

⇨ <대진표가 어떻게 짜여도 **상관이 없고** - 각각의 대진표에 대하여 a가 우승할 확률은 같음 - 하나로 고정>,

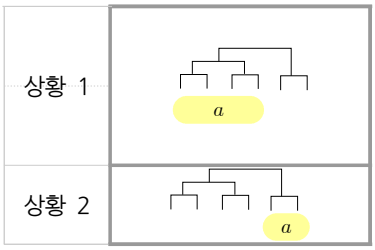
<c와 d중 누가 이겨도 **상관이 없으니** - 누가 이기든 a가 우승할 확률은 같음 - 하나로 고정>, a가 우승할 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

- 서로 승률이 동등한 a, b, c, d, e, f 6명을  과 같은 방식으로 임의로 대진시킨 후 경기를 할 때, a가 우승할 확률을 생각해보자.

1 단계 대진표를 작성하는 시행에 따른 표본공간의 분할

⇨ a의 위치에 따라 크게 2개의 영역을 2:1의 비율로 나눌 수 있다.

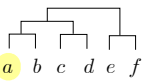
표본공간 (전체면적=1)



- 결국 표본공간이 <6!가지로 분할>된다고 생각한다면
  ⇨ 상황1에 해당하는 경우의 수는 $4\times5!$이고
  ⇨ 상황2에 해당하는 경우의 수는 $2\times5!$이므로 2:1의 비율을 만족한다.
- 왼쪽의 <2가지 상황>에서 a가 이길 확률은 <각각에 대해서 다르므로>
  a가 우승하는 경우를 <상황 1처럼 대진 → 우승>과
  <상황 2처럼 대진 → 우승>으로 분할한다.

2 단계 $P(\text{상황1처럼 대진} \to a\text{우승}) = P(\text{상황1처럼 대진})\times P(a\text{우승}\,|\,\text{상황1처럼 대진})$

$$= \frac{2}{3}\times P(a\text{우승}\,|\,\text{상황1처럼 대진}) = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

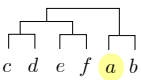
$\frac{2}{3}$를 곱하는 순간, 상황을 <상황 1>에 해당하는 특정 경우인  으로 고정하고 생각한다.

($4\times5!$가지 각각에 대해서는 a가 우승할 확률이 모두 같음을 느낄 수 있다.)

또한, <c, d, e, f의 승패>에 상관없이 $P(a\text{우승}\,|\,\text{상황1처럼 대진})$은 a가 세 번 연속으로 이길 확률이므로 $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$이다. ($c$, d, e, f의 승패 결과에 따라 상황을 4가지로 분할해도 a가 우승할 확률은 모두 같음을 느낄 수 있다.)

$P(\text{상황2처럼 대진} \to a\text{우승}) = P(\text{상황2처럼 대진})\times P(a\text{우승}\,|\,\text{상황2처럼 대진})$

$$= \frac{1}{3}\times P(a\text{우승}\,|\,\text{상황2처럼 대진}) = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{3}$를 곱하는 순간, 상황을 <상황 2>에 해당하는 특정 경우인  으로 고정하고 생각한다.

$P(a\text{우승}\,|\,\text{상황2처럼 대진})$인 경우에는 a가 두 번만 이기면 우승이므로

$P(a\text{우승}\,|\,\text{상황2처럼 대진}) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$이다.

결론 $P(a\text{우승}) = P(\text{상황1처럼 대진} \to a\text{우승}) + P(\text{상황2처럼 대진} \to a\text{우승})$

$$= \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

티칭 사실 위에서 직관을 발휘하면 6명 모두 <동등한 상황>이었으므로 우승할 확률은 각각 대상이 모두 $\frac{1}{6}$이다.

즉, 그래서 a가 우승할 확률도 $\frac{1}{6}$이다.

코칭 위의 해설에서 ∩기호 대신 →기호를 썼으나 수학적으로는 ∩이 맞다.

코칭 곱셈정리를 정복하는 순서

- 먼저 <확률의 곱셈정리>는 <자명한 식>이며 특정한 상황에서 $P(A\cap B)$를 구하는 <사고방식>임을 이해했다.
  (보통 선후시행에서 효율적이며 독립과 종속은 판단하는 것이 아니라 자연스럽게 느껴지는 느낌이다.)
  이때 나오는 <조건부 확률>은 <수학적 확률의 느낌>으로 계산되는 <의미상 조건부>임을 이해했다.

- 주어진 상황을 <선행사건과 후행사건>의 <합사건과 곱사건>으로 분할한다. (이것이 가장 중요하며 문제를 푸는 출발점이다.)

- 곱셈정리를 적용할 때, <선행사건>이 일어날 확률을 곱했다면, <바뀐 상황>에서 <후행사건>이 일어날 확률을 구해야 한다. 곱하는 순간 <선행사건에 해당하는 구체적 상황>으로 상황을 고정시키고 생각한다.
  (그리고 고정시키기 전 상황으로 되돌아가 다시 생각하지 않도록 처음부터 확신을 가지고 분할해야 한다.)

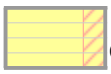
티칭 가장 많이 하는 착각 ⇨ $P(A\cap B)$ VS $P(B|A)$

- 선행사건을 사건 A, 후행사건을 사건 B라고 가정해보자.

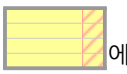
- 식으로 나오면 당연해 보이는 내용이 문제에서 <상황>으로 주어지는 경우에는 착각을 불러일으킨다.
  의미를 풀어보면 $P(A\cap B)$는 <사건 A가 발생하고 이어서 사건 B도 발생할 확률>이라는 뜻이고,
  $P(B|A)$는 <사건 A가 이미 발생하였을 때 사건 B가 발생할 확률>이라는 뜻이다.

- <표본공간>이 선 시행에 의해 일어날 가능성이 동일한 네 근원사건 A_1, A_2, A_3, A_4로 분할되는 상황을 생각해보자. 또한, <후행사건 B>가 분할된 각각의 부분에 대하여 같은 비율을 차지한다고 가정하면 A와 B가 아래의 그림처럼 표본공간을 나눈다.

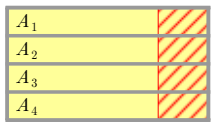
  아래 그림에서 $P(B) = P(B|S) = P(B|A_1) = 4\times P(A_1\cap B)$임을 명확하게 이해할 수 있다.

  $P(B|S)$는  에서 가 차지하는 비율을 의미하고,

  $P(B|A_1)$는 에서 가 차지하는 비율을 의미하며,

  $P(A_1\cap B)$은  에서 가 차지하는 비율을 의미한다.

  표본공간

- 착각을 하지 않는 방법은 <개념을 더 확실하게 여러 번 인지>하는 것 밖에 없다.

062 이해를 위한 예제

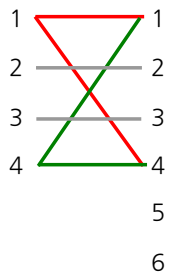
유원이가 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위를 하나 던진 후 이어서 현서도 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 한 개 던졌다. 이때 나온 두 수의 곱의 약수의 개수가 홀수개가 나올 확률을 구하시오

<독립적 선후시행> 사건의 분할 – 사건정하기, 각각에 대하여 같은 확률

시행 유원이가 1, 2, 3, 4가 적힌 정사면체 주사위를 하나 던진 후 이어서 현서도 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 정육면체 주사위를 한 개 던졌다. ⇨ 독립적 선후시행이다.

사건 나온 두 수의 곱의 약수의 개수가 홀수개

사건의 분석 약수의 개수가 홀수 개인 상황은 완전제곱수가 나오는 상황이다.
즉, 두 수를 곱해서 완전제곱수가 나오기 위해서는 〈수 → 같은 수〉가 나오거나 〈완전제곱수 → 완전제곱수〉가 나올 때 가능하다.
- 그러나 이 분할된 두 가지 상황은 〈배반〉의 관계가 아니다. 예컨대 〈4 → 4〉인 상황은 두 가지 상황에 모두 포함된다. 이런 경우 보통은 오른쪽과 같이 수형도로 일일이 해보는 것이 바람직하다.
(물론 일일이 해보기 너무 많다면 집합의 연산을 이용할 수도 있다.)



⇨ 즉, 주어진 사건은 〈1→1〉 ∪ 〈1→4〉 ∪ 〈2→2〉 ∪ 〈3→3〉 ∪ 〈4→1〉 ∪ 〈4→4〉으로 분할되고,
분할된 각각에 대하여 같은 확률이 나오므로 $P(\text{곱의 약수의 개수 홀수개}) = 6 \times P(1 \to 1) = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6}$

즉, 정답은 $\frac{1}{4}$

코칭 곱셈정리의 사고방식 복습
- 분할할 때는 〈배반〉이 되도록 분할하는 것이 좋다.
- 분할된 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 나오면 하나만 구해서 곱한다.
- 독립적 선후시행에서 선행사건과 후행사건은 서로 독립이다. (직관적으로 느껴지는 유일한 독립사건)

코칭 위의 해설에서 ∩기호 대신 →기호를 썼으나, 수학적으로는 ∩이 맞다.

063 이해를 위한 예제

1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니가 있다. 지용이가 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 짝수가 나오면 형원이는 1, 2, 3이 적힌 크기와 모양이 같은 공 3개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고, 홀수의 눈이 나오면 형원이는 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낸다. 지용이가 꺼낸 공이 2 이하의 수이고, 형원이가 꺼낸 공도 2이하 수가 나올 확률을 구하시오.

<종속적 선후시행> 사건의 분할 – 덧셈정리와 곱셈정리

시행 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니가 있다. 지용이가 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 짝수가 나오면 형원이는 1, 2, 3이 적힌 크기와 모양이 같은 공 3개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고, 홀수의 눈이 나오면 형원이는 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 공 4개가 들어있는 주머니에서 한 개의 공을 꺼낸다. ⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행> 자체가 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

사건 지용이가 꺼낸 공이 2 이하의 수이고, 형원이가 꺼낸 공도 2이하 수가 나올 확률

사건의 분석 즉, 각각 2이하의 수가 나오려면 <지용 1 → 형원 2이하>가 나오거나 <지용 2 → 형원 2이하>가 나올 때 가능하다. 이 분할된 두 가지 상황은 <배반>의 관계이므로 각각 구해서 더한다.

⇨ $P(\text{둘 다 2이하}) = P(\text{지용1} \to \text{형원2이하}) + P(\text{지용2} \to \text{형원2이하})$

$= P(\text{지용1}) \times P(\text{형원2이하} \mid \text{지용1}) + P(\text{지용2}) \times P(\text{형원2이하} \mid \text{지용2})$

$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{24}$

정답은 $\frac{7}{24}$

코칭 곱셈정리의 사고방식 복습

- 분할할 때는 <배반>이 되도록 분할하는 것이 좋다.
- 분할된 각각의 부분에 대하여 같은 확률이 나온다는 확신이 없다면 (결과적으로는 같은 확률이 나온다고 하더라도) 하나씩 구해서 더한다.
- 종속적 선후시행에서 선행사건과 후행사건은 서로 종속이라고 생각하고 자연스럽게 곱한다.
  (결과적으로는 독립이라고 하더라도 종속이라고 생각하고 자연스럽게 <의미상 조건부> 확률을 구하여 곱한다.)

코칭 위의 해설에서 ∩기호 대신 →기호를 썼으나, 수학적으로는 ∩이 맞다.

064 이해를 위한 예제 2009. 7. 가형(75%), 나형(62%). 12번. 4점

다음 조건을 만족하는 상자가 $n(n \geq 2)$개 있다. n개의 상자에서 임의로 한 상자를 택하여 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, 모두 흰 구슬이 나올 확률을 P_n이라 하자. P_{10}의 값은?

① $\frac{19}{60}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{7}{20}$ ④ $\frac{11}{30}$ ⑤ $\frac{23}{60}$

[상자1] 흰 구슬 1개, 검은 구슬 $n-1$개
[상자2] 흰 구슬 2개, 검은 구슬 $n-2$개
[상자3] 흰 구슬 3개, 검은 구슬 $n-3$개
⋮
[상자n] 흰 구슬 n개, 검은 구슬 0개

<종속적 선후시행> 분할과 상황의 고정

시행 n개의 상자에서 임의로 한 상자를 택하여 2개의 구슬을 동시에 꺼낼 때,
- 어떤 상자를 꺼내느냐에 따라서 <후 시행 : 2개의 구슬을 꺼내는 시행의 표본공간>이 달라지므로 종속적 선후시행이다.

사건 모두 흰 구슬이 나올 확률을 P_n, P_{10}의 값

사건의 분석 2개의 구슬이 모두 흰 공이 나오는 사건은 다음과 같이 분할된다. .

$$\mathrm{P}_{10} = P(\text{상자}2 \to \text{흰}2\text{개}) + P(\text{상자}3 \to \text{흰}2\text{개}) + \cdots + P(\text{상자}10 \to \text{흰}2\text{개})$$

$$= P(\text{상자}2) \times P(\text{흰}2\text{개} \mid \text{상자}2) + P(\text{상자}3) \times P(\text{흰}2\text{개} \mid \text{상자}3) \cdots + P(\text{상자}10) \times P(\text{흰}10\text{개} \mid \text{상자}10)$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2} + \cdots + \frac{1}{10} \cdot \frac{{}_{10}C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{{}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + {}_{10}C_2}{10 \times {}_{10}C_2}$$

(상자1이 선택될 경우 흰 구슬이 2개 나오는 경우는 존재할 수 없다.)

여기에서 ${}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + {}_{10}C_2$은 <촌철살인 확률과 통계 1 - Part6 조합의 연속 합>에서 공부한 파스칼 삼각형이다.

$${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 = {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 = {}_{11}C_3$$

$${}_4C_3$$

$${}_5C_3 \quad \cdots$$

이므로 $\frac{{}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + {}_{10}C_2}{10 \times {}_{10}C_2} = \frac{{}_{11}C_3}{10 \times {}_{10}C_2} = \frac{11}{30}$이다.

정답은 ④

코칭 위의 해설에서 ∩기호 대신 →기호를 썼으나 수학적으로는 ∩이 맞다.
- 이제 이 내용은 그만 언급하기로 한다.

065 이해를 위한 예제 2016. 수능완성

1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 20장의 카드가 있다. 일렬로 나열된 카드의 제일 왼쪽에 놓인 카드부터 제일 오른쪽에 놓인 카드까지 인접한 두 카드를 차례대로 비교하여 두 카드 중 숫자가 큰 카드가 오른쪽에 놓이도록 정리한다. 카드를 임의로 나열하고 위의 과정을 한 번 시행하였을 때, 제일 왼쪽에서부터 10번째 자리에 놓여 있던 카드가 제일 왼쪽에서부터 14번째 자리에 놓이게 될 확률은?

① $\frac{1}{210}$ ② $\frac{1}{182}$ ③ $\frac{1}{105}$ ④ $\frac{1}{91}$ ⑤ $\frac{1}{70}$

<사건의 분할> 각각에 대하여 같은 확률, 상황의 고정

시행 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 20장의 카드가 있다. 일렬로 나열된 카드의 제일 왼쪽에 놓인 카드부터 제일 오른쪽에 놓인 카드까지 인접한 두 카드를 차례대로 비교하여 두 카드 중 숫자가 큰 카드가 오른쪽에 놓이도록 정리 ⇨ 20장의 카드의 자리만 결정하면 <정리>하는 과정에서 카드의 위치는 자동으로 결정된다.

즉, $n(S) = 20!$ - <복합시행>으로 본 것이지만 시행의 종류를 굳이 구분할 필요는 없다.

사건 제일 왼쪽에서부터 10번째 자리에 놓여 있던 카드가 제일 왼쪽에서부터 14번째 자리에 놓이게 될 확률

⇨ 이 경우의 수를 모두 따지는 것이 상당히 복잡하다.

사건의 분석 10번째 카드가 14번째에서 멈추려면 <10번째 카드>는 <1 ~ 9번째 카드>와 <11 ~ 14번째 카드>보다는 크고 <15번째 카드>보다는 작아야 한다. 이 조건만 만족한다면 나머지 카드의 배열은 **상관없다.**

('상관없다.'는 말이 '상황을 고정해도 된다.'의 힌트가 된다.)

- 왼쪽의 15개의 자리에 오는 <카드의 종류>를 기준으로 <표본공간 : 20!>을 분할한다.

표본공간을 ${}_{20}C_{15}$가지의 상황으로 분할할 경우 분할된 각각에 대하여 <문제의 사건>이 발생할 비율은 동일하다.

	표본공간 S : 20!가지	
상황 1	1, 2, ⋯, 15가 뽑힘	
상황 2		
⋮	⋮	
상황 ${}_{20}C_{15}$		

상황의 고정 ⇨ 표본공간 전체를 분할한 각각에 대하여 같은 확률

상황 1 : 새로운 표본공간 : $15! \times 5!$

20!의 부분집합으로서 <상황 1>이므로 <상황 1>은 다시 $15! \times 5!$가지로 동등하게 분할된다.

- 예를 들어 ${}_{20}C_{15}$가지 중 <상황 1>과 같이 왼쪽에서 15번째까지 들어갈 숫자가 <1, 2, ⋯, 15>인 경우 <문제의 사건>에 해당하는 상황은 <10번째 : 14>이고, <15번째 : 15>인 상황이다. 즉, 뽑힌 15개의 숫자 중 가장 큰 수와 두 번째로 큰 수의 위치는 정해진다.

또 하나의 예를 들면 왼쪽에서 15번째까지 들어갈 숫자가 <1, 2, ⋯, 10과 14, ⋯, 17, 18>인 경우 <문제의 사건>에 해당하는 상황은 <10번째 : 17>이고, <15번째 : 18>인 상황이다. 역시 뽑힌 15개의 숫자 중 가장 큰 수와 두 번째로 큰 수의 위치는 정해진다.

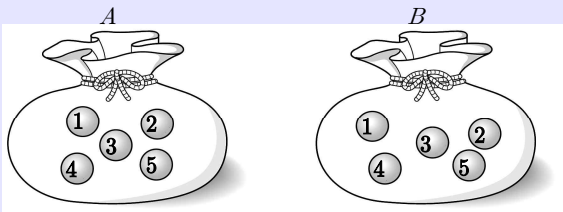
- <원래 표본공간 : 20!>중에서 <상황 1>이 차지하는 경우는 $15! \times 5!$이다. 왼쪽에서 15개에 들어갈 숫자는 정해지더라도 20!안에서 생각해야하므로 15개의 숫자와 5개의 숫자를 각각 배열해야 한다.
- 고정된 <상황 1>안에서 n(문제의 사건)은 <10번째 : 14>와 <15번째 : 15>로 정해지는 상황의 모든 경우의 수이므로 $13! \times 5!$이다.

$$P(\text{문제의 사건}) = P(\text{문제의 사건} \mid \text{상황 1}) = \frac{13! \times 5!}{15! \times 5!} = \frac{1}{210}$$ 정답은 ①

코칭 상황의 고정 - 위의 모든 상황이 직관적으로 해결된다면 <확률의 본질>을 어느 정도 이해했다고 생각해도 좋다.

066 이해를 위한 예제 2008. 11. 가형(58%), 나형(44%). 16번. 4점

주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나 씩 적혀있는 다섯 개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서 각자 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인 한 후 다시 넣지 않는다. 이와 같은 시행을 반복할 때, 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률은?



① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{7}{20}$

시행 구슬을 임의로 한 개씩 꺼내어 두 구슬에 적혀 있는 숫자를 확인 한 후 다시 넣지 않는다.

- 꺼낸 공을 다시 넣지 않으므로 종속적 선후시행의 상황이다.

사건 첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀있는 숫자가 서로 다르고, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률

사건의 분석 P(첫 번째 다름 → 두 번째 같음) 즉, P(첫 번째 다름 ∩ 두 번째 같음)을 구하는 것이다.

표본공간 S

A-1, B-2
A-1, B-3
⋮
A-5, B-4
A-1, B-1
⋮

상황의 고정 ⇨ 선행사건이 발생할 확률 P(첫 번째 다름)을 곱하는 순간 상황은 고정된다.

조건부 : 새로운 표본공간

A-1, B-2	<상황 1>
A-1, B-3	<상황 2>
⋮	
A-5, B-4	<상황 20>

- 즉, P(첫 번째 다름 → 두 번째 같음) $= P$(첫 번째 다름) $\times P$(두 번째 같음 | 첫 번째 다름)

$= \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 5} \times P$(두 번째 같음 | 첫 번째 다름)

- <상황 1>과 <상황 2>를 관찰해보자.

상황 1 :

A	B
~~1~~	1
2	~~2~~
3	3
4	4
5	5

상황 2 :

A	B
~~1~~	1
2	2
3	~~3~~
4	4
5	5

<상황 1>과 <상황 2>만 관찰하지만 <20가지 모든 상황>은 각각의 주머니에 남은 4개의 공 중에서 <같은 공>이 3쌍이 있다는 점에서 <후행사건 - 두 번째 꺼낸 공이 같은 경우>이 발생할 확률이 모두 같다는 사실을 알 수 있다.

- 결국 **<표본공간 전체 - 조건부>**를 분할한 각각에 대하여 우리가 구하고자 하는 사건이 같은 비율을 차지하므로 상황을 고정하고 생각해도 된다. (이 모든 부분이 나중에는 당연함을 느끼며 직관에 의해 이루어지길 바란다.)

⇨ 즉, P(두 번째 같음 | 첫 번째 다름) $= P$(두 번째 같음 | 1, 2가 뽑힘)라고 생각하고 문제를 푼다.

P(두 번째 같음 | 1, 2가 뽑힘)은 $\frac{3}{4 \times 4}$이다. (위의 표 중 <상황 1>에서 한 개씩 뽑을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 4×4이고, 이 중에서 같은 수가 나오는 경우는 (3,3) (4,4) (5,5) 3가지뿐이다.)

- P(첫 번째 다름 → 두 번째 같음) $= \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 5} \times P$(두 번째 같음 | 첫 번째 다름)

$= \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 5} \times P$(두 번째 같음 | 1, 2가 뽑힘) $= \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 5} \times \frac{3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{20}$이다.

정답은 ①

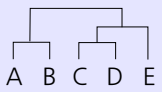
코칭 직관을 최대한 글과 그림으로 풀어서 설명하고자 해서 풀이가 길어졌다. 하지만, 어느 정도 실력이 생겼다면 이 정도의 문제는 단 한 줄의 풀이도 필요하지 않다.

코칭 곱셈정리의 사고방식 복습

- 먼저 <확률의 곱셈정리>는 <자명한 식>이며 특정한 상황에서 $P(A \cap B)$를 구하는 <사고방식>이다.
  이 문제와 같이 연속적으로 발생하는 사건에 대하여 곱하는 것이 자연스럽게 느껴져야 한다.
  뒤에 곱한 <조건부 확률> 역시 <수학적 확률의 느낌>으로 자연스럽게 계산되는 <의미상 조건부>이다.
- 곱하는 순간, <선행사건에 해당하는 구체적 상황>으로 상황을 고정시키고 생각한다.

067 이해를 위한 예제

다음 조건을 만족하는 토너먼트 대진표에서 C가 우승할 확률을 구하되 C를 제외한 남은 인원들의 승부의 관계에 따라 C가 우승할 확률이 어떻게 변하는지 혹은 변하지 않는다면 왜 변하지 않는지 서술하시오.



(1) 각 팀의 승률이 모두 같을 때, C가 우승할 확률

(2) A와 B는 승률이 2 : 1이고 나머지는 모두 승률이 같을 때, C가 우승할 확률

(3) C가 A에게 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고 B에게 이길 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, C가 우승할 확률 (단, 나머지는 모두 승률이 같다.)

(1) 각 팀의 승률이 모두 같을 때, C가 우승할 확률

⇨ A, B 누가 이기든 상관없이 (승부가 결정되는 모든 경우에 대해서 C가 우승할 확률이 같으므로)

C가 세 번 연속으로 이기면 된다. 즉, $P(C\text{우승}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(2) A와 B는 승률이 2 : 1이고 나머지는 모두 승률이 같을 때, C가 우승할 확률

⇨ 오른쪽 표와 같이 A가 이길 확률과 B가 이길 확률이 서로 다르지만
<A가 이기는 경우>와 <B가 이기는 경우> 각각에 대해서 C가 우승할 확률이 같다.
결국 누가 이기든 C가 우승할 확률에 영향을 주지 않으므로 상황을 고정해도 된다.

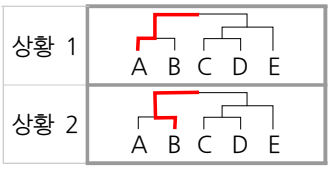
표본공간 S
A가 이김
B가 이김

즉, C가 우승하려면 C가 세 번 연속으로 이기면 된다. 그러므로 $P(C\text{우승}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

(3) C가 A에게 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고 B에게 이길 확률은 $\frac{2}{3}$일 때, C가 우승할 확률 (단, 나머지는 모두 승률이 같다.)

⇨ <A가 이기는 경우>와 <B가 이기는 경우> 각각에 대해서 C가 우승할 확률이 다르기 때문에 상황을 분할한다.

표본공간 (전체면적=1)



$$P(C\text{우승}) = P(\text{상황}1) \cdot P(C\text{우승} \mid \text{상황}1) + P(\text{상황}2) \cdot P(C\text{우승} \mid \text{상황}2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P(C\text{우승} \mid \text{상황}1) + \frac{1}{2} \cdot P(C\text{우승} \mid \text{상황}2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{7}{48}$$

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{7}{48}$

코칭 촌철살인 확률과 통계 1에서도 강조했듯이 <구체적 경험> 없이는 <직관>도 없다.
단, 1%의 의구심도 없도록 명확히 이해하라. 이것이 안 된다면 일단 메모라도 해 두어라. 후에 명확히 이해 갈 것.
정확하게 하는 것이 가장 빠른 것이다. 정답은 맞추는 것은 별로 중요하지 않다.

5. 확률조건에서 두 사건의 독립과 종속

1) 독립이라는 뉘앙스

- 확률과 통계는 실생활적인 학문이다. 누구나 직관적으로 느낄 수 있는 상황에 대해서는 <관용>이라는 것이 있을 수 있다. 아래와 같이 조건이 실생활적으로 주어진 경우에는 사건이 서로 독립인지 종속인지 생략하는 경우도 종종 있다. 종속인 상황과 비교하면 쉽게 이해할 수 있다.

- 조건 1 : 비가 올 확률이 $\frac{1}{3}$이다. ⇨ $P(\text{비}\bigcirc) = \frac{1}{3}$ 자연스럽게 $P(\text{비}\times) = \frac{2}{3}$

  이 조건의 뉘앙스에서 비 올 확률이 항상 $\frac{1}{3}$으로 일정하다는 것을 암시하므로 오늘 비가 올 확률은 전날의 날씨에 영향을 받지 않는다. 즉, 전날의 날씨와 다음 날의 날씨는 독립이라는 것을 암시한다.

- 조건 2 : 승부차기에서 골을 넣을 확률이 $\frac{2}{5}$이다. ⇨ $P(\text{골}) = \frac{2}{5}$ 자연스럽게 $P(\text{노골}) = \frac{3}{5}$

  이 조건의 뉘앙스에서 골을 넣을 확률은 항상 $\frac{2}{5}$로 일정하다는 것을 암시하므로 우리 팀의 득점은 상대의 팀의 득점에 영향을 받지 않는다는 것을 알 수 있다. 상대팀의 득점 여부와 우리 팀의 득점 여부는 독립이이라는 것을 암시한다.

2) 종속을 표현하는 방법

- 종속인 사건에 대해 확률이 조건으로 주어진 경우에는 종속인 것이 명확하게 보인다. 흐린 부분은 자연스럽게 우리가 찾아야 하는 확률 값이다.

- 조건 1 : 비가 온 다음날 비가 올 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 비 오지 않은 다음 날 비가 올 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

  비○ → 비○ $P(\text{비}\bigcirc|\text{비}\bigcirc) = \frac{1}{3}$
  비○ → 비× $P(\text{비}\times|\text{비}\bigcirc) = \frac{2}{3}$

  비× → 비○ $P(\text{비}\bigcirc|\text{비}\times) = \frac{1}{5}$
  비× → 비× $P(\text{비}\times|\text{비}\times) = \frac{4}{5}$

  전날의 날씨상태에 따라 비 올 확률이 변하므로 종속이다.

- 조건 2 : 승부차기에서 상대가 골을 넣으면 우리가 골을 넣을 확률이 $\frac{1}{5}$이 되고,

  상대가 못 넣으면 우리가 넣을 확률이 $\frac{5}{6}$가 된다.

  골 → 골 $P(\text{골}|\text{골}) = \frac{1}{5}$
  골 → 노골 $P(\text{노골}|\text{골}) = \frac{4}{5}$

  노골 → 골 $P(\text{골}|\text{노골}) = \frac{5}{6}$
  노골 → 노골 $P(\text{노골}|\text{노골}) = \frac{1}{6}$

  상대의 결과에 따라 골을 넣을 확률이 변하므로 종속이다.

3) 애매한 상황 - 문맥상 파악

- 범위를 넓혀서 문제집의 문제까지 포함하면 일정한 원칙이 없다.
  <독립>이라는 조건이 주어지지 않고 $P(A)$와 $P(B)$가 각각 주어진 경우에는 출제자의 의도를 파악하는 것이 가장 확실하다. $P(A\cap B)$를 구해야 한다면 주어진 두 사건을 <독립>이라고 생각하고 두 확률 값을 곱한다.

- $P(A\cap B)$가 주어진 경우에는 굳이 <독립이나 종속>을 표현할 필요가 없고, <계산문제가 아닌 판단문제>라면 절대로 독립이라고 속단해서는 안 된다.

- $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$이라고 할 때, A와 B가 동시에 발생할 확률?
  위와 같이 확률 조건이 주어진 상태에서 상황에 대한 언급 없이, 수식적인 조건만을 준 경우에는 보통 <독립>이라는 조건을 같이 준다. 하지만, 생략하는 경우도 있으므로 (이의를 제기할 수 있는 부분이다.)
  이 부분에 대해 너무 고민하다가 시간을 빼앗기는 일은 없도록 하자. $P(A\cap B) = P(A)\times P(B) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

- 어떤 문제를 A가 풀 확률은 0.7, B가 풀 확률은 0.6이고 A와 B가 모두 풀 확률은 0.4이다. 이때, A와 B 둘 중 적어도 한 사람이 문제를 풀 확률을 구하여라.
  이 문제는 독립의 뉘앙스로 시작되고 있지만, 결국 $P(A\cap B) = 0.4$라고 제시하였고 $P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$이므로 두 사건은 종속이다. 문제는 단지 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$라는 간단한 덧셈정리를 물어보고 싶은 것뿐이므로 너무 심오하게 접근할 필요는 없다.

- 결국, $P(A\cap B)$를 구하는 문제 중에서 확률을 조건으로 주는 경우에는 두 사건이 독립이라는 조건을 생략하는 경우가 있다는 것을 염두에 둔다. <$P(A\cap B)$를 구하기 위해 $P(A)\times P(B)$를 이용해야만 한다면 독립>이라고 생각하고 두 확률을 그냥 곱해야 하는 경우도 있다는 것을 받아들이면 그만이다.

티칭 상황조건과 확률조건 (복습)

- <상황조건>이란 우리가 개수를 셀 수 있는 상황이 주어진 상태에서 확률을 물어보는 문제를 말한다.
- <확률조건>이란 (개수를 셀 수 있는) 상황은 생략되고 어떤 사건이 일어날 확률 자체를 조건으로 주는 문제를 말한다.
  이 두 조건은 각각 물어보고자 하는 바가 다르다.

⇨ 예를 들어 <수열의 극한>에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n}$처럼 a_n의 식을 구체적으로 주는 경우는 구체적인 상황에서 수열의 극한의 계산을 이해하고 답을 낼 수 있냐고 물어보는 것이고 계산의 논리를 통해서 $\frac{1}{2}$이라는 답을 내면 그만이다.

반면에 $\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{2}$과 같이 ($a_n$의 식을 구체적으로 주지 않고) 결과만 알려주고, 결과를 토대로 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{a_n+1}$과 같은 다른 극한의 극한값을 계산할 수 있는지를 물어보는 문제는 조금 더 본질적인 <극한의 성질>을 물어본 것이다.
(a_n이 어떤 식인지 궁금할 수도 있지만 문제를 풀기 위해 굳이 a_n을 알아야 할 필요는 없다.)

이와 같이 확률에서도 <상황조건>이 나오면 <수열의 극한에서 구체적인 식을 준 것과 같이> 구체적인 상황에서 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 확률을 구하면 되는 것이고, <확률조건>이 나오면 <수열의 극한에서 결과만 준 것과 같이> 그 확률을 연산하는 이론적 토대를 통해서 다른 확률의 값을 구하면 되는 것이다.

068 이해를 위한 예제 2010. 11. 가형(84%), 나형(72%). 7번. 3점

어느 디자인 공모 대회에 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사위원 점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은?

항목 / 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{11}{36}$ ③ $\frac{5}{18}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

조건 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$

- 확률을 조건으로 준 것이다.

조건 아래 표와 같이 같은 점수를 받더라도 <관람객 점수>와 <심사위원>의 점수는 서로 다르다.

항목 / 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사위원	50	40	30

조건 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사위원 점수를 받는 사건이 서로 독립일 때,

- 이처럼 <독립>이라는 조건을 준다면 별로 고민할 것이 없다.

구할 것 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률

- 상황은 결국 3가지 상황으로 나누어진다. (위의 표에서 일일이 대응시켜보면 쉽게 알 수 있다.)

$$P(\text{점수 합 } 70) = P(\text{관}A \cap \text{심}C) + P(\text{관}B \cap \text{심}B) + P(\text{관}C \cap \text{심}A)$$
$$= P(\text{관}A) \times P(\text{심}C) + P(\text{관}B) \times P(\text{심}B) + P(\text{관}C) \times P(\text{심}A)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

정답은 ③

티칭 주사위를 <2번 던지는 것>과 <2개 던지는 것>은 <표본공간>을 동일하게 분할한다.

<독립적 선후시행>이든 <독립적 동시시행>이든 <독립적>이기만 하면 시간의 순서에 상관없이 같은 확률 값이 나온다. 즉, 독립인 경우 사건이 발생하는 순서는 중요하지 않다.

위의 문제에서도 <심사위원 평가 → 관람객 평가>든 <관람객 평가 → 심사위원 평가>든 <동시에 평가>든 독립이기 때문에 확률 값을 구하는 데는 상관이 없다. 때문에 문제에서도 언급이 없는 것이다.

069 이해를 위한 예제 2005. 3. 가형(65%). 28번. 3점

어떤 음료 회사는 사은행사로 음료수를 구입할 때 경품을 주기로 하고, '컵 1개', '컵 2개', '다음 기회에' 중 하나의 문구를 병 뚜껑의 안쪽에 써 넣었다. 이때, '컵 1개'가 나올 확률은 $\frac{p}{10}$, '컵 2개'가 나올 확률은 $\frac{p}{100}$, '다음 기회에'가 나올 확률은 p 이다. 이와 같은 행사에서 음료수 3병을 구입하였을 때, 경품으로 3개의 컵을 받을 확률은? (단, '다음 기회에'는 경품이 없음을 뜻한다.)

① $\frac{3}{1000}p^3$ ② $\frac{7}{1000}p^3$ ③ $\frac{9}{1000}p^3$ ④ $\frac{11}{1000}p^3$ ⑤ $\frac{13}{1000}p^3$

조건 '컵 1개'가 나올 확률은 $\frac{p}{10}$, '컵 2개'가 나올 확률은 $\frac{p}{100}$, '다음 기회에'가 나올 확률은 p

- 각 확률이 정해져 있다. 독립이라는 조건이 없지만 독립이라고 생각할 수 있다.

구할 것 음료수 3병을 구입하였을 때, 경품으로 3개의 컵을 받을 확률

- 주어진 상황은 다음의 2가지 상황으로 나눌 수 있다.

상황 1	<컵 1개> <컵 1개> <컵 1개>
상황 2	<컵 1개> <컵 2개> <다음 기회에>

⇨ $P(\text{상황 1}) = \left(\frac{p}{10}\right)^3$ - <독립>인 경우 세 사건이 동시에 발생할 확률은 각 사건을 곱하면 된다.

- 이 중에서 <상황 2>의 확률은 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

음료수 1	음료수 2	음료수 3
<컵 1개>	<컵 2개>	<다음 기회에>
<컵 1개>	<다음 기회에>	<컵 2개>
⋮	⋮	⋮

⇨ 음료수 3병에서 각 사건 <컵 1개>, <컵 2개>, <다음 기회에>가 한 번씩 나와야 한다.
이때 각 사건은 서로 독립이므로 <컵 1개 - 컵 2개 - 다음 기회에>이 발생할 확률은 배열되는 각각에 대하여 같은 확률 $p \times \frac{p}{10} \times \frac{p}{100}$이 나온다, 여기에다가 <배열되는 3!>가지를 곱하면

$P(\text{상황 2}) = 3! \times \left(p \cdot \frac{p}{10} \cdot \frac{p}{100}\right)$

⇨ $P(\text{컵 3개}) = P(\text{상황 1}) + P(\text{상황 2}) = \left(\frac{p}{10}\right)^3 + 3! \times \left(p \cdot \frac{p}{10} \cdot \frac{p}{100}\right) = \frac{7}{1000}p^3$

정답은 ②

코칭 위의 문제도 사실 <독립조건>으로 이의를 제기할 수 있다.
회사에서 제품을 1억 개 생산했다고 가정해보자. 그 안에 들어있는 <경품의 개수>는 정해져 있으므로
첫 번째로 개봉한 음료수에서 <컵 1개>가 나왔다면 그 결과로 인해 <경품의 개수>에 변동이 생길 것이고,
그래서 나중에 개봉하는 음료수에서 <경품이 나오는 사건>이 발생할 확률이 조금이라도 영향을 받을 것이다.
$P(\text{컵 1개}) = \frac{p}{10}$라고 나왔지만, 그 사건이 일어난 후의 확률 $P(\text{컵 1개} \mid \text{컵 1개})$는 그 확률 값이 달라지므로
이 부분에 대해 이의를 제기할 수 있다. $P(\text{컵 1개} \mid \text{컵 1개})$ 역시 $\frac{p}{10}$로 정하고자 한다면 반드시 독립이라는 조건이 필요하다고 말할 수 있다. 하지만, <확률의 곱셈정리>를 물어보고자 하는 문제의 의도를 생각해본다면 이 정도는 <관용적으로 독립>이라고 이해하고 넘어가길 바란다. (그러는 편이 정신건강에 좋다.)

070 이해를 위한 예제

하나의 문제를 A, B 두 사람이 협력해서 풀 수 있는 확률은 $\frac{9}{10}$이고, A 혼자서 풀 수 있는 확률은 $\frac{3}{5}$이다. B 혼자서 풀 수 있는 확률을 구하여라.

조건 하나의 문제를 A, B 두 사람이 협력해서 풀 수 있는 확률은 $\frac{9}{10}$

- <협력해서 문제를 풀 확률>은 <A 또는 B가 문제를 풀 확률>이다. $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$

조건 A 혼자서 풀 수 있는 확률은 $\frac{3}{5}$ - $P(A) = \frac{3}{5}$

구할 것 B 혼자서 풀 수 있는 확률 - $P(B)$를 구해야 한다. 이때 $P(B)$를 구하기 위해서는 반드시 $P(A \cap B)$를 알아야 한다. 즉, 주어진 문제는 상황 상 <독립>이라고 판단할 수 있다,

⇨ $P(B) = x$라고 두면 $P(A \cap B) = \frac{3}{5}x$이다. 즉,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{9}{10} = \frac{3}{5} + x - \frac{3}{5}x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

정답은 $\frac{3}{4}$

1. 조건부 사건의 분할

1) 조건부 사건이 분할되는 경우

- 문제에서 <선행사건이 이미 발생하였을 때, 후행사건이 발생할 확률>을 물어본다면 보통은 <의미상 조건부>를 물어보고자 하는 것이다. 그러나 항상 그런 것만은 아니며, <의미상 조건부>를 물어보는 것이 아닌 경우도 있다.
- <조건부 사건>을 분할해야 하는 경우에는 반드시 <조건부 확률의 정의 식>을 사용하여 <조건부 확률>을 구해야한다. 이러한 경우, <조건부 확률>을 구하는 과정에서 학생들은 <확률의 곱셈정리와 덧셈정리>를 자연스럽게 사용하게 된다.

⇨ 틀린 풀이를 통해서 배워보자.

예를 들어 1, 2, 3, 4, 5, 6이 각 면에 하나씩 써져있는 정육면체 주사위를 던져서
홀수의 눈이 나오면 1, 2, 3, 4, 5, 6이 써져있는 같은 정육면체 주사위를 던지고,
짝수의 눈이 나오면 1, 1, 1, 2가 각 면에 써져있는 정사면체 주사위를 던진다.
먼저 던진 정육면체 주사위에서 2 이하의 숫자가 나왔을 때, 나중에 던진 주사위에서 나온 숫자가 짝수일 확률은?

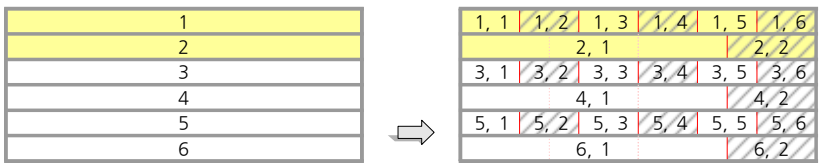
⇨ 다음 풀이 중 어느 부분이 틀렸을까?

우리가 구하는 $P(\text{짝수}\,|\,2\text{이하})$는 ㉠먼저 던진 주사위의 눈이 <1>이거나 <2>가 나온 상황이므로

$P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2)$ ㉡(=) $P(\text{짝수}\,|\,1) + P(\text{짝수}\,|\,2)$ ㉢(=) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ㉣(=) $\frac{3}{4}$

- <조건부>라는 것은 이미 일어나 결과이다. 이 상황을 설명하는 ㉠은 틀린 말이 아니다.
- ㉢은 $P(\text{짝수}\,|\,1) + P(\text{짝수}\,|\,2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$을 의미하고, 상황을 생각해보면 <의미상 조건부 확률>의 상황이므로 이것은 바른 계산이다. 예를 들어 $P(\text{짝수}\,|\,1)$은 선행사건으로 인해 이미 1이 나온 상황에서 같은 정육면체 주사위를 던지는 상황이다. 이러한 상황에서 짝수의 눈이 나올 확률은 당연히 $\frac{1}{2}$이다.
- ㉣을 의심할 것이라고는 생각되지 않는다. 너무나도 당연하다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- 틀린 것은 ㉡이다. ⇨ $P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2) \neq P(\text{짝수}\,|\,1) + P(\text{짝수}\,|\,2)$

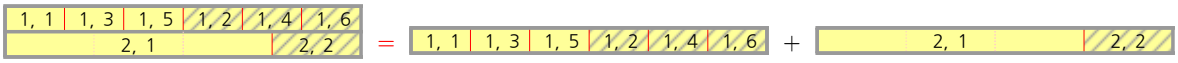
<조건부 사건>은 <확률의 덧셈정리>로 분할되지 않는다. 그 이유를 살펴보면 다음과 같다.



우리가 구하고자 하는 $P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2)$는 에서 가 차지하는 비율이다.

위의 그림에서 볼 수 있듯이 <비율의 면적화> 관점으로 확률을 생각해보면 $P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2) = \frac{3}{8}$이 된다.

그러므로 실제 정답은 $\frac{3}{8}$이다. 틀린 풀이처럼 $P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2) = P(\text{짝수}\,|\,1) + P(\text{짝수}\,|\,2)$로 변형할 경우,



위의 그림을 비율로 계산하게 되는데, 이 과정에서 우리는 $\frac{3}{8} = \frac{2+1}{4+4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$ 과 같은 <말도 안 되는 연산>을 적용하게 된다. (가비의 리는 $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{c+d}{a+b}$가 아니라 $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{c+d}{a+b}$이다.)

- 앞에서 나온 조건부 확률의 바른 계산은 다음과 같다.

$$P(\text{짝수}\,|\,1 \text{ or } 2) = \frac{P(1 \text{ or } 2 \cap \text{짝수})}{P(1 \text{ or } 2)} = \frac{P(1 \cap \text{짝수}) + P(2 \cap \text{짝수})}{P(1 \text{ or } 2)}$$

위의 식처럼 <조건부 확률의 정의 식>을 쓴 다음, <확률의 곱셈정리>를 사용해 상황을 분할시켜서 계산해야 한다.

$$\frac{P(1 \cap \text{짝수}) + P(2 \cap \text{짝수})}{P(1 \text{ or } 2)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$$

<조건부 사건을 분할해야 하는 상황>에서는 <의미상 조건부 확률>을 쓰지 않는다.
반드시 <조건부 확률의 정의 식>과 <확률의 곱셈정리>를 이용해서 계산해야 한다.

2) 종속적 선후시행에서 후행사건이 발생할 확률

- <종속적 선후시행>에서 <후행사건>이 발생할 확률은 항상 상황에 따라 <몇 가지로 분할>된다.
  바로 밑에 나오는 예제를 통해서 간단히 확인해보자.

071 이해를 위한 예제 2007. 사관학교. 문·이과. 11번. 3점 - 일부 발췌

5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 할 때 $P(B)$를 구하여라. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

<종속적 선후시행> 분할과 상황의 고정 – 후행사건의 확률

시행 5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 + 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때,
+ (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

⇨ 이것으로부터 종속적 선후시행이라는 사실을 알 수 있다.

사건 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 할 때 $P(B)$

사건의 분석 을이 당첨제비를 뽑는 사건은 <전체시행의 상황>에서 봤을 때 <갑이 당첨제비 → 을이 당첨제비> 또는 <갑이 비당첨제비 → 을이 당첨제비>의 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

$$\Rightarrow P(B) = P(A \to B) + P(A^c \to B) = P(A)\cdot P(B|A) + P(A^c)\cdot P(B|A^c)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{{}_1C_1}{{}_4C_1} + \frac{3}{5}\cdot\frac{{}_2C_1}{{}_4C_1} = \frac{2}{5}$$

정답은 $\frac{2}{5}$

2. 베이즈 정리 : 미래의 결과, 과거의 확률

- 영화에서 나오는 대부분의 유능한 형사들은 범인을 잡기 위해 〈미래의 결과〉인 증거들을 가지고 〈과거의 확률〉을 따져서 사건을 재구성하는 방식으로 수사망을 좁혀 나간다. 확률이 오로지 미래에 일어날 일을 예측하는 것에만 쓰인다고 생각한다면 이것은 크나큰 착각이다. 과거의 사건을 밝혀내는 일에도 확률이 자주 쓰이며, 이러한 이유에서 형사들을 어떤 의미로는 통계학자라고 볼 수도 있다.

- 〈후행사건의 결과〉가 〈조건부〉로 제시되었을 때, 〈선행사건이 발생했을 확률〉을 구하는 조건부 확률 $P(\text{선행사건}-\text{과거} \mid \text{후행사건}-\text{미래})$을 생각해보자. 이러한 개념은 〈독립적 선후시행〉에서는 문제화 될 수 없으며, 오로지 〈종속적 선후시행〉에서만 문제화 될 수 있다. 바로 앞에서 배운 개념이다.

  〈종속적 선후시행〉에서 〈후행사건〉이 발생할 확률은 항상 상황에 따라 〈몇 가지로 분할〉된다.

  이런 경우에는 반드시 〈조건부 사건이 분할되는 상황〉이 된다. 〈시간상 선후관계에 있는 사건〉들에 대하여 〈조건부 확률〉을 구하는 경우이지만, 〈의미상 조건부〉의 사고방식으로 계산되지 않고, 〈조건부 확률의 정의 식〉과 〈확률의 곱셈정리〉를 통해서 계산되어진다.

- 이러한 경우를 〈통계학〉에서는 〈베이즈 정리〉라고 부른다.
  공식화 되어 있는 부분도 있지만, 단순히 외워서 대입하는 식이 아닌 〈사고방식〉을 나타낸 식이다.
  다음 식의 의미를 자연스럽게 읽어낼 수 있는 정도라면 사고방식을 이해했다고 생각해도 좋다.

조건 (독립과 종속의 관계를 알 수 없는 일반적인 두 사건에 대하여)

선행사건을 A (시간상 과거), 후행사건을 B (시간상 미래)라고 하자. 이때, 후행사건이 발생할 확률은 편의상 〈$A \rightarrow B$〉 ∪ 〈$A^c \rightarrow B$〉와 같이 2가지로만 분할된다고 가정해보자.

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \rightarrow B)}{P(A \rightarrow B) + P(A^c \rightarrow B)} = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(A) \cdot P(B \mid A) + P(A^c) \cdot P(B \mid A^c)}$$

이 식은 외워서 대입하는 식이 아닌 자연스러운 〈사고방식〉임을 다시 한 번 상기하자.

〈미래의 결과 → 과거의 확률〉 : 상황을 분할하여
〈조건부 확률의 정의 식〉과 〈확률의 곱셈정리〉를 모두 활용하라!!

코칭 베이즈 정리의 일반화 된 식을 외울 필요는 없지만 다음의 경우를 한 번 더 생각해보자.

- (독립과 종속의 관계를 알 수 없는 일반적인 두 사건에 대하여)
  선행사건을 A_1 (시간상 과거), 후행사건을 B (시간상 미래)라고 하자.
  이때, 후행사건이 발생할 확률은 편의상 〈$A_1 \rightarrow B$〉 ∪ 〈$A_2 \rightarrow B$〉 ∪ 〈$A_3 \rightarrow B$〉와 같이 3가지로 분할된다면

$$\Rightarrow P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \rightarrow B)}{P(A_1 \rightarrow B) + P(A_2 \rightarrow B) + P(A_3 \rightarrow B)}$$

$$= \frac{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1)}{P(A_1) \cdot P(B \mid A_1) + P(A_2) \cdot P(B \mid A_2) + P(A_3) \cdot P(B \mid A_3)}$$

코칭 선행사건과 후행사건의 관계에서 ∩과 →는 같은 기호로 이해하자.
수학적으로는 ∩이 맞지만 →의 기호가 이해를 더 돕는다.

072 이해를 위한 예제 2011. 11. 나형(71%). 13번. 3점

주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 카드를 한 장 꺼내고, 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 카드를 한 장 꺼낸다. 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 때, 그 카드가 주머니 A에서 꺼낸 카드일 확률은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

조건 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A에서 임의로 카드를 한 장 꺼내고, 3의 배수가 아니면 주머니 B에서 임의로 카드를 한 장 꺼낸다.

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

구할 것 주머니에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수일 때, 그 카드가 주머니 A에서 꺼낸 카드일 확률

⇨ 미래의 결과, 과거의 확률을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(\text{주사위 3의 배수} \mid \text{주머니에서 짝수}) = \frac{P(\text{주사위 3의 배수} \cap A \text{ 주머니에서 짝수})}{P(\text{주머니에서 짝수})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행에서 <후행사건>이므로 <3의 배수 → A에서 짝수> ∪ <3의 배수× → B에서 짝수>의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$\begin{aligned} P(\text{주머니 짝수}) &= P(3\text{의 배수} \to A \text{ 주머니 짝수}) + P(3\text{의 배수}\times \to B \text{ 주머니 짝수}) \\ &= P(3\text{의 배수}) \cdot P(A \text{ 주머니 짝수} \mid 3\text{의 배수}) + P(3\text{의 배수}\times) \cdot P(B \text{ 주머니 짝수} \mid 3\text{의 배수}\times) \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\text{주사위 3의 배수} \mid \text{주머니 짝수}) &= \frac{P(\text{주사위 3의 배수} \cap A \text{ 주머니 짝수})}{P(\text{주머니 짝수})} \\ &= \frac{P(\text{주사위 3의 배수} \to A \text{ 주머니 짝수})}{P(3\text{의 배수} \to A \text{ 주머니 짝수}) + P(3\text{의 배수} \to A \text{ 주머니 짝수})} \\ &= \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6}} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

(∩ 기호 대신 →기호를 썼으나 수학적으로는 ∩ 이 맞다.)

정답은 ④

코칭 최종정리 - 복습

- <조건부 사건>을 분할해야 하는 경우에는 반드시 <조건부 확률의 정의 식>을 사용하여 <조건부 확률>을 구해야한다. 이러한 경우, <조건부 확률>을 구하는 과정에서 학생들은 <확률의 곱셈정리와 덧셈정리>를 자연스럽게 사용하게 된다.

- <종속적 선후시행>에서 <후행사건>이 발생할 확률은 항상 상황에 따라 <몇 가지로 분할>된다.

- <미래의 결과, 과거의 확률>을 다루는 베이즈 정리는 <후행사건의 결과>가 <조건부>로 제시되었을 때, <선행사건이 발생했을 확률>을 구하는 조건부 확률이므로 <조건부 사건>이 반드시 분할되는 구조를 가지고 있다. 반드시 상황을 분할하여 <조건부 확률의 정의 식>과 <확률의 곱셈정리>를 모두 활용해야 한다.

073 이해를 위한 예제

어떤 의사가 암에 걸린 사람을 암에 걸렸다고 진단할 확률은 98%이고, 암에 걸리지 않은 사람을 암에 걸리지 않았다고 진단할 확률은 92%라 한다. 이 의사가 실제로 암에 걸린 사람 400명과 실제로 암에 걸리지 않은 사람 600명을 진찰하여 암에 걸렸는지 아닌지를 진단하였다. 암에 걸렸다고 진단받은 사람이 실제로 암에 걸린 사람일 확률을 구하여라.

조건 주어진 <확률조건>은 아래 표와 같이 정리할 수 있다.

암 → 암진단 ⇨ $\frac{98}{100}$
암 → 정상진단 ⇨ $\frac{2}{100}$
암× → 암진단 ⇨ $\frac{8}{100}$
암× → 정상진단 ⇨ $\frac{92}{100}$

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

조건 암에 걸린 사람 400명과 실제로 암에 걸리지 않은 사람 600명을 진찰하여 암에 걸렸는지 아닌지를 진단

- 암에 걸린 사람의 비율은 $\frac{2}{5}$이고, 암에 걸리지 않은 사람의 비율은 $\frac{3}{5}$이다.

구할 것 암에 걸렸다고 진단받은 사람이 실제로 암에 걸린 사람일 확률

⇨ 미래의 결과, 과거의 확률을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(\text{암} \mid \text{암 진단}) = \frac{P(\text{암} \cap \text{암 진단})}{P(\text{암 진단})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행에서 <후행사건>이므로 <암 → 암 진단> ∪ <암× → 암 진단>의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$\begin{aligned} P(\text{암 진단}) &= P(\text{암} \to \text{암 진단}) + P(\text{암}\times \to \text{암 진단}) \\ &= P(\text{암}) \cdot P(\text{암 진단} \mid \text{암}) + P(\text{암}\times) \cdot P(\text{암 진단} \mid \text{암}\times) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{98}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{100} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\text{암} \mid \text{암 진단}) = \frac{P(\text{암} \to \text{암 진단})}{P(\text{암 진단})} = \frac{P(\text{암} \to \text{암 진단})}{P(\text{암} \to \text{암 진단}) + P(\text{암}\times \to \text{암 진단})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{98}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{100}} = \frac{2}{7}$$

정답은 $\frac{49}{55}$

#3 독립시행의 확률

- 정해진 상황에서만 쓰는 확률의 유일한 <공식>이다. (유도 과정이 있고 계산 과정을 줄여준다.)
  앞에서 배운 <덧셈정리, 조건부, 곱셈정리>는 유도 과정 없이 그대로 받아들이는 <사고방식>이었다.

- <독립인 사건의 곱셈정리>가 이 공식을 유도하는 기본 원리이고, 유도 과정도 그리 길지 않다.
  하지만, <독립시행의 확률>은 반드시 <공식을 쓰는 상황>과 <공식의 구조>를 정확히 외워서 사용해야 한다.

- <원주각과 중심각>보다 <지름의 원주각>이 주로 나오는 것처럼 (Part 1. 개념의 외연 참조)
  이제 곧 공부하게 될 통계부터는 <확률의 곱셈정리>보다 <독립시행의 확률>이 훨씬 더 자주 나온다.
  그렇기 때문에 <독립시행의 확률>은 <순열과 조합 공식>처럼 공식을 쓰는 상황에서 자연스럽게 사용되어야 하는 <근본에 가까운 공식>이다.

1. 독립시행의 확률의 상황

1) 베르누이의 시행과 독립시행

- <베르누이의 시행>이란 한 번의 시행에서 사건 A와 A^c에만 관찰의 초점을 맞춘 시행이다.
  예를 들어 어떤 확률을 구하기 위해서 우리의 관찰 초점이 사건 A와 A^c에만 맞춰져 있다면
  이 시행을 <베르누이의 시행>이라고 볼 수 있다.
  (이것을 조금 고급스러운 용어로 '어떤 시행에서 사건을 이항 대립적으로 나눌 때, 이 시행을 베르누이의 시행이라 한다.'라고 표현하기도 한다.)

⇨ 예를 들어 1부터 6까지 숫자가 적힌 주사위를 던져 <짝수가 나올 확률>, <소수가 나올 확률> 등이 궁금하다면 이것은 지금까지 일반적으로 다뤄온 <일반적 시행>의 관점이라고 생각할 수 있다. 하지만, 1부터 6까지 숫자가 적힌 주사위를 던지는 똑같은 시행에 대해서 <짝수가 나올 확률 : p>과 <짝수가 아닌 수가 나올 확률 : $1-p$>만 궁금한 상황이라면 이러한 시행을 <베르누이의 시행>이라고 하는 것이다.

- <독립시행>이란 사실 앞에서도 강조한 독립적 선후시행을 말한다.
  하지만, <독립시행의 확률>은 조금 더 구체적인 조건을 갖추고 있어야 한다. (독립적 선후시행 중 특별한 경우이다.)
  ① n회의 독립시행이 있어야 한다.
  ② 우리가 궁금한 확률은 n회의 독립시행 중에서 <사건 A>가 r회 발생할 확률이다. (자동으로 <사건 A^c>는 $n-r$회)

- 다음 페이지는 이것을 공식화 하는 과정을 담고 있다.
  결국 <독립시행의 확률>은 <n회의 독립시행 중에서 사건 A가 r회 발생할 확률>이고,
  이때, <각각의 독립시행>은 사건 A와 A^c에만 관찰의 초점이 맞춰져 있으므로 <베르누이의 시행>이라고 볼 수 있다.

코칭 <베르누이의 시행>은 어떤 시행을 바라보는 하나의 관점일 뿐 암기할 사항은 아니다.
<독립시행의 확률>의 공식과 상황을 다음 장에서 자연스럽게 이해하고, 상황에 따라 공식을 적용할 수 있으면 된다.
이 단원의 핵심은 <공식의 자유로운 적용>이다.

2) 독립시행의 확률

- 독립시행의 확률은 다음과 같은 구조를 가지고 있다.

1 단계 <1회의 시행에서 사건 A가 발생할 확률>을 p라고 하면 사건 A가 발생하지 않을 확률은 당연히 $1-p$이다.

⇨ $P(A) = p$ 이면 $P(A^c) = 1-p$

2 단계 위와 같은 <시행을 독립적으로 5회 반복>했을 때,

<사건 A가 3회 발생하는 상황>은 <사건 A가 3회, 사건 A^c이 2회 발생하는 상황>과 같다.

	사건 A가 3회 발생하는 모든 상황					
	시행 1	시행 2	시행 3	시행 4	시행 5	
상황 01	A	A	A	A^c	A^c	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 02	A	A	A^c	A	A^c	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 03	A	A	A^c	A^c	A	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 04	A	A^c	A	A	A^c	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 05	A	A^c	A	A^c	A	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 06	A	A^c	A^c	A	A	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 07	A^c	A	A	A	A^c	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 08	A^c	A	A	A^c	A	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 09	A^c	A	A^c	A	A	⇨ $p^3(1-p)^2$
상황 10	A^c	A^c	A	A	A	⇨ $p^3(1-p)^2$

- 5회의 독립시행에서 <사건 A가 3회 발생하는 모든 상황>을 나열해보면 <사건 A가 3회 발생하는 상황>은 <서로 다른 5자리 중 A가 들어갈 3자리를 뽑는 경우의 수>만큼 발생한다는 사실을 알 수 있다.

(물론, 같은 것을 포함한 순열로 봐도 되지만 <조합>으로 보는 것이 좋다. - 촌철살인 확률과 통계 1 - Part 3. 이해하면 공식은 없다. 참조)

- <5자리 중 3자리를 뽑는 경우의 수인 ${}_5C_3$가지(10가지)> 각각에 대하여 같은 확률 $p^3(1-p)^2$이 발생하므로 하나의 상황에서 구한 확률에다가 발생하는 경우의 수를 곱한다.

각각의 <선후시행>에서 <사건 A와 A^c>이 독립이기 때문에 순서에 상관없이 같은 확률 값이 나오는 것이다.

- 결국, 우리가 구하고자 하는 확률은 다음과 같다.

$P(5\text{회의 시행 중 사건 } A\text{가 3회 발생}) = {}_5C_3\ p^3(1-p)^2$

3 단계 이것을 일반화 하면 (이 공식은 매우 중요하다.)

n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 (사실은 사건 A가 r회, A^c이 $n-r$회 일어날 확률을 구하는 것)

① 1회 시행에서 사건 A가 발생할 확률을 구한다. ⇨ $P(1\text{회 시행에서 } A\text{가 발생}) = p$라 하면

② n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은 ⇨ ${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$이다.

- <전체적으로 사건을 분할>하되 <부분적으로 공식>을 쓴다.

확률에서 쓰이는 공식은 <독립시행의 확률> 밖에 없고, 상황을 분할하는 과정에서 부분적으로 공식을 써도 되는 상황임을 파악했다면 <독립시행의 확률> 공식을 쓴다.

코칭 <촌철살인 확률과 통계 1>의 <이항정리>에서도 언급했듯이 자연수 범위의 공식들은 단순히 외우는 것이 아니라 <의미를 만들어 읽는 느낌>으로 기억하는 것이 좋다.

$${}_nC_r\, p^r (1-p)^{n-r}$$

n번 중 r번 발생 p가 r번 (그러면) $1-p$는 (남은) $n-r$번 발생

티칭 <100개의 주사위를 동시에 던지는 상황>은 <한 개의 주사위를 100번 던지는 상황>으로 생각해도 상관없다.
어차피 각각의 주사위에서 어떤 사건 A가 발생할 확률은 <독립적>이다.
독립적인 경우, <선후시행>과 <동시시행>은 차이가 없다.

074 이해를 위한 예제 2010. 7. 나형(76%). 27번. 3점

철수는 3개의 예선문제와 결과에 따라 1개의 찬스문제가 주어지는 퀴즈대회에 참가하는데, 찬스문제는 예선문제를 2개 맞히고 1개 틀린 경우만 주어진다. 3개의 예선문제를 모두 맞히거나 찬스문제를 맞혀야 예선을 통과한다. 각각의 예선문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{3}$이고, 찬스문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{4}$일 때, 예선을 통과할 확률은?

① $\frac{5}{54}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{7}{54}$ ④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

조건 3개의 예선문제와 결과에 따라 1개의 찬스문제가 주어지는 퀴즈대회에 참가하는데, 찬스문제는 예선문제를 2개 맞히고 1개 틀린 경우만 주어진다.

조건 각각의 예선문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{3}$이고, 찬스문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{4}$ ⇨ <독립>이라는 것을 암시한다.

구할 것 3개의 예선문제를 모두 맞히거나 찬스문제를 맞혀야 예선을 통과 + 예선을 통과할 확률

⇨ 예선을 통과하는 사건은 배반인 두 사건으로 분할된다. - <사건의 분할>은 모든 확률 문제의 기본이다.

<3개의 예선문제 모두 맞힌 경우> ∪ <예선문제 2개 맞추고 → 찬스 문제 맞힌 경우>

즉, $P(\text{예선통과}) = P(\text{예선3문제}) + P(\text{예선2문제} \rightarrow \text{찬스문제})$

- 여기에서 $P(\text{예선3문제})$는 <3회의 독립시행>에서 <맞추는 사건>이 <3회> 발생할 확률이므로 독립시행의 확률 공식을 활용한다. ⇨ $P(\text{예선3문제}) = {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3$
- 여기에서 $P(\text{예선2문제} \rightarrow \text{찬스문제})$은 **전체적으로 <독립인 사건의 곱셈정리>**이고, **부분적으로 <독립시행의 확률>**의 상황이다. ⇨ $P(\text{예선2문제} \rightarrow \text{찬스문제}) = P(\text{예선2문제}) \times P(\text{찬스문제} \mid \text{예선2문제})$이다.
  또한 $P(\text{예선2문제})$은 사실 $P(\text{예선2문제}\bigcirc,\ \text{1문제}\times)$이고 <3회의 독립시행>에서 <맞추는 사건>이 <2회> 발생할 확률이므로 독립시행의 확률 공식을 활용한다. 즉, $P(\text{예선2문제}) = {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$
- $P(\text{예선통과}) = P(\text{예선3문제}) + P(\text{예선2문제} \rightarrow \text{찬스문제})$
  $= P(\text{예선3문제}) + P(\text{예선2문제}) \times P(\text{찬스문제} \mid \text{예선2문제})$
  $= {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{27} + \frac{1}{18} = \frac{5}{54}$

정답은 ①

코칭 굳이 <독립시행의 확률공식>을 적용할 필요가 없더라도 <독립시행의 확률공식>을 적용할 수 있는 상황이면 반드시 적용하는 연습을 한다. 순열과 조합 공식처럼 자연스럽게 사용해야 하는 <근본에 가까운 공식>이기 때문이다.

075 이해를 위한 예제 2007. 9. 나형(32%). 24번. 4점

어느 스포츠 용품 가게에서는 별(★) 모양이 그려져 있는 야구공 한 개를 포함하여 모두 20개의 야구공을 한 상자에 넣어 상자 단위로 판매한다. 한 상자에서 5개의 야구공을 임의 추출하여 별(★) 모양이 그려져 있는 야구공이 있으면 축구공 한 개를 경품으로 준다. 어느 고객이 이 가게에서 야구공 3상자를 구입하여 경품 당첨 여부를 모두 확인할 때, 축구공 2개를 경품으로 받을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

조건 야구공 3상자를 구입하여 경품 당첨 여부를 모두 확인할 때, 축구공 2개를 경품으로 받을 확률

⇨ n회의 독립시행에서 <특정사건>이 k번 나올 확률이므로 <독립시행의 확률 공식>을 쓸 수 있는 구조이다.

1회 시행 한 상자에서 5개의 야구공을 임의 추출하여 별(★) 모양이 그려져 있는 야구공이 있으면 축구공 한 개를 경품으로 준다. ⇨ 즉, 1회 시행에서 별(★) 모양이 나오는 경우를 사건 A라 하면

$$P(A) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{19}C_4}{{}_{20}C_5} = \frac{1}{4}$$

독립시행의 확률 야구공 3상자를 구입하여 경품 당첨 여부를 모두 확인할 때, 축구공 2개를 경품으로 받을 확률

⇨ 3회의 독립시행 중 사건 A가 2회 발생할 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$

$p+q = 73$이므로 정답은 73

076 이해를 위한 예제 2011. 9. 나형(78%). 12번. 3점

주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 동전을 3개 동시에 던지고, 6의 약수가 아니면 동전을 2개 동시에 던진다. 1개의 주사위를 1번 던진 후 그 결과에 따라 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

시행 주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 동전을 3개 동시에 던지고, 6의 약수가 아니면 동전을 2개 동시에 던진다. - 종속적 선후시행이다.

사건 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률

사건의 분석 주어진 사건은 아래와 같이 배반인 두 사건으로 분할된다. - <사건의 분할>은 모든 확률 문제의 기본이다.

<6의 약수 → (동전을 3개 던져서)앞면 1개> ∪ <6의 약수× → (동전을 2개 던져서)앞면 1개>

⇨ $P(\text{앞}1) = P(6\text{의 약수} \to \text{앞면}1\text{개}) + P(6\text{의 약수}\times \to \text{앞면}1\text{개})$

- 여기에서 각 확률은 **전체적으로 <종속인 사건의 곱셈정리>**이고, **부분적으로 <독립시행의 확률>**의 상황이다.

⇨ $P(\text{앞}1) = P(6\text{의 약수} \to \text{앞면}1\text{개}) + P(6\text{의 약수}\times \to \text{앞면}1\text{개})$

$= P(6\text{의 약수}) \cdot P(\text{앞면 }1\text{개} \mid 6\text{의 약수}) + P(6\text{의 약수}\times) \cdot P(\text{앞면 }1\text{개} \mid 6\text{의 약수}\times)$

$= \frac{2}{3}\times {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\times {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

정답은 ③

2. 반복시행의 확률

1) 독립적 반복시행

- 독립적 선후시행에서 <선행사건>과 <후행사건>의 관계에 있는 사건들은 항상 <독립의 관계>에 있음을 알고 있다.
  몇 개의 독립사건이 각각 몇 번씩 발생할 확률은 **<사건의 발생순서>에 상관없이** 항상 같은 확률 값을 가진다.

⇨ 예를 들어 <독립사건> A, B, C로 구성된 독립적 선후시행을 5회 반복할 때,
사건 A가 3회, 사건 B가 1회, 사건 C가 1회 발생할 확률은 사건이 $AAABC$의 순서로 발생하든, $AABCA$의 순서로 발생하든 순서에 상관없이 <각각에 대하여 같은 확률 값>을 가진다. 그러므로 문제를 풀 때는 원하는 사건이 발생한 1가지 상황에 대하여 확률을 구한 다음, **<사건의 발생 순서를 고려한 경우의 수>**를 곱한다.

- 앞에서 공부한 <독립시행의 확률>도 마찬가지다. $P(A) = p$, $P(A^c) = 1-p$일 때, n회의 독립시행에서
  사건 A가 r회, A^c이 $n-r$회 발생할 확률은 사건이 일어나는 1가지 상황 $\underbrace{A \to A \to \cdots \to A}_{r\text{회}} \to \underbrace{A^c \to A^c \to \cdots \to A^c}_{n-r\text{회}}$이
  발생할 확률 $p^r(1-p)^{n-r}$에 <사건의 발생 순서를 고려한 경우의 수> ${}_nC_r$을 곱한 것이다.
  단지 <독립시행의 확률>은 <사건 A와 사건 A^c>으로만 구성된 시행을 여러 번 하였을 때, <A가 r번 발생할 확률>을 구하는 특별한 구조를 가지고 있고, 이런 경우는 한 번에 처리할 수 있는 <공식>으로 접근하는 것뿐이다.

- 독립적 선후시행에서 <반복시행의 확률>을 구하는 경우,
  1 단계 : 상황을 분할한다.
  2 단계 : 분할한 <각각의 상황들이 같은 확률 값>을 가지는 것을 <직관적으로 느낄 수 있는 경우>,
  조건에 맞는 <1가지 상황에서 확률>을 구한 다음, <사건의 발생 순서를 고려한 경우의 수>를 곱한다.

⇨ 다섯 번의 경기 중에서 우리 팀이 세 번 이길 확률 (우리 팀이 이길 확률은 항상 0.7, 무승부 없음)

승	승	승	패	패

- <배열하는 경우의 수>만큼의 상황이 있고, <각각의 상황에 대하여 같은 확률>이 발생한다.
문제의 상황은 | 승 | 승 | 승 | 패 | 패 | 의 순서를 마음대로 배열해도 되는 상황이다.
이러한 경우일 때, <독립시행의 확률 공식>을 쓰는 것이다. $P(\text{우리 팀 3번 이김}) = {}_5C_3 0.7^3 0.3^2$

⇨ 다섯 번의 경기 중에서 세 번을 먼저 이긴 팀이 우승할 때, 다섯 번째 경기에서 우리 팀이 우승할 확률
(우리 팀이 이길 확률은 항상 0.7, 무승부 없음)

승	승	승	패	패

- 이러한 상황은 세 번째 경기에서 우승하는 상황이므로 <경우의 수>에서 제외한다.
이런 방식으로 몇 가지 상황들을 나열해보면 다섯 번째 경기에서 승리해야 문제의 조건을 만족한다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 | 승 | 승 | 패 | 패 | 승 | 에서 먼저 치루는 네 경기 | 승 | 승 | 패 | 패 | 의 승패 순서를 배열하는 경우의 수 $\frac{4!}{2!2!}$ 또는 ${}_4C_2$가 확률 $0.7^3 0.3^2$에 곱해지게 된다. 따라서 우리가 구하는 확률은 ${}_4C_2 0.7^3 0.3^2$이다.
(독립시행의 확률처럼 공식화 되지는 않고, 상황에 따라 판단해야 한다.)

2) 종속적 반복시행

- 종속적 선후시행 에서 <선행사건>과 <후행사건>의 관계에 있는 사건들은 <종속의 관계>에 있다고 생각해야 한다.
(결과적으로는 독립일 수 있겠으나, 계산하는 과정에서는 독립임을 느낄 수 없기 때문이다.)
그러므로 몇 개의 종속사건이 각각 몇 번씩 발생할 확률은 **<사건의 발생순서>에** 영향을 받는다.

⇨ 예를 들어 종속적 선후시행 을 5회 반복할 때, 사건 A가 3회, 사건 B가 1회, 사건 C가 1회 발생할 확률은
사건이 발생하는 순서에 상관없이 항상 같은 확률이 발생한다고 장담할 수 없다.
그러므로 주어진 사건이 발생할 수 있는 모든 상황을 고려하여 상황을 분할 후 확률을 각각 계산해야 한다.
이 때문에 종속적 선후시행 이 반복되는 경우, 너무 많은 경우의 수를 따져야 하는 상황은 문제로 나오지 않는다.

- 종속적 선후시행 이 반복되는 경우, 독립적 선후시행 의 문제를 풀 듯이 1가지 상황의 <확률>에 <경우의 수>를 곱해서 전체 확률을 구할 수는 없으므로 <사건의 분할>과 <상황의 고정>을 통해 전체 상황을 하나씩 정리해 나가야 한다.

- 종속적 선후시행 이 반복되는 경우에도 예외적으로 <규칙성>이 발견되어 <각각의 상황들이 같은 확률 값>을 가진다는 것을 판단할 수 있는 경우가 있다. 이러한 경우에는 <독립시행 : 반복시행의 확률>처럼 <확률 값>을 먼저 구한 다음, <경우의 수>를 <확률 값>에 곱해주면 된다.

077 이해를 위한 예제

두 팀 A,B가 축구시합을 하여 7번의 시합 중 4번을 먼저 이기는 팀을 승자로 결정하기로 하였다. 한 번 시합할 때마다 A팀이 이길 확률이 $\frac{3}{5}$일 때, 5번 째 시합에서 승자가 결정될 확률을 구하여라.

<독립시행 : 반복시행의 확률>

조건 7번의 시합 중 4번을 먼저 이기는 팀을 승자로 결정

조건 한 번 시합할 때마다 A팀이 이길 확률이 $\frac{3}{5}$ ⇨ 독립이라는 것을 암시한다.

구할 것 5번 째 시합에서 승자가 결정될 확률

⇨ 다음 2가지로 상황을 분할한다 : 〈A가 승자로 결정되는 경우〉 ∪ 〈B가 승자로 결정되는 경우〉

- | 승 | 승 | 승 | 승 | 패 | : 이런 경우는 다섯 번째 우승하는 것이 아니다. 네 번 연속 이기면 경기는 중단되기 때문에 네 번째 경기에서 우리 팀이 우승하게 되고, 마지막 경기는 실제로는 하지 않는다.

- 이런 식으로 몇 가지를 나열해 보면 결국 5번째 승자가 결정되는 경우

〈A가 승자로 결정되는 경우〉 : 5번째 A가 이기면서 끝나야 한다. 즉, | A | A | A | B | A | ⇨ $\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)$

〈B가 승자로 결정되는 경우〉 : 5번째 B가 이기면서 끝나야 한다. 즉, | B | B | B | A | B | ⇨ $\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)$

결국 (노란색) 부분을 제외한 나머지를 배열하는 경우의 수는 각각 4가지씩이므로

$$P(5\text{번째 승자 결정}) = 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{840}{5^5} = \frac{168}{625}$$

정답은 $\frac{168}{625}$

078 이해를 위한 예제

비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률이 $\frac{1}{2}$이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률이 $\frac{1}{3}$이라 한다. 월요일에 비가 왔을 때, 같은 주 목요일에 비가 올 확률을 구하여라.

<종속시행 : 반복시행의 확률>

조건 비가 온 날의 다음 날에 비가 올 확률이 $\frac{1}{2}$이고, 비가 오지 않은 날의 다음 날에 비가 올 확률이 $\frac{1}{3}$

⇨ 종속이라는 것을 의미한다. 즉, 다음과 같이 상황이 정리된다.

비 ○ → 비 ○ $P(\text{비}\bigcirc|\text{비}\bigcirc) = \frac{1}{2}$
비 ○ → 비 × $P(\text{비}\times|\text{비}\bigcirc) = \frac{1}{2}$

비 × → 비 ○ $P(\text{비}\bigcirc|\text{비}\times) = \frac{1}{3}$
비 × → 비 × $P(\text{비}\times|\text{비}\times) = \frac{2}{3}$

구할 것 월요일에 비가 왔을 때, 같은 주 목요일에 비가 올 확률

⇨ <월요일에 비가 온 상황 : 의미상 조건부>은 이미 일어난 결과로서 확률 계산을 할 필요가 없다.
상황은 다음과 같이 정리되며 각 상황은 같은 확률이 일어난다고 기대되지 않는다.

	월	화	수	목
상황 1	비 ○	비 ○	비 ○	비 ○
상황 2	비 ○	비 ○	비 ×	비 ○
상황 3	비 ○	비 ×	비 ○	비 ○
상황 4	비 ○	비 ×	비 ×	비 ○

즉, $P(\text{목요일 비}\bigcirc) = P(\text{상황}1) + P(\text{상황}2) + P(\text{상황}3) + P(\text{상황}4)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{29}{72}$$

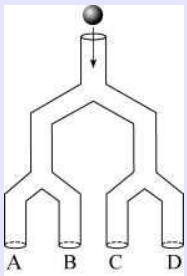
정답은 $\frac{29}{72}$

티칭 종속적 선후시행의 경우
결과적으로는 <각각에 대해서 같은 확률>이 나왔다고 하더라도,
계산과정에서는 <각각에 대해서 같은 확률>이 나올 것이라고 예측되지 않으므로 각각 구해서 더해야 한다.

티칭 상황이 한 번에 정리되지 않는 경우, <시간의 순서>대로 확률을 계산해가며 <상황을 고정>하는 것이 중요하다.

079 이해를 위한 예제 2006. 10. 가형(12%), 나형(7%). 25번. 4점

아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에 공을 넣으면 A, B, C, D중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다. 예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다.



여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 자연수)라고 하자. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)

<독립시행 : 반복시행의 확률>

조건 A, B, C, D중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.
+ 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.

⇨ 각 시행에서 공이 각 출구에 도착할 확률은 $\frac{1}{4}$로 동일하다. (즉, 독립적 선후시행이다.)

조건 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다.

구할 것 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며 + 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률

⇨ 상황을 <세 번 도착하는 출구를 기준>으로 아래와 같이 크게 4가지로 나눌 수 있다.

$AAABCD$	$BBBACD$	$CCCABD$	$DDDABC$
상황 1	상황 2	상황 3	상황 4

- 1회 시행에서 각 출구에 도착할 확률은 $\frac{1}{4}$로 모두 같고, 모두 독립이다.

(전에 어느 출구로 도착하든 다음 시행에 영향을 주지 않는다.)

또한 위의 4가지 상황은 <각각에 대해서 같은 확률>이 나올 것이므로 $P(6\text{번째 끝날}) = 4\times P(\text{상황}1)$

⇨ $P(AAABCD) = \left(\frac{1}{4}\right)^6$이고, $AAABCD$를 배열하여 <6번째 게임이 끝나는 경우>는 아래와 같다.

$AAABCD$를 배열하는 상황

상황 1 - 1	$AAABCD$
상황 1 - 2	$AABACD$
⋮	⋮
안 되는 상황	$ABCD\boxed{AA}$
⋮	⋮

- $AAABCD$를 배열하는 상황 중 마지막에 A가 두 번 연속으로 나오는 경우는 <4번째에 게임이 끝나는 경우>이다. 즉, 조건에 맞게 $AAABCD$을 배열하는 경우의 수는 $AAABCD$을 배열하는 경우의 수는

□□□□□□처럼 여섯 자리를 만들어 놓고 A를 제외한 B, C, D가 들어갈 세 자리를 뽑아 배열하는 경우의 수와 같다. (A는 남은 자리에 자동으로 들어간다.) 즉, ${}_6P_3$이다.

- 여기에 □□□□$A$$A$에서 남은 네 자리에 네 개의 문자를 배열하는 경우의 수 $4!$가지를 뺀다.

⇨ 결국 $P(6\text{번째 끝날}) = 4\times P(\text{상황}1) = 4\times({}_6C_3\times 3! - 4!)\times P(\text{상황}1-1)$

$= 4\times(96)\times\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{3}{32}$ 결국 $a+b = 35$이다.

정답은 35

080 이해를 위한 예제 2010. 9. 가형(8%), 나형(9%). 24번. 4점

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

<종속시행 : 반복시행의 확률>

시행 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받으므로 종속적 선후시행 의 상황이다.

사건 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A + 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값 ⇨ <덧셈정리와 곱셈정리> + <상황의 고정>

사건의 분석 처음 주어진 상황에서 <스티커의 개수>를 3으로 나눈 나머지는 <0, 1, 2>이다.

1 단계 : **첫 번째 시행의 결과에 따른 표본공간의 영역분할** - <0, 1, 2>에서 1개를 뽑아 스티커를 붙이면 상황은 아래와 같이 분할된다.

표본공간	
1, 1, 2	
0, 2, 2	
0, 1, 0	

분할된 3가지 각각에 대하여 <6회에서 처음으로 사건 A가 발생할 확률>은 같은 정도로 기대된다.
- <1,1,2>의 경우 <나머지가 같아지려면> <1 → 1> or <현재 2인 카드 두 번>이 나와야 한다.
- <1,1,2>의 경우 <나머지가 같아지려면> <2 → 2> or <현재 0인 카드 두 번>이 나와야 한다.
- <1,1,2>의 경우 <나머지가 같아지려면> <0 → 0> or <현재 1인 카드 두 번>이 나와야 한다.

- 즉, 상황을 고정해도 상관없다. 상황을 <1, 1, 2>로 고정해보자.

2 단계 : <1회 시행의 결과 중 하나인 1, 1, 2>를 <조건부 : 표본공간>로 하여 **두 번째 시행의 결과에 따른 <조건부 : 표본공간>의 영역분할** - <1, 1, 2>에서 1개를 뽑아 스티커를 붙이면 상황은 아래와 같이 분할된다.

조건부 : 1,1,2	
2, 1, 2	
1, 2, 2	
1, 1, 0	

<1단계>와 같은 이유로 분할된 3가지 각각에 대하여 <6회에서 처음으로 사건 A가 발생할 확률>은 같은 정도로 기대된다.
즉, <조건부 : 표본공간>전체가 분할된 <각각에 대하여> <6회에서 처음으로 사건 A가 발생>하는 사건이 같은 비율을 차지하므로 다시 상황을 하나로 고정해도 상관없다.

- <확률의 연산>없이 <2회 시행 후 결과>를 고정한다. 이번엔 <1, 1, 0>으로 고정하고 <문제의 사건>을 구해보자.

3 단계 : <2회 시행의 결과 중 하나인 1, 1, 0>를 <표본공간 : 조건부>로 하여 세 번째 시행의 결과에 따른 표본공간의 영역분할 - <1, 1, 0>에서 1개를 뽑아 스티커를 붙이면 상황은 아래와 같이 분할된다.

조건부 : 1,1,0
2, 1, 0
1, 2, 0
1, 1, 1

⇨

조건부 : 1,1,0
2, 1, 0
1, 1, 1

- $P(3\text{회 시행 후 } A : \text{나머지 같음}) = \frac{1}{3}$
- $P(3\text{회 시행 후 } A^c : \text{나머지 } 2,\ 1,\ 0) = \frac{2}{3}$

- 위의 <조건부 : 표본공간>에서 <6회에서 처음으로 사건 A가 발생>하기 위해서는 $\frac{2}{3}$를 곱해야 한다. $\frac{2}{3}$를 곱하는 순간 상황은 2, 1, 0으로 고정된다.

⇨ $P(6\text{회째 처음으로 } A) = P(3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0) \times P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0)$

$= \frac{2}{3} \times P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0)$

- $P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0)$은 나머지가 $2,\ 1,\ 0$로 고정된 상황(의미상 조건부)에서 <3회 시행 후> 나머지가 같아질 확률을 의미한다. 즉, 앞에서 했던 <1 ~ 3단계>의 과정이 그대로 반복되어 나머지가 같아질 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

⇨ $P(6\text{회째 처음으로 } A) = P(3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0) \times P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0)$

$= \frac{2}{3} \times P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째에 } 2,\ 1,\ 0)$ - <의미상 조건부>와 <상황의 고정>

$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

정답은 11

코칭 <반복시행의 확률> 복습

- <반복시행의 확률 : 독립인 경우> ⇨ <상황을 분할>하고 <각각의 상황들이 같은 확률 값>을 가지는 것을 느끼며 <확률 값>과 <경우의 수>를 각각 따로 구하여 곱한다.
- <반복시행의 확률 : 종속인 경우> ⇨ <상황을 분할>하고 <상황을 고정>하면서 상황을 정리한다.
- <상황의 고정> ⇨ **<표본공간 전체>**를 분할한 각각의 부분에 대하여 우리가 구하고자 하는 사건의 발생 확률이 같은 비율의 면적을 차지할 것이라고 생각되는 경우, <확률의 연산>없이 <상황을 고정>한다.
  ⇨ **<표본공간 일부>**를 분할한 각각의 부분에 대하여 우리가 구하고자 하는 사건의 발생 확률이 같은 비율의 면적을 차지할 것이라고 생각되는 경우, <곱하는 순간>부터 <상황을 고정>한다.

코칭 해설은 길지만 <상황을 고정>시키는 논리가 정착되어 있다면 실제 풀이 과정은 한 두 줄에 불과하다.
중요한 것은 <표본공간을 분할>한 다음, 개념의 확신을 통해 **<상황을 고정>**하고 다시 뒤로 돌아가지 않는 것이다.
<상황이 고정>되었다면 완전히 다른 문제를 풀게 되는 것이다.

081 이해를 위한 예제 2010. 9. 가형(8%), 나형(9%). 24번. 4점 - 변형

주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 이 시행을 6번 하여 6회째에 사건 A가 일어났을 때, 3회째에도 사건 A가 일어났을 확률을 구하시오.

종속시행이 반복되는 경우

- <이해를 위한 예제 68번>을 조건부 확률 문제로 바꿔보았다. 앞의 해설을 차용하기로 한다.

구할 것 이 시행을 6번 하여 6회째에 사건 A가 일어났을 때, 3회째에도 사건 A가 일어났을 확률

- 미래의 결과, 과거의 확률을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(3\text{회째에도 } A \mid 6\text{회째에 } A) = \frac{P(3\text{회째 } A \to 6\text{회째 } A)}{P(6\text{회째 } A)}$$

- 위의 해설을 참조하면 <조건부 사건>을 2가지로 분할 할 수 있다.

$$\begin{aligned} P(6\text{회째 } A) &= P(3\text{회째 } A \to 6\text{회째 } A) + P(3\text{회째 } A^c \to 6\text{회째 } A) \\ &= P(3\text{회째 } A) \cdot P(6\text{회째 } A \mid 1,\ 1,\ 1) + P(3\text{회째 } A^c) \cdot P(6\text{회째 } A \mid 0,\ 1,\ 2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot P(6\text{회째 } A \mid 1,\ 1,\ 1) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \end{aligned}$$

⇨ (부연 설명) : $P(6\text{회째 } A \mid 1,\ 1,\ 1)$은 사실 $P(6\text{회째 } A \mid 3\text{회째 } A)$이다.
원래 3회째에 A가 나오는 상황은 1, 1, 1 또는 2, 2, 2 또는 3, 3, 3이지만 구체적으로 <사건과 표본공간을 분할하는 과정>에서 자연스럽게 <상황을 1, 1, 1로 고정>한 것이다.

⇨ $P(6\text{회째 } A \mid 1,\ 1,\ 1)$다음과 같이 <조건부 : 표본공간>을 분할하여 다시 상황을 정리 할 수 있다.

앞에서 $\frac{1}{3}$을 곱한 순간 <3회 시행 후 결과는 1, 1, 1>으로 고정된 <의미상 조건부>확률을 푼다.

조건부 : 1,1,1		조건부 : 1,1,2	$\frac{2}{3}\times$ 조건부 : 1,2,2	
2, 1, 1	4회 시행 ⇨	1, 2, 2	⇨ 5회	2, 2, 2
1, 2, 1		1, 1, 0		1, 0, 2 $\xrightarrow[\text{사건}A]{6\text{회째}}$ $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$
1, 1, 2			$\frac{1}{3}\times$ 조건부 : 1,1,0	
			⇨ 5회	1, 2, 0
				1, 1, 1 $\xrightarrow[\text{사건}A]{6\text{회째}}$ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

- <확률의 연산>없이 상황을 1,1,2로 고정한다.
- 1, 1, 2에서 1장을 뽑았을 때 2, 1, 2과 1, 2, 2는 같은 상황이므로 <비율의 면적화>에서 하나의 사건으로 처리했다.

- $P(6\text{회째 } A \mid 1,\ 1,\ 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

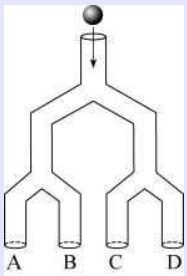
⇨ $$P(3\text{회째 } A \mid 6\text{회째 } A) = \frac{P(3\text{회째 } A \to 6\text{회째 } A)}{P(6\text{회째 } A)}$$

$$= \frac{P(3\text{회째 } A \to 6\text{회째 } A)}{P(3\text{회째 } A \to 6\text{회째 } A) + P(3\text{회째 } A^c \to 6\text{회째 } A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

정답은 $\frac{1}{3}$

082 이해를 위한 예제 2006. 10. 가형(12%), 나형(7%). 25번. 4점

아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에 공을 넣으면 A, B, C, D중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다. 예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다.



여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$ (a, b는 서로소인 자연수)라고 하자. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)

종속시행이 반복되는 경우처럼 풀어보자.

- <독립인 반복시행>도 당연히 <종속인 반복시행>처럼 <상황의 분할>과 <상황의 고정>을 통해서 풀 수 있다.
  단지 이렇게 되면 <독립>이라는 조건을 충분히 활용하지 않아서 좀 더 복잡하게 풀리는 것뿐이다.

표본공간	⇨	표본공간	상황 고정 후 ⇨	조건부 : A
	1회 시행 따른 표본공간의 영역분할	A	2회 시행에 따른 영역분할	AA
		B		AB
		C		AC
		D		AD

- 1회 시행에 의하여 분할된 각 상황은 모두 <1개의 전구만 켜진 상황>이다.
  즉, 분할된 각각에 대하여 <여섯 번째 모두 켜질 확률>은 같다. 그러므로 <확률의 연산>없이 상황을 A로 고정한다.

$\frac{1}{4}\times$: 곱하는 순간 상황 고정 ⇨ 조건부 : AA — AA인 상황은 여전히 모든 전구가 꺼진 상황	$\frac{3}{4}\times$: 곱하는 순간 상황 고정 ⇨ 3회 시행에 따른 영역분할 — 조건부 : AB: ABA, ABB, ABC, ABD

- 여기까지 상황을 정리해보면

$$P(6\text{번째 모두}) = P(6\text{번째 모두}\mid A) = \frac{1}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\mid AA) + \frac{3}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\mid AB)$$

여기에서 $P(6\text{번째 모두}\mid AA)$는 <의미상 조건부>로서 <모든 전구가 꺼진 상황>에서 <4번의 시행> 후 모든 전구가 켜질 확률이므로 $4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$이다. (- 부분적으로 <독립인 반복시행의 확률>의 방식으로 풀었다.)

$\frac{3}{4}\times$ ⇨ 3회 — 조건부 : AB: ABA, ABB, ABC, ABD	$\frac{1}{2}\times$ ⇨ 조건부 : ABA — ABA의 상황은 3회 시행 후 B하나의 전구만 켜져 있는 상황이다.	$P(6\text{번째 모두}\mid ABA)$의 상황은 남은 세 번의 시행에서 A, C, D가 각각 한 번씩 나와야 한다.
	$\frac{1}{2}\times$ ⇨ 조건부 : ABC — ABC의 상황은 3회 시행 후 A, B, C 세 전구에 불이 켜져 있는 상황이다.	$P(6\text{번째 모두}\mid ABC)$의 상황은 다음 시행에서 반드시 A, B, C 중 하나가 나와야 하는 상황이다.

- $P(6\text{번째 모두}\mid AB) = \frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\mid ABA) + \frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\mid ABC)$ - 뒷 장에서 계속

- 여기까지 상황을 정리해보면

$$P(6\text{번째 모두}) = P(6\text{번째 모두}\,|\,A) = \frac{1}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,AA) + \frac{3}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,AB)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{3}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,AB)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{3}{4}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,ABA) + \frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,ABC)\right\}$$

- 여기에서 $P(6\text{번째 모두}\,|\,ABA)$는 <의미상 조건부>로서 <B 전구만 켜진 상황>에서 <3번의 시행> 후 모든 전구가 켜질 확률이므로 세 번의 시행에서 A, C, D가 각각 한 번씩 나와야 하므로

$3!\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$이다. (- 부분적으로 <독립인 반복시행의 확률>의 방식으로 풀었다.)

- 여기에서 $P(6\text{번째 모두}\,|\,ABC)$는 <의미상 조건부>로서 <A B C 전구가 모두 켜진 상황>이고 다음과 같이 분할된다.

조건부 : ABC

$ABCA$
$ABCB$
$ABCC$
$ABCD$

$\frac{3}{4}\times$: 곱하는 순간 상황 고정 ⇨

조건부 : $ABCA$

$ABCA$의 상황은 3회 시행 후 B, C 두 전구에 불이 켜져 있는 상황이다.

- 여기에서 $P(6\text{번째 모두}\,|\,ABCA)$는 <의미상 조건부>로서 <$B$, C 전구만 켜진 상황>에서 <2번의 시행> 후 모든 전구가 켜질 확률이므로 두 번의 시행에서 A, D가 각각 한 번씩 나와야 하므로

$2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$이다. (- 부분적으로 <독립인 반복시행의 확률>의 방식으로 풀었다.)

즉, $P(6\text{번째 모두}\,|\,ABC) = \frac{3}{4}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,ABCA) = \frac{3}{4}\cdot 2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$이다.

결국 $P(6\text{번째 모두}) = \frac{1}{4}\cdot 4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{3}{4}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,ABA) + \frac{1}{2}\cdot P(6\text{번째 모두}\,|\,ABC)\right\}$

$$= \frac{1}{4}\cdot 4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{3}{4}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 3!\times\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2!\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\} = \frac{3}{32}$$

정답은 35

코칭 해설은 길지만 실제로 <상황을 고정>시키는 논리가 정착되어 있다면 그리 길지 않은 풀이과정을 통해서 해결할 수 있는 문제이다. (물론, 독립적 반복시행이므로 앞의 풀이가 더 효율적이다.)

코칭 <곱하는 순간>부터 <상황을 고정>하는 것에 대한 논리는 이미 <4. 비율을 느껴라>에서 공부한 바 있다. 이것이 <확률의 곱셈정리>의 핵심이고 기본 원리이다.
이 문제는 <독립적 선후시행>의 문제이기는 하지만 일반적인 원칙인 <확률의 곱셈정리> + <상황의 고정>을 통해서 풀 수도 있다는 것을 보여주기 위해 추가 해설을 실었다.

083 이해를 위한 예제

당첨제비 3개와 비 당첨제비 7개가 한 주머니에 담겨 있다. 이 주머니에서 1개 씩 4번을 제비를 뽑는 동안 당첨제비가 1번만 나올 확률을 구하시오. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

종속시행에서도 각각에 같은 확률이 나올 수 도 있다.

시행 1개 씩 4번을 제비를 뽑는 동안 + 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다. ⇨ 종속적 선후시행이다.

사건 당첨제비가 1번만 나올 확률

사건의 분석 4번의 시행에서 당첨제비가 한번만 나오는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

○×××	×○××	××○×	×××○
상황 1	상황 2	상황 3	상황 4

- $P(\text{상황 } 1) = P(\bigcirc\times\times\times) = \frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}$
- $P(\text{상황 } 2) = P(\times\bigcirc\times\times) = \frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}$

이 두 가지 상황을 살펴보면 1개씩 꺼내는 시행에서 제비의 개수가 1개씩 줄기 때문에 분모는 $10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7$의 규칙성을 갖는다는 사실을 알 수 있다. 분자 또한 <비 당첨제비>가 3번 나오기 위해 7, 6, 5의 순서로 숫자가 한 번씩 곱해져 있어야 하고, <당첨제비>도 1번 나오기 위해 3도 반드시 한 번 곱해져 있어야 한다.

그래서 비록 <종속적 반복시행>이지만 규칙성에 의해 <각각에 대하여 같은 확률 값>를 가지게 되고

$P(4\text{번 중 당첨제비 } 1\text{번}) = 4\times P(\bigcirc\times\times\times) = 4\times\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7} = \frac{1}{2}$

정답은 $\frac{1}{2}$

코칭 종속적 선후시행이라고 하더라도 <규칙성>을 느낄 수 있고 <각각에 대하여 같은 확률>이 나온다는 사실을 느낄 수 있다면 당연히 <확률 값>에 <발생할 수 있는 경우의 수>를 곱해도 상관없다.

학습조언. 제발 빨리 하려고 하지마라.
〈정확히〉 이해하면 반드시 빨라진다.

- 정확히 하면 오래 걸린다고? 절대 아니다. 그것은 식을 생략하지 않고 쓰는 것을 〈정확한 것〉이라고 착각하는 사람들의 말이다. 〈정확하다는 것〉은 〈의미를 정확히 안다.〉는 것을 뜻하는 것이지 〈교과서의 모든 공식〉을 의미 없이 암기한 다음, 문제풀이 식들을 모두 써서 나타낸다는 것을 뜻하지 않는다. 〈정확하게 알수록〉 오히려 식은 짧아진다.

- 〈정확한 것〉만이 〈올바른 직관〉으로 자연스럽게 넘어간다. 한 문제를 정확하게 이해하고 받아들이려고 노력하는 것은 한 문제를 그냥 푸는 것에 비해 굉장히 시간이 오래 걸리지만 수학 실력을 가장 빨리 올리는 길이다. 깨달음이 쌓이면 수학에 흥미가 생긴다. 남들이 못 보는 부분을 보기 시작하면 수학은 재미있어진다.

학습조언. 〈내용에 대한 고민〉과 〈방법에 대한 고민〉

- 한 번에 숲을 볼 수는 없다. 그것은 욕심이다. 일단, 나무를 하나하나 보다보면 어느 정도 안목이 생기면서 〈전체 숲의 모양〉이 머릿속에 자연스럽게 그려진다. 보통 공부에서의 〈숲과 나무에 대한 비유〉는 실제로 〈숲을 눈으로 본다.〉가 아니라 〈나무들을 보다보니 숲이 머릿속에 그려진다.〉가 적절하다. 그리고 이것은 역시 한 번에 되는 것이 아니므로 여러 번의 시행착오가 필요하다. (누군가의 도움을 받아 비행기를 타고 올라가서 숲을 한 번 보는 것은 답답함을 어느 정도 해소시켜줄 수 있다. 이것은 분명 학습을 지속하는 데 도움이 될 것이다. 하지만, 자신의 힘으로 직접 보는 것이 아니기 때문에 이를 통해 본인의 실전 실력이 길러질 것이라고 기대하기는 어렵다. 스스로의 노력을 통해 숲이 자연스럽게 그려지는 것이 가장 좋다.)

- 〈방법에 대한 고민〉을 최대한 빠르게 결론을 내린 다음, 〈내용에 대한 고민〉을 본격적으로 시작하면 생각보다 〈수학〉은 금방 잘하게 된다. 아쉽게도 아직 대부분의 학생들이 〈조금만 어려움에 처하면〉 다시 〈방법에 대한 고민〉을 하는 듯하다. 사람마다 차이가 있겠지만 대부분의 사람들은 〈공부하는 시간〉의 〈50% 이상〉을 〈내용의 고민〉이 아닌 〈방법의 고민〉에 쏟고 있다. 이는 바람직하지 않다.

〈(짧은) 내용 고민 → 이해가 안 됨 → (긴) 방법 고민〉

〈내용〉에는 정답이 있지만 〈방법〉에는 정답이 없다. 〈정답〉도 없는 〈방법에 대한 고민〉은 그만 하는 것이 좋다.

- 책과 강의에 대한 평가나 판단은 신경 쓸 필요 없다. 일단 시작했다면 아무리 나쁜 책이어도 고민하며 읽어라. 〈고민하며 읽는다면〉 자신에게는 가장 좋은 책이 된다. 그리고 반드시 도움이 된다. 집중해서 빨리 끝내고 다른 책으로 넘어가면 그만이다.

- 수많은 스타 강사들과 유수한 명사들이 일명 〈방법론〉이라고 불리는 〈방법에 대한 강조〉만 계속하고 있다. 이것이 내가 〈촌철살인〉을 쓴 이유이다. 〈내용에 대한 고민〉을 시작하고 정확하게 이해하며 학습한다면 고등수학 내용은 생각보다 많지 않다.

예제를 통해 개념의 외연을 넓혀라

개념의 외연	#1. 확률의 기본연산
	#2. 이항정리와 독립시행의 확률
	#3. 수열과 확률
	#4. 경우의 수의 맹점
	#5. 경우의 수로 풀기

<개념의 외연>이라는 부분은 현재 배우고 있는 경우의 수의 국한된 내용만 다루는 것은 아니다.
현재 단원에 해당하는 문제를 풀기 위해서 필요한 수학적 개념이나 유형에 필요한 사고방식을 두루 다룬다.

수학에는 순서가 없다. 하지만 배움에는 순서가 있다.

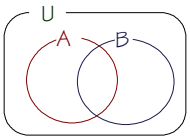
그래서 순서가 없는 수학에 순서를 정한 것이 교육과정이다. 어떤 내용은 너무 어렵거나 복합적인 생각들을 담고 있어서 여러 학년에 걸쳐 배운다. 이런 경우 보통은 문제를 통해서 익힌다는 느낌이 강한데 이런 개념들을 집약적으로 정리해 주는 부분이 될 것이다.

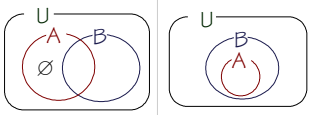
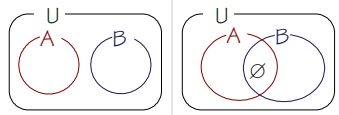
#1 확률의 기본 연산

1. 벤다이어그램 활용법

1) 벤다이어그램 표현법 : Venn의 표현법

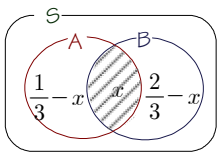
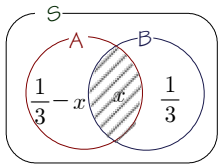
- 수학자 벤(Venn, J. : 1834~1923)은 1880년 그의 논문 「명제와 논리의 도식적 · 역학적 표현에 관하여」에서 처음으로 소개 벤 다이어그램을 소개하였다.
  두 집합의 관계가 명확하지 않은 경우에는 무조건 오른쪽과 같이 벤다이어그램을 그리면 된다.
  실제로 벤도 오른쪽의 벤다이어그램으로 모든 경우를 표현하였다.



$A \subset B$	$A \cap B = \varnothing$	$A = B$
		

- 위와 같이 실제로 벤은 폐곡선을 이용하여 집합을 표현하고 선으로 구분이 되는 영역을 기준으로 영역 안에 원소가 있으면 ○라고 표시하고 원소가 없으면 $\varnothing$라고 표시했다. 그래서 $\varnothing$을 공집합 기호를 쓰게 되었다.
  $\varnothing$은 의미 그대로 공집합 (empty set)이라고 읽거나 그리스 알파벳 중 모양이 비슷한 ϕ(phi)라고 읽는다.

2) 벤다이어그램 활용법

예시 1) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$	예시 2) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$
	 즉, $P(B) = \frac{1}{3}+x$

- 상황을 이해하기 위해 벤다이어그램을 적절하게 이용하는 것은 당연한 것이다.

2. 여러 가지 조건과 관계식

1) 조건부 확률	2) 여사건 조건
$P(A\|B) \Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$	$P(A^c) = p \Rightarrow P(A) = 1-p$
3) 독립조건	**4) 배반사건**
① $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ ② $P(A\,\|\,B) = P(A\,\|\,B^c) = p \Rightarrow P(A) = p$ ③ 앞에서 공부한 <십자가 분할>와 <면적화 개념>을 이용해서 풀 수도 있다. 중요한 것은 아니다.	$P(A\cup B) \Rightarrow P(A)+P(B)$

티칭 집합의 연산 법칙 활용 - 이 정도는 알아두는 게 좋다.

① $P(A-B) = P(A\cap B^c)$ - 여사건의 성질

② $P(A^c\cup B^c) = P((A\cap B)^c) = 1-P(A\cap B)$ - 드모르간의 법칙

③ $P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c) = 1-P(A\cup B)$ - 드모르간의 법칙

084 이해를 위한 예제 2006. 11. 나형(79%). 5번. 3점

두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $A\subset B$일 때, $P(A\,|\,B)$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

- 조건부 확률의 의미만 안다면 바로 풀 수 있는 문제이다.

- $A\subset B$이므로 $P(A\cap B) = P(A) = \frac{1}{4}$이다. 즉, $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{8}$이다.

정답은 ③

085 이해를 위한 예제 2010. 11. 나형(84%). 5번. 3점

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=P(A)-P(B)$일 때, $P(B)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

일반적 풀이

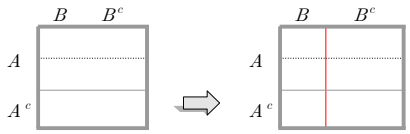
조건 두 사건 A와 B는 서로 독립, 조건 $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=P(A)-P(B)$ 구할 것 $P(B)$의 값

⇨ $P(B)=x$라 하면 $P(A\cap B)=\frac{2}{3}x$이다. (독립이므로)

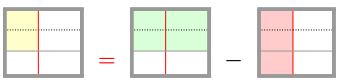
즉, 주어진 관계식 $P(A\cap B)=P(A)-P(B) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-x \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$

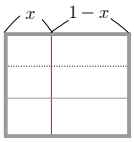
신기한 풀이 : 십자가 분할

- 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 <가로, 세로의 길이가 1인 정사각형>을 표본공간으로 하여 <십자가 분할>을 해보자. 두 사건이 차지하는 영역이 각각 십자가로 분할되는 경우 두 사건의 관계는 항상 독립이 된다는 것은 앞에서 학습했다.



- 먼저 $P(A)$의 면적이 $\frac{2}{3}$가 되도록 <가로 선>을 그어 표본공간을 분할한 후 <세로 선>을 그어 $P(B)$의 영역을 나타낸다.

⇨ $P(A\cap B)=P(A)-P(B)$의 조건을 만족시키려면 

즉, 

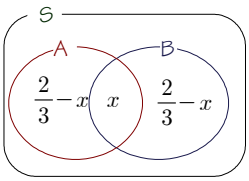
과 같이 길이를 x로 표시한 후 면적에 대한 식을 나타내면 $\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-x$이므로

위와 같은 결과를 얻을 수 있다.

교집합을 x로 잡았을 경우

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=P(A)-P(B)$에서 $P(A\cap B)=x$라고 두면 (오른쪽 벤다이어그램 참조)

$P(A\cap B)=P(A)-P(B) \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}-P(B) \Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}-x$이다.



두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B) \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-x\right) \Leftrightarrow x=\frac{4}{15}$

결국 $P(B)=\frac{2}{3}-x \Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{3}-\frac{4}{15} \Leftrightarrow P(B)=\frac{6}{15} \Leftrightarrow P(B)=\frac{2}{5}$이다.

정답은 ④

코칭 앞에서 배운 <사건의 독립과 종속>에 대해 다시 한 번 생각해 보자는 취지에서 <십자가 분할>을 해설로 넣었다. <독립과 종속>을 주제로 문제를 만들고자 하는 사람은 참조해 볼 만 하다.

코칭 이 유형의 문제는 쉽지만 반드시 나오는 유형이므로 몇 문제 더 다뤄보자. 다음 문제부터는 가장 간단한 풀이만 서술하겠다.

086 이해를 위한 예제 2010. 11. 나형(84%). 5번. 3점

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A^c\cap B)=P(A\cap B^c)$일 때, $P(B)$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

- 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $P(A^c\cap B) = P(A\cap B^c) \Leftrightarrow P(A^c)P(B) = P(A)P(B^c)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}P(B) = \frac{2}{3}P(B^c)$

이때 $P(B) = x$라 하면 $\frac{1}{3}P(B) = \frac{2}{3}P(B^c) \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}(1-x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

즉, $P(B) = \frac{2}{3}$이므로 정답은 ⑤

087 이해를 위한 예제 2008. 11. 나형(64%). 26번. 3점

두 사건 A, B에 대하여 $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B^c)=\frac{2}{3}$이며 $P(B|A)=\frac{1}{6}$일 때, $P(A^c|B)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

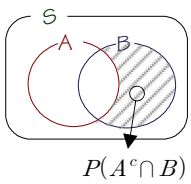
- $P(B^c) = \frac{2}{3}$을 보자마자 $P(B) = \frac{1}{3}$을 구하는 것은 습관이다.

- 독립이라는 조건이 없으므로 $P(B|A) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{12}$

결국 $P(A^c|B) = \frac{P(A^c\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)}$ (여사건의 성질) $= \frac{P(B) - P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

정답은 ④

티칭 오른쪽 그림에서 $P(A^c\cap B) = P(B-A)$이 나타내는 부분의 면적은 $P(B)$가 타나내는 면적에서 $P(A\cap B)$가 나타내는 면적을 빼면 된다. $P(B-A) \neq P(B) - P(A)$임에 유념하자.



$P(A^c\cap B)$

088 이해를 위한 예제 2005. 11. 나형(69%). 4번. 3점

사건 전체의 집합 S의 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고, $A \cup B = S$, $P(A) = 2P(B)$일 때, $P(A)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고, $A \cup B = S$이므로 $P(A)+P(B) = 1$이다.

또한 $P(A) = 2P(B)$이므로 $P(B) = x$라 두면 $P(A)+P(B) = 1 \Leftrightarrow 2x+x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$이다.

즉, $P(A) = \frac{2}{3}$이므로 정답은 ①

#2 이항정리와 독립시행의 확률

- <독립시행의 확률>은 <이항정리>와 연결되어 나올 수 있다.
- <촌철살인 확률과 통계 1>에서 이항정리의 내용을 <반드시> 복습한다. - 사실 복습하라고 실어놓은 내용이다.

1. 이항계수의 성질 - 성급한 일반화

- 항등식 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + \cdots + {}_nC_r x^r + \cdots + {}_nC_n x^n$을 통해서
  이항계수 ${}_nC_0$, ${}_nC_1$, $\cdots$, ${}_nC_n$에 대한 성질을 유도할 수 있다.

① 연속 합 ($x = 1$대입)

⇨ ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

② 교대 합 ($x = -1$대입)

⇨ ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n(-1)^n = 0$

③ 짝수 합 : ①의 식 + ②의 식

⇨ $2({}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막짝수}}) = 2^n \Leftrightarrow {}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막짝수}} = 2^{n-1}$

④ 홀수 합 : ①의 식 − ②의 식

⇨ $2({}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막홀수}}) = 2^n \Leftrightarrow {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{\text{마지막홀수}} = 2^{n-1}$

- <촌철살인 확률과 통계 1>에서 배운 <이항계수의 성질>은 어디까지나 <기본 원리로부터 증명되어진 공식>이다.

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r} b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

- <$a = 1$, $b = x$>를 대입한 다음, <x의 자리에 1, -1>을 넣어 구한 식들을 더하거나 빼서 만들어낸 <가공된 식>이다.

- 위의 식으로부터 흔히 할 수 있는 착각은

$${}_{2n}C_0\, a^{2n} b^0 + {}_{2n}C_2\, a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} a^0 b^{2n} \Rightarrow (a+b)^{2n-1}\text{이다.}$$

  이 식은 명백히 오류이며 <외운 공식>이 아니다. <이항계수의 성질 - 짝수 합>과 증명의 원리가 같으므로 간단한 원리로부터 식을 이끌어내야 한다.

- 올바른 식

  ${}_{2n}C_0\, a^{2n} b^0 + {}_{2n}C_1\, a^{2n-1} b^1 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} a^1 b^{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} a^0 b^{2n} = (a+b)^{2n} \cdots$ ㉠

  으로부터 b의 자리에 $(-b)$를 대입하면

  ${}_{2n}C_0\, a^{2n} (-b)^0 + {}_{2n}C_1\, a^{2n-1} (-b)^1 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} a^1 (-b)^{2n-1} + {}_{2n}C_{2n} a^0 (-b)^{2n} = (a-b)^{2n} \cdots$ ㉡

  그 다음 ㉠ + ㉡을 통해서

  $2 \cdot ({}_{2n}C_0 a^{2n} b^0 + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} a^0 b^{2n}) = (a+b)^{2n} + (a-b)^{2n}$이므로

  $\Leftrightarrow {}_{2n}C_0 a^{2n} b^0 + {}_{2n}C_2 a^{2n-2} b^2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} a^0 b^{2n} = \dfrac{(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n}}{2}$임을 알 수 있다.

089 이해를 위한 예제 2010. 3. 가형(37%). 28번. 4점

여섯 면에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀있는 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 100번 반복하여 던질 때, 3의 배수가 k번 나올 확률을 $P(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{50}\{P(2k-1)-P(2k)\}$의 값은?

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ ④ $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$ ⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{50}-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$

조건 주사위를 100번 반복하여 던질 때, 3의 배수가 k번 나올 확률을 $P(k)$

⇨ n회의 독립시행에서 <특정사건>이 k번 나올 확률이므로 <독립시행의 확률 공식>을 쓸 수 있는 구조이다.

1회 시행 주사위를 3의 배수가 나올 확률 ⇨ 1회 시행에서 3의 배수가 경우를 사건 A라 하면 $P(A) = \frac{1}{3}$

독립시행의 확률 주사위를 100번 반복하여 던질 때, 3의 배수가 k번 나올 확률을 $P(k)$

⇨ 100회의 독립시행 중 사건 A가 k회 발생할 확률은 $P(k) = {}_{100}C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}$

구할 것 $\sum_{k=1}^{50}\{P(2k-1)-P(2k)\}$의 값 ⇨ 여기에서부터는 <이항정리 문제>이다. <시그마>는 항상 나열된 식의 구조로 생각한다.

- $\sum_{k=1}^{50}\{P(2k-1)-P(2k)\}$

$$= \{P(1)-P(2)\}+\{P(3)-P(4)\}+\cdots+\{P(99)-P(100)\}$$

$$= \boxed{{}_{100}C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{99}-{}_{100}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{98}+\cdots+{}_{100}C_{99}\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\left(\frac{2}{3}\right)^1-{}_{100}C_{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^0}$$

$$= -{}_{100}C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+\boxed{{}_{100}C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{99}-{}_{100}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{98}+\cdots+{}_{100}C_{99}\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\left(\frac{2}{3}\right)^1-{}_{100}C_{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^0}+{}_{100}C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

$$= -\left\{{}_{100}C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-{}_{100}C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{99}+{}_{100}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{98}-\cdots+{}_{100}C_{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^0\right\}+{}_{100}C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$$

$$= -\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^{100}+{}_{100}C_0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

정답은 ②

티칭 이항전개식 간단히 정리하기. - <촌철살인 확률과 통계 1>에 나온 내용이다. 이 책의 Part 4의 개념의 외연 #3에도 한 번 더 정리해 두었다.

1) 변동수 확인 : 0부터 끝까지 → 2) 지수 확인 : 변동수와 같은 지수 → 3) 지수 합 확인 : 지수 합 = 고정수

#3 수열과 확률

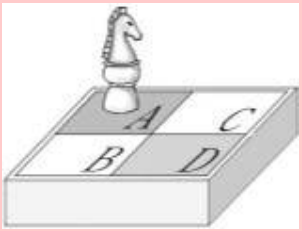
- 확률과 수열이 서로 연결될 경우, 문제의 초점은 수열에 맞춰진다. 예를 들어 <점화식>과 <확률>이 엮여있는 문제가 있다면 <점화식>을 소재로 <확률>을 냈다고 생각하기보다 <확률>을 소재로 <점화식>을 낸 것이라고 생각하는 것이 맞다.

- 점화식으로 표현하기에 적절한 확률의 상황은 반복된 <시행의 결과>가 <두 가지>로만 정리되는 상황이다. 아니면 점화식으로 표현하기 너무 복잡하다.

- 수능에서는 아무리 어려워도 <n회 시행 후 결과>와 <$n+1$회 시행 후 결과>를 비교하여 관계식을 세우는 <이항 간 점화식>까지만 나올 것으로 생각된다. 물론, 최근(2016년 이후)에는 이것마저도 나올 가능성이 굉장히 낮다. <n회 시행 후 결과>, <$n+1$회 시행 후 결과>, <$n+2$회 시행 후 결과>를 비교하여 관계식을 세우는 <삼항 간 점화식>은 상당히 어려운 주제이며 최근에는 논술에도 잘 나오지 않는다.

090 이해를 위한 예제 2010. 3. 가형(52%). 16번. 4점

그림과 같은 말과 말판이 있다. 말은 한 번에 한 칸씩 인접한 칸으로 움직이는 데 인접한 각 칸으로 이동할 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어 A에 있던 말이 A와 인접한 칸인 B, C로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 처음으로 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $P_2 = \frac{1}{2}$ ㄴ. $P_{2n+2} = \frac{1}{2}P_{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{1023}{1024}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

조건 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 처음으로 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때,
- 이미 문제에서 <점화식>이라는 암시를 준 문제이므로 간단히 풀 수 있다.

추론의 과정 <1회 시행>후에는 말이 반드시 B 또는 C에 존재하게 된다. <2회 시행>후에는 말이 반드시 A 또는 D에 존재하게 된다. 이런 몇 번의 과정을 통해서 <말이 홀수 번 움직일 경우 : B or C에 존재>
<말이 짝수 번 움직일 경우 : A or D에 존재>
의 사실을 알 수 있다. 즉, $P_{홀수} = 0$이다.

ㄱ. $P_2 = \frac{1}{2}$ ⇨ <2번 이동하여 처음으로 D>에 도착할 확률은 <$B \to D$> or <$C \to D$>이다.

즉, $P_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $P_{2n+2} = \frac{1}{2}P_{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ ⇨ <$2n+2$회 시행 후 처음으로 D에 도착할 확률 P_{2n}>은
<2회 시행 후 $A \to 2n$회 시행 후 처음으로 D>으로 생각할 수 있으므로

$P_{2n+2} = P(2회\ 시행\ 후\ A) \times P(2n회\ 시행\ 후\ 처음으로\ D \mid 2회\ 시행\ 후\ A) = \frac{1}{2} \times P_{2n}$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{1023}{1024}$ ⇨ ㄱ, ㄴ을 풀었다면 ㄷ은 간단한 등비수열의 합에 불과하다.

$$\sum_{k=1}^{10} P_k = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 + P_{10} \text{ (홀수 번째 항은 모두 0이다.)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{32} \text{이므로 (거짓)}$$

정답은 ②

티칭 어디 부분이 틀렸을까?

- 〈$2n$회 시행 후 처음으로 D에 도착할 확률〉은 P_{2n}이므로 〈$2n$회 시행 후 여전히 A에 있을 확률〉은 $1-P_{2n}$이다. 어차피 $2n$번째에는 A 또는 D에 있을 것이기 때문이다.

  〈$2n$회 시행 후 A에 존재 → 2회 시행 후 D에 도착〉이므로 $P_{2n+2} = (1-P_{2n}) \cdot \frac{1}{2}$

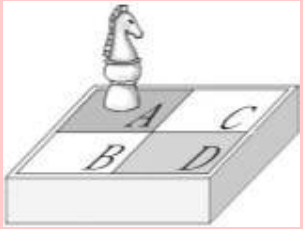
- 충분히 가능한 착각이다.

  $1-P_{2n}$은 〈$2n$회 시행 후 처음으로 D에 도착하는 경우가 아닌 확률〉이다. 이것은 〈$2n$회 시행 후 반드시 A에 존재〉한다는 것을 의미하지는 않는다. 단어 그대로 〈처음으로 D에 도착하는 경우가 아닌 확률〉이므로 2번째 시행에서 D를 거쳐 $2n$번째 시행에서 D에 있는 경우도 〈처음으로 D에 도착하는 경우가 아닌 확률〉에 포함된다. $1-P_{100}$정도로 예를 들어보면 〈100번의 시행 동안 중간에 D를 적어도 한 번 이상 거친 모든 경우〉가 확률 값 $1-P_{100}$에 포함된다. 따라서 이 문제는 $1-P_{2n}$을 활용하여 식을 세울 수 없다.

- 점화식을 세우는 문제를 푸는 것을 보면 학생이 얼마나 꼼꼼히 문제를 읽고, 정확히 추론하는지를 알 수 있다. 말 한마디 차이로 식이 달라지기 때문이다. 위의 문제에서 〈처음으로〉라는 말을 빼면 또 다른 문제가 된다.

091 이해를 위한 예제 2010. 3. 가형(52%). 16번. 4점 - 변형

그림과 같은 말과 말판이 있다. 말은 한 번에 한 칸씩 인접한 칸으로 움직이는 데 인접한 각 칸으로 이동할 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어 A에 있던 말이 A와 인접한 칸인 B, C로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 D에 존재할 확률을 P_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{20} P_k$을 구하여라.



조건 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때,

추론의 과정 <1회 시행>후에는 말이 반드시 B 또는 C에 존재하게 된다. <2회 시행>후에는 말이 반드시 A 또는 D에 존재하게 된다. 이런 몇 번의 과정을 통해서 <말이 홀수 번 움직일 경우 : B or C에 존재>
<말이 짝수 번 움직일 경우 : A or D에 존재>
의 사실을 알 수 있다. 즉, $P_{홀수} = 0$이다.

점화식 <$2n$회 시행 후 D에 존재할 확률 P_{2n}>이라면 <$2n$회 시행 후 A에 존재할 확률 $1-P_{2n}$>이다.
<$2n+2$회 시행 후 D에 존재>하려면
<$2n$회 시행 후 A → 2회 시행 후 D> 또는 <$2n$회 시행 후 D에 존재 → 2회 시행 후 다시 D>

즉, $P_{2n+2} = \frac{1}{2}\times P_{2n} + \frac{1}{2}\times(1-P_{2n}) = \frac{1}{2}$이므로 $\sum_{k=1}^{20} P_k = 10\times\frac{1}{2} = 5$

정답은 5

092 이해를 위한 예제 무한등비급수

갑, 을, 병 세 사람이 갑, 을, 병의 순서로 주사위를 던져서 가장 먼저 3의 눈이 나오는 사람이 승자가 되는 게임을 하고자 한다. 갑이 먼저 시작하여 3의 눈이 나올 때까지 주사위를 던진다고 할 때, 을이 승자가 될 확률은?
(단, 주사위의 각 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{36}$ ③ $\frac{30}{91}$ ④ $\frac{75}{154}$ ⑤ $\frac{25}{216}$

조건 갑, 을, 병의 순서로 주사위를 던져서 가장 먼저 3의 눈이 나오는 사람이 승자가 되는 게임

구할 것 갑이 먼저 시작하여 3의 눈이 나올 때까지 주사위를 던진다고 할 때, 을이 승자가 될 확률

⇨ 을이 승자가 되는 상황은 <갑× → 을○> 또는 <갑× → 을× → 병× → 갑× → 을○> …

각 사건은 서로 독립이므로 $P(\text{을 승자}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7\cdot\frac{1}{6} + \cdots$

즉, $P(\text{을 승자})$은 초항이 $\frac{5}{36}$이고 공비가 $\left(\frac{5}{6}\right)^3$인 무한등비급수이다. $P(\text{을 승자}) = \dfrac{\frac{5}{36}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{30}{91}$

정답은 □

#4 경우의 수의 맹점

논술주제이다. 넘어가도 좋다.

- 대표적인 소재로 <같은 것을 포함한 원순열>과 <최단거리 문제>가 있다.
  이 정도만 딱 기억하면 된다. (더 이상의 상상력을 억제하는 것이 정신건강에 좋다. 수학은 끝이 없기 때문에 딱 이 정도면 심화로 충분하다.)

1. 같은 것을 포함한 원순열

1) 같은 것을 포함한 순열

- <같은 것을 포함한 순열 공식>을 활용해서 <수학적 확률>로 계산할 수 있을까?

⇨ 예를 들어 A, A, A, B, B를 임의로 배열할 때, A와 B가 서로 교대로 배열될 확률을 생각해보자.

방법 1 확률에서는 같은 문자도 다른 문자로 취급한다. 그러므로 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 라고 생각하면

A와 B가 서로 교대로 배열되는 경우는 | A 자리 | B 자리 | A 자리 | B 자리 | A 자리 | 의 경우 밖에 없다. 따라서 모든 경우의 수를 구해보면

A의 자리에 A_1, A_2, A_3을 배열하는 경우의 수(3!가지) × B의 자리에 B_1, B_2를 배열하는 경우의 수(2!가지)

$n(A$와 B가 교대로 배열$) = 3! \cdot 2!$ ⇨ $P(A$와 B가 교대로 배열$) = \dfrac{3! \cdot 2!}{5!}$

방법 2 같은 것을 포함한 순열의 공식을 이용한다. A, A, A, B, B를 배열할 때, A와 B가 서로 교대로 배열되는 경우의 수는 A, B, A, B, A 한 가지 뿐이다. ⇨ $P(A$와 B가 교대로 배열$) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{5!}{3! \cdot 2!}\right)} = \dfrac{3! \cdot 2!}{5!}$

결론적으로 같은 결과가 나온다.

설명 <비율의 면적화>를 이용해서 간단히 설명할 수 있다.

모두 다른 문자로 취급하고 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2라고 생각할 경우, $n(S) = 5!$라고 계산되며

표본공간은 5!가지의 영역으로 동등하게 분할된다. 이때, $AAABB$로 배열된 경우는 $3! \cdot 2!$가지 존재

$AABAB$로 배열된 경우는 $3! \cdot 2!$가지 존재

⋮

이처럼 <같 · 포 · 순>으로 배열된 $\left(\dfrac{5!}{3! \cdot 2!}\right)$가지의 경우는 모두 <표본공간에서 같은 면적>을 차지한다.

<같 · 포 · 순> 공식을 이용하여 $n(S) = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$라고 계산했을 경우,

표본공간을 분할한 $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!}$가지의 영역은 모두 표본공간을 <동일한 면적으로 분할>하기 때문에

<근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대>된다고 말할 수 있고,

<근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대>된다는 것은 <수학적 확률>로 답을 구할 수 있다는 것을 의미한다.

2) 원순열

- <같은 것을 포함한 순열 공식>을 활용해서 <수학적 확률>로 계산할 수 있을까?

⇨ 예를 들어 A, B, C 세 가지 색을 원판 에 칠한다고 해보자.
이때, A를 기준으로 하여 시계 반대방향으로 B, C 가 B, C 순으로 색칠될 확률을 생각해보자.
(단, 각 부채꼴의 중심각은 모두 120° 이다.)

방법 1 확률에서는 같은 자리도 다른 자리로 취급한다. A, B, C 가 색칠되는 각 영역을 모두 <서로 다른 구분이 되는 자리>라고 생각해보자. 이때, A, B, C 가 색칠되는 경우의 수는 $3!$가지이다.
(촌철살인 확률과 통계 1에서 원순열의 본질은 <구분이 되지 않는 자리>임을 자세히 설명한 바 있다.)
세 자리가 모두 <구분이 되는 자리>라면, A를 기준으로 하여 시계 반대방향으로 B, C 가 B, C 순으로 색칠되는 경우의 수는 3가지이다. 그러므로 $P(\text{시계 반대 방향으로 } A \to B \to C) = \frac{3}{3!} = \frac{1}{2}$

방법 2 <원순열>을 이용하여 생각해보자. A, B, C 를 에 색칠하는 경우의 수는 $\frac{3!}{3} = 2$가지이다. (원순열의 수)
이 중에서 A를 기준으로 하여 시계 반대방향으로 B, C 가 B, C 순으로 색칠되는 경우의 수는 1가지뿐이다.
그러므로 $P(\text{시계 반대 방향으로 } A \to B \to C) = \frac{1}{2}$
역시 결과적으로 같은 확률이 나온다.

설명 <비율의 면적화>를 이용해서 간단히 설명할 수 있다.
의 세 자리를 <서로 다른 구분이 되는 자리>라고 생각할 경우, $n(S) = 3!$이라고 계산되며
표본공간은 $3!$가지의 영역으로 동등하게 분할된다.
위의 상황에서 회전해서

인 경우는 3가지 존재하고,

인 경우는 3가지 존재한다.
이처럼 <원순열>로 배열된 2가지 경우는 각각 <표본공간에서 같은 면적>을 차지한다.

<원순열> 공식을 이용하여 $n(S) = 2$라고 계산했을 경우,
표본공간을 분할한 2가지의 영역은 모두 표본공간을 <동일한 면적으로 분할>하기 때문에
<근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대>된다고 말할 수 있고,
<근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대>된다는 것은 <수학적 확률>로 답을 구할 수 있다는 것을 의미한다.

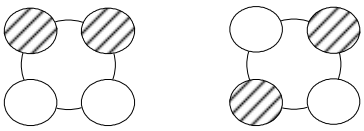
3) 같은 것을 포함한 원순열

- 2008 고려대 수시논술 (일부발췌)

[가] 어떤 시행의 표본공간 S가 n개의 근원사건으로 이루어져 있고 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 사건 A가 r개의 근원사건으로 이루어져 있으면 사건 A가 일어날 확률 $P(A)$를 다음과 같이 정의하고 그것을 수학적 확률이라고 한다.

$$P(A) = \frac{r}{n}$$

예를 들어 검은구슬 두 개와 흰 구슬 두 개를 꿰어 염주를 만드는 경우를 생각해 보자. 구슬 색의 배치에 따라 다음과 같이 두 가지 종류의 염주를 만들 수 있다.

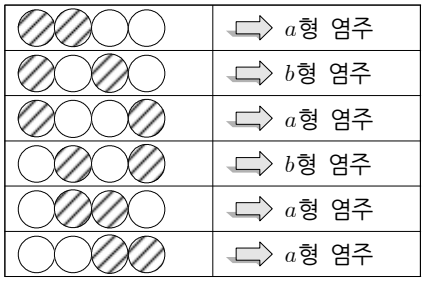


a형 염주 b형 염주

구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치할 때 a형 염주가 만들어지는 사건을 A라 하자.
표본공간 S가 두 개의 근원사건으로 이루어져 있으며 사건 A는 한 개의 근원사건으로 이루어져 있으므로 사건 A가 일어날 확률 $P(A)$는 $P(A) = \frac{1}{2}$이다.

문제) [가]의 확률이 잘못된 부분을 서술하고 올바른 확률을 구하여라.

- 구슬의 색을 보지 않고 임의로 구슬을 배치하는 모든 경우를 나열해보면 다음과 같다.
  (같은 것을 포함한 순열의 가능한 모든 경우로 나열해도 상관없다.)



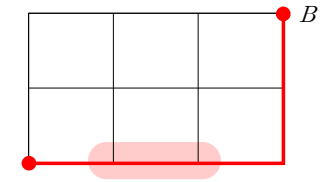
- 이와 같이 <각 근원사건이 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되는> 6가지 중 a형 염주가 나오는 가짓수는 4가지이므로 $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- 이와 같이 표본공간 S를 2개의 근원사건으로 나눌 때 <a형 염주>와 <b형 염주>는 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않으므로 <수학적 확률>을 구할 수 없다.

2. 최단거리 문제

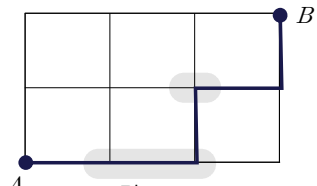
1) 같은 것을 포함한 순열

- 최단거리 문제 역시 <같은 것을 포함한 순열>로 계산할 경우 각 경우가 표본공간을 동일한 비율로 분할하지 않는다.
  이 역시 직관적으로 판단하기 어렵다.

- 예를 들어 갈림길에서 임의로 길을 선택한다고 할 때 A에서 B로 가는 각 경로에 따른 확률 값을 알아보자.



<경로 1>



경로 2

- <경로 1>의 경우 A에서 B까지 가는 길에 갈림길은 에서 두 번만 존재한다. (나머지는 외길이다.)

  즉, 임의로 길을 선택하여 간다고 할 때 <경로 1> 와 같이 갈 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$이다.

- <경로 2>의 경우 A에서 B까지 가는 길에 갈림길은 와 에서 총 세 번 존재한다.

  즉, 임의로 길을 선택하여 간다고 할 때 <경로 2> 와 같이 갈 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$이다.

⇨ 이처럼 <최단경로 문제>는 <최단경로로 가는 경우의 수> 각각에 대하여 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않기 때문에 <수학적 확률>을 통해서 풀 수 없다.

⇨ 이런 <경우의 수의 맹점>에 의해 <직관적으로 인지하기 어려운 경우>는 큰 시험에는 문제로 나오기 어렵다.

⇨ 찝찝하다면 딱 여기까지 기억하고 넘어가면 된다.
<같은 것을 포함한 원순열>과 <최단거리문제>에서 확률을 구할 때는 조심!! (어차피 안 나올 가능성이 크지만)

#5 경우의 수로 풀기

- 가능은 하지만 굳이 그럴 필요가 있을까?
- 재미로 볼 사람들만 보면 된다.

1. 무엇이든 경우의 수로 풀 수 있다?

종속적 선후 시행

- 예를 통해 간단히 이해한다.

⇨ 주머니에 1, 2, 3, 4가 적힌 크기와 모양이 같은 4개의 공이 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내 홀수의 눈이 나오면 공을 다시 넣은 후 같은 주머니에서 한 개의 공을 꺼내고 짝수의 눈이 나오면 1, 2가 적힌 크기와 모양이 같은 공이 2개가 들어있는 주머니에서 1개의 공을 꺼낸다. 이때 나온 두 수의 합이 짝수일 확률

- 이것에 대해 <비율의 면적화>를 해보면 각 근원사건은 일어날 가능성이 같은 정도로 기대되지 않는다는 것을 쉽게 알 수 있다.

<선 시행>에서의 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

1
2
3
4

⇨

<선 시행>에 따른 <후 시행>에서 영역분할
표본공간 S (전체면적=1)

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)		(2, 2)	
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)		(4, 2)	

- 여기에서 우리는 근원사건을 억지로 조작함으로서 <일어날 가능성이 같은 정도로 기대되도록> 만들 수 있다.
즉, 짝수가 나왔을 때 <1번 공 2개, 2번 공 2개>든 주머니에서 공을 꺼낸다고 가정하면

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 2)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
(4, 1)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 2)

표본공간은 위와 같이 표현될 수 있고 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$를 통해서 확률 값을 구할 수 있게 된다.

즉, 비율을 적당히 조작해 주기만 한다면 얼마든지 <$\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$>로 확률 값을 구할 수 있지만 <확률의 덧셈정리와 곱셈정리>의 사고방식을 익혔으므로 그럴 필요가 없는 것이다.

2. 무엇이든 확률의 연산으로 풀 수 있다?

억지로 시간의 순서를 두다.

- <확률의 덧셈정리와 곱셈정리>를 이용하여 특정한 사건 A의 확률을 구하려면
  A를 반드시 <선행사건과 후행사건의 합 사건과 곱사건>으로 분할해야 한다.
  <시간의 순서>가 없는 <복합시행>에서도 <선행사건과 후행사건의 합 사건과 곱사건>으로 분할 할 수 있을까?
  결론부터 이야기하면 복합시행은 독립적 선후시행이나 종속적 선후시행으로 대응시킬 수 있기 때문에 가능하다.

⇨ 예를 들어 독립적 선후시행으로 대응시킬 수 있는 경우를 살펴보자.
- 1, 2, 3, 4 가 하나씩 적힌 정사면체 주사위를 2개 던지는 <복합시행>을
  1, 2, 3, 4 가 하나씩 적힌 정사면체 주사위를 2번 던지는 <독립적 선후시행>에 대응시킬 수 있다.

⇨ 이번엔 종속적 선후시행으로 대응시킬 수 있는 경우를 살펴보자. (2단계로 구성)
- 1, 2, 3, 4가 적힌 공이 1개씩 들어있는 주머니에서 2개의 공을 꺼내는 상황을 생각해보자.

1 단계 먼저 이 상황을 2개의 공을 꺼내어 **배열**하는 상황에 대응시켜도 상관없음을 이해한다.

표본공간 S (전체면적=1)

(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)

⇨

변형된 표본공간 S´ (전체면적=1)

(1, 2)	(2, 1)	(1, 3)	(3, 1)	(1, 4)	(4, 1)
(2, 3)	(3, 2)	(2, 4)	(4, 2)	(3, 4)	(4, 3)

위의 표는 <원래 표본공간 S>의 모든 근원사건이 이등분된 상황이다.
주어진 문제의 상황에서 <표현될 수 있는 모든 사건>이 <원래 표본공간 S>에서 차지하는 면적과 <변형된 표본공간 S´>에서 차지하는 면적이 같을 수밖에 없음을 이해하다.

예를 들어 위의 두 공에 적힌 수의 <합이 짝수>인 사건이 일어날 확률은 둘 다 $\frac{1}{3}$이다.

2 단계 결국 1, 2, 3, 4가 적힌 공이 1개씩 들어있는 주머니에서 2개의 공을 꺼내는 상황은
⇨ 1, 2, 3, 4가 적힌 공이 1개씩 들어있는 주머니에서 2개의 공을 꺼내어 배열하는 상황에 대응되고
⇨ 이것은 다시 1, 2, 3, 4가 적힌 공이 1개씩 들어있는 주머니에서 1개씩 두 번 공을 꺼내는 상황에 대응시킬 수 있다. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

093 이해를 위한 예제

흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어있는 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 2개 나올 확률을 구하면 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}$이다.

다음 물음에 답하여라.

(1) 이것을 $\frac{{}_3P_2}{{}_5P_2}$로 구해도 상관없는 이유를 설명하여라.

(2) 이 확률을 확률의 곱셈정리의 사고방식을 이용하여 계산해 보아라.

이런 문제는 나오지 않는다. 단지 앞의 설명을 한 번 더 생각해보는 차원에서 보고 넘어갈 것.

- 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어있는 주머니 ⇨ 흰 공 3개와 검은 공 2개를 각각 W_1, W_2, W_3, B_1, B_2라고 한다.

(1) 이것을 $\frac{{}_3P_2}{{}_5P_2}$로 구해도 상관없는 이유를 설명하여라.

시행 2개의 공을 꺼낼 때, ⇨ $n(S) = {}_5C_2$

사건 흰 공이 2개 나올 확률 - 표본공간의 원소 중 흰 공이 2개가 나오는 경우의 수는 ${}_3C_2$이다.

표본공간을 관찰함으로서 배열을 해도 <비율 값>이 변하지 않음을 알 수 있다.

표본공간 S : 복합시행

상황 1 : 흰 공 2개	W_1 W_2
	W_1 W_3
	W_2 W_3
상황 2 : 흰 공 1개, 검은 공 1개	W_1 B_1
	W_1 B_2
	W_2 B_1
	W_2 B_2
	W_3 B_1
	W_3 B_2
상황 3 : 검은 공 2개	B_1 B_2

$P(\text{흰 공 2개}) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$

⇨

상황 1 : 흰 공 2개	W_1 W_2	W_2 W_1
	W_1 W_3	W_3 W_1
	W_2 W_3	W_3 W_2
상황 2 : 흰 공 1개, 검은 공 1개	W_1 B_1	B_1 W_1
	W_1 B_2	B_2 W_1
	W_2 B_1	B_1 W_2
	W_2 B_2	B_2 W_2
	W_3 B_1	B_1 W_3
	W_3 B_2	B_2 W_3
상황 3 : 검은 공 2개	B_1 B_2	B_2 B_1

$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{{}_3C_2 \times 2!}{{}_5C_2 \times 2!} = \frac{{}_3P_2}{{}_5P_2} = \frac{3}{10}$

(2) 이 확률을 확률의 곱셈정리의 사고방식을 이용하여 계산해 보아라.

⇨ 위의 <면적화 된 표본공간>에서 <1개씩 2번 뽑아도> ${}_nP_2$와 같은 비율로 표본공간을 분할한다는 사실을 알 수 있다. 즉, $P(\text{흰 공 2개}) = P(\text{흰 공} \rightarrow \text{흰 공}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

정답은 □

코칭 위와 같이 배열을 고려되면 모든 근원사건이 동일하게 분할되는 효과가 있기 때문에 전체 확률 값에는 영향을 주지 않는다. $\frac{3}{10}$을 $\frac{6}{20}$으로 구해도 상관없는 것은 당연한 일이다.

코칭 가능은 하지만 굳이 그럴 필요가 있을까?

일단 풀고 맞았다고 하더라도 뒤의 해설을 정독하여 읽는다. 왜냐하면 풀이과정이 암기되어서 문제가 그냥 풀리거나 그냥 직관적으로 판단이 되어서 문제가 풀리는 경우도 많기 때문이다. 우리가 문제를 푸는 이유는 앞에서 배운 개념을 확인하기 위해서다. 이 문제를 푸는 것이 중요한 게 아니라 다른 어려운 문제에까지 적용할 수 있는 개념을 익히는 게 중요한 것이다.

예제 025

주머니 속에 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어있다. A부터 시작하여 A, B가 교대로 하나씩 꺼내는 일을 계속할 때, 먼저 흰 공을 꺼내는 쪽이 이기는 것으로 한다. 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때, A가 이길 확률은?

예제 026

2011. 11. 가형(74%). 13번. 3점

상자 A에는 빨간 공 3개와 검은 공 5개가 들어있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 [실행 1]을, 빨간 공이 나오지 않으면 [실행 2]를 할 때, 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1일 확률은?

[실행 1] 꺼낸 공을 상자 B에 넣는다. [실행 2] 꺼낸 공을 상자 B에 넣고, 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣는다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

예제 027

2008. 7. 가형(%), 나형(%). 16번. 4점

A학생의 주머니에는 빨간 구슬 2개와 노란 구슬 3개, B학생의 주머니에는 노란 구슬 1개와 파란 구슬 4개가 들어 있다. 두 명의 학생이 각자의 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 색깔에 따라 승부를 가리는데, 빨간 구슬이 노란 구슬에 이기고, 노란 구슬은 파란 구슬에 이기고, 파란 구슬은 빨간 구슬에 이긴다고 한다. 이때, A학생이 이길 확률은? (단, 같은 색의 구슬이 나왔을 때는 구슬을 한 개씩 더 꺼내어 승부를 가리고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

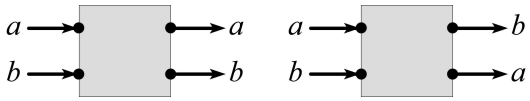
① $\frac{29}{50}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{33}{50}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{37}{50}$

예제 028

2007. 10. 가형(68%), 나형(51%). 16번. 4점

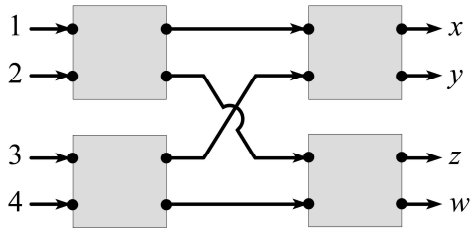
그림은 왼쪽의 입력 신호 a, b 를 오른쪽으로 전달하여 신호를 출력하는 장치를 나타낸 것이다.

이 장치가 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.



[그림1] [그림2]

이 장치 4개를 아래 그림과 같이 연결하고, 입력신호를 $1, 2, 3, 4$ 로 하였을 때의 출력신호를 x, y, z, w 라 하자. 이때, $y=3$ 또는 $z=1$ 일 확률은? (단, 각 장치들은 독립적으로 작동한다.)



① $\frac{22}{81}$ ② $\frac{23}{81}$ ③ $\frac{25}{81}$ ④ $\frac{26}{81}$ ⑤ $\frac{29}{81}$

예제 029

2006. 3. 가형(54%). 28번. 3점

세 개의 주머니 A, B, C에 모양과 크기가 같은 전구가 들어 있다. A 에는 노란 전구 2개와 파란 전구 4개, B 에는 노란 전구 3개와 파란 전구 3개, C 에는 노란 전구 1개와 파란 전구 5개가 들어 있다. 각 주머니에서 전구를 한 개씩 꺼냈더니 노란 전구가 두 개 나왔다고 한다. 이때, A에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

예제 030

2011. 사관학교. 문·이과. 10번. 3점

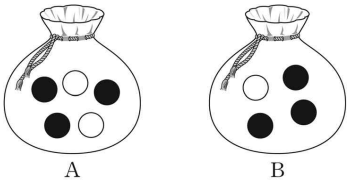
두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ 라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{17}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

예제 031

2013. 11. A형(79%). 15번. 4점

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후. 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

예제 032

2007. 사관학교. 문·이과. 11번. 3점

5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 한 번 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

[보기]

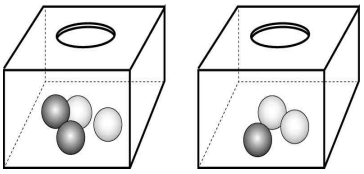
ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$ ㄴ. $\mathrm{P}(B|A)>\mathrm{P}(B|A^c)$ ㄷ. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A|B)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

예제 033

2013. 7 A형(59%). 19번. 4점

크기와 모양이 같은 공이 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어 있다. 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률은?



상자 A 상자 B

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

예제 034

2014. 10. B형(67%). 20번. 4점

세 학생 A, B, C 가 다음 단계에 따라 최종 승자를 정한다.

[단계 1] 세 학생이 동시에 가위바위보를 한다.
[단계 2] [단계 1]에서 이긴 학생이 1명뿐이면 그 학생이 최종 승자가 되고, 이긴 학생이 2명이면 [단계 3]으로 가고, 이긴 학생이 없으면 [단계 1]로 간다.
[단계 3] [단계 2]에서 이긴 2명 중 이긴 학생이 나올 때까지 가위바위보를 하여 이긴 학생이 최종 승자가 된다.

가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률은? (단, 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

예제 035

2005. 3. 가형(35%). 21번. 4점

어느 도시에서 야간에 뺑소니 사건이 일어났다. 이 도시 전체 차량의 80%는 자가용이고, 20%는 영업용이다. 그런데 한 목격자가 뺑소니 차량을 자가용이라고 증언하였다. 이 증언의 타당성을 알아보기 위해 사고와 동일한 상황에서 그 목격자가 자가용 차량과 영업용 차량을 구별할 수 있는 능력을 측정해본 결과 바르게 구별할 확률이 90% 이었다. 그렇다면 목격자가 본 뺑소니 차량이 실제로 자가용일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 모든 차량이 뺑소니 사건을 일으킬 가능성은 같다고 가정한다.)

예제 036

2013. 9. B형(80%). 6번. 3점

한 개의 주사위를 A 는 4 번 던지고 B 는 3 번 던질 때, 3 의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b 라 하자. $a+b$ 의 값이 6 일 확률은?

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

예제 037

2006. 11. 나형(61%). 29번. 4점

채널이 1부터 100까지 설정된 텔레비전이 있다. 이 텔레비전의 리모컨의 일부는 다음 그림과 같고, 현재 켜져 있는 채널은 50이다. 채널증가 버튼 채널 ▲ 과 채널감소 버튼 채널 ▼ 두 개 중 한 번에 한 개의 버튼을 임의로 여섯 번 누를 때, 채널이 다시 50이 될 확률은? (단, 버튼을 한 번 누르면 채널은 1씩 변한다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

예제 038

2009. 3. 가형(51%). 29번. 4점

A대학교에서는 수시모집과 정시모집으로 입학생을 선발한다. 수시모집은 정시모집보다 먼저 실시하고, 수시 모집에 지원하여 합격한 학생은 정시모집에 지원할 수 없다고 한다. 어떤 고등학생 3명이 A대학교의 수시모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 정시 모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이라고 하자. 이 학생 3명이 A대학교의 수시모집에 모두 지원하고, 이 중 불합격한 학생은 다시 A대학교의 정시모집에 지원한다고 할 때, 3명 중 2명이 합격할 확률은? (단, 각 학생이 A대학교에 합격하는 사건은 서로 독립이다.)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{14}{27}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

예제 039

2008. 3. 가형(39%). 25번. 4점

네 명이 동전을 한 개씩 동시에 던져서 다음과 같은 방법으로 두 명씩 두 개 조로 나누려고 한다.

(가) 앞면과 뒷면이 각각 두 개씩 나오면 같은 면이 나온 사람끼리 같은 조가 된다.
(나) 앞면과 뒷면의 개수가 다르면 앞면과 뒷면의 개수가 같게 나올 때까지 네 명 모두 동전을 다시 던진다.

이와 같은 방법으로 네 명을 두 개 조로 나눌 때, 동전을 두 번씩 던지게 될 확률은 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수) 이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.

예제 040

2012. 9. 가형(68%). 11번. 3점

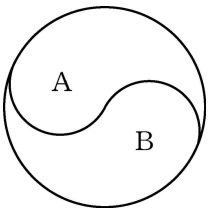
A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B가 동전을 던진다. B가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

예제 041

2005. 11. 가형(65%). 나형(46%). 23번. 4점

각 면에 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던져서 밑면에 적힌 숫자가 1이면 다음 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에 색을 칠하기로 하였다. 두 영역에 색이 모두 칠해질 때까지 이 상자를 계속 던질 때, 3번째에 마칠 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



예제 042

2006. 3. 가형(15%). 20번. 4점

A, B, C, D 4개의 축구팀이 있다. 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 경기에서 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이 생길 확률을 $\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)이라 할 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, 비기는 경기는 없다.)

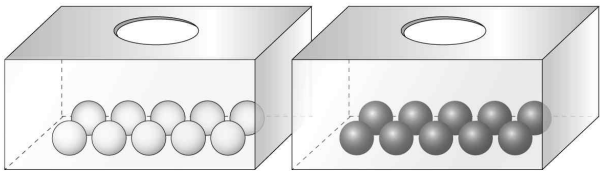
예제 043

2014. 7. A형(26%). 28번. 4점

상자 A에는 흰 공 10개, 상자 B에는 검은 공 10개가 들어 있다. 다음과 같이 [실행 1]부터 [실행 3]까지 할 때, 상자 B의 흰 공의 개수가 홀수일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[실행 1] 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 B에 넣는다.
[실행 2] 상자 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 A에 넣는다.
[실행 3] 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 B에 넣는다.

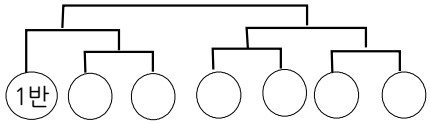


예제 044

2006. 6. 가형(47%). 11번. 3점

3학년에 7개의 반이 있는 어느 고등학교에서 토너먼트 방식으로 축구 시합을 하려고 하는데 이미 1반은 부전승으로 결정되어 있다. 다음과 같은 형태의 대진표를 만들어 시합을 할 때, 1반과 2반이 축구 시합을 할 확률은?

(단, 각 반이 시합에서 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이고, 기권하는 반은 없다고 한다.)

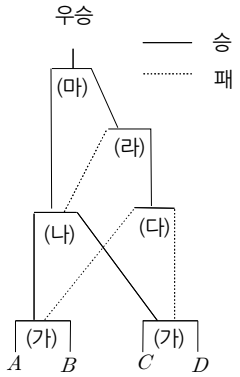


① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

예제 045

2009. 10. 가형(40%). 나형(28%). 23번. 4점

4 개의 야구팀 A, B, C, D가 다음과 같은 방법으로 우승팀을 결정하기로 하였다.



(가) A팀과 B팀이 경기를 하고, C팀과 D팀이 경기를 한다.
(나) (가)에서 이긴 팀끼리 경기를 한다.
(다) (가)에서 진 팀끼리 경기를 한다.
(라) (나)에서 진 팀과 (다)에서 이긴 팀이 경기를 한다.
(마) (나)에서 이긴 팀과 (라)에서 이긴 팀이 경기를 한다.
(바) (마)에서 이긴 팀이 우승팀이 된다.

매 경기에서 각 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같다고 하자. A팀이 우승했을 때, A팀이 (가)에서 이겼을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 두 자연수이다.)

예제 046

2011. 11. 나형(74%). 10번. 3점

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, $P(A\,|\,B)=\frac{3}{8}$일 때, $P(A\cap B^c)$의 값은?

(단, B^c은 B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

예제 047

2009. 11. 나형(84%). 5번. 3점

두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이고 $P(A)=P(B)$, $P(A)P(B)=\frac{1}{9}$일 때, $P(A\cup B)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

예제 048

2005. 사관학교. 문·이과. 21번. 4점

두 개의 주머니 A, B가 있다. A주머니에는 흰 공 1 개와 검은 공 1 개가 들어 있고, B주머니에는 검은 공 2 개가 들어 있다. A주머니에 있는 공을 1 개 꺼내어 B 주머니에 넣은 후, 다시 B주머니에서 공을 1 개 꺼내어 A주머니에 넣는 과정을 1 번의 시행이라 하자. 이와 같은 시행을 4 번 반복하였을 때, A주머니에 흰 공이 들어 있을 확률은?

① $\frac{83}{162}$ ② $\frac{41}{81}$ ③ $\frac{14}{27}$ ④ $\frac{33}{64}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

예제 049

2006. 11. 가형(56%). 나형(43%). 15번. 4점

$1, 2, 3, \cdots, 3n$ (n은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀있는 두 수를 각각 a, b $(a<b)$라 하자. $3a<b$일 확률을 P_n이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $3n$ 장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}\mathrm{C}_2$이다. $3a<b$인 경우에는 $b \leqq 3n$이므로 $1 \leqq a < n$이다. 따라서 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는 b의 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이므로 $P_n = \dfrac{\boxed{(나)}}{{}_{3n}C_2}$이다.
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty} P_n = \boxed{(다)}$이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
②	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
③	$3(n-k)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
④	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
⑤	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$

정답과 해설

예제 025

REVIEW 〈사건의 분할〉 + 〈종속인 사건의 곱셈정리〉

주머니 속에 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어있다. A부터 시작하여 A, B가 교대로 하나씩 꺼내는 일을 계속할 때, 먼저 흰 공을 꺼내는 쪽이 이기는 것으로 한다. 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때, A가 이길 확률은?

시행 주머니 속에 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어있다. A부터 시작하여 A, B가 교대로 하나씩 꺼내는 일을 계속 + 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때

⇨ 종속적 선후시행이므로 $P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$의 사고방식으로 자연스럽게 푼다,

사건 흰 공을 꺼내는 쪽이 이기는 것 + A가 이길 확률

사건의 분석 A가 이기는 경우는 다음과 같이 크게 2가지로 나누어진다.

상황 1	A흰
상황 2	A검 B검 A흰

- 만약 3번째에도 A가 검은 공을 뽑을 경우 검은 공이 모두 소진되어 4번째 시행에서 B가 반드시 검은 공을 뽑게 된다. (즉, B가 이기게 된다.)

⇨ $P(A\text{가 이김}) = P(\text{상황}1) + P(\text{상황}2)$

$= P(A\text{흰}) + P(A\text{검} \to B\text{검} \to A\text{흰})$ (∩기호 대신 →기호를 썼으나 수학적으로는 ∩이 맞다.)

$= P(A\text{흰}) + P(A\text{검})\cdot P(B\text{검}\,|\,A\text{검})\cdot P(A\text{흰}\,|\,A\text{검}\to B\text{검}) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{5}$

정답은 $\frac{3}{5}$

코칭 〈상황 2〉에서 곱해진 조건부 확률을 〈의미상 조건부〉로서 〈선 시행의 결과〉에 의하여 바뀐 표본공간에서 〈수학적 확률〉의 느낌으로 자연스럽게 구해진 조건부 확률이다.

예제 026

REVIEW 〈사건의 분할〉 + 〈종속인 사건의 곱셈정리〉

2011. 11. 가형(74%). 13번. 3점

상자 A에는 빨간 공 3개와 검은 공 5개가 들어있고, 상자 B는 비어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 빨간 공이 나오면 [실행 1]을, 빨간 공이 나오지 않으면 [실행 2]를 할 때, 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1일 확률은?

> [실행 1] 꺼낸 공을 상자 B에 넣는다.
> [실행 2] 꺼낸 공을 상자 B에 넣고, 상자 A에서 임의로 2개의 공을 더 꺼내어 상자 B에 넣는다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

조건 상자 A에는 빨간 공 3개와 검은 공 5개가 들어있고, 상자 B는 비어 있다.

시행 상자 A에서 임의로 2개의 공을 꺼내 빨간 공이 나오면 [실행 1]을, 빨간 공이 나오지 않으면 [실행 2]

⇨ 〈선 시행〉의 결과에 따라 〈후 시행〉이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

사건 상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1일 확률

사건의 분석 시행을 최종완료 후 〈상자 B에 있는 빨간 공의 개수가 1인 상황〉은 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

상황 1	빨 1, 검 1
상황 2	검 2 → 빨 1, 검 1

$P(\text{빨간공 1개}) = P(\text{상황 1}) + P(\text{상황 2})$

$= P(\text{빨1, 검1}) + P(\text{검2} \rightarrow \text{빨1, 검1})$ (∩ 기호 대신 →기호를 썼으나 수학적으로는 ∩이 맞다.)

$= P(\text{빨1, 검1}) + P(\text{검2}) \cdot P(\text{빨1, 검1} \mid \text{검2}) = \frac{{}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_8C_2} + \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} \cdot \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{4}$

정답은 ④

코칭 〈상황 2〉에서 곱해진 조건부 확률을 〈의미상 조건부〉로서 〈선 시행의 결과〉에 의하여 바뀐 표본공간에서 〈수학적 확률〉의 느낌으로 자연스럽게 구해진 조건부 확률이다.

예제 027

REVIEW <사건의 분할> + <독립, 종속인 사건의 곱셈정리>

2008. 7. 가형(%), 나형(%). 16번. 4점

A 학생의 주머니에는 빨간 구슬 2 개와 노란 구슬 3 개, B 학생의 주머니에는 노란 구슬 1 개와 파란 구슬 4 개가 들어 있다. 두 명의 학생이 각자의 주머니에서 한 개의 구슬을 꺼내어 색깔에 따라 승부를 가리는데, 빨간 구슬이 노란 구슬에 이기고, 노란 구슬은 파란 구슬에 이기고, 파란 구슬은 빨간 구슬에 이긴다고 한다. 이때, A 학생이 이길 확률은? (단, 같은 색의 구슬이 나왔을 때는 구슬을 한 개씩 더 꺼내어 승부를 가리고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{29}{50}$ ② $\frac{31}{50}$ ③ $\frac{33}{50}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{37}{50}$

조건 A 학생의 주머니에는 빨간 구슬 2 개와 노란 구슬 3 개, B 학생의 주머니에는 노란 구슬 1 개와 파란 구슬 4 개
빨간 구슬이 노란 구슬에 이기고, 노란 구슬은 파란 구슬에 이기고, 파란 구슬은 빨간 구슬에 이긴다.

시행 같은 색의 구슬이 나왔을 때는 구슬을 한 개씩 더 꺼내어 승부를 가리고, 꺼낸 구슬은 다시 넣지 않는다.

⇨ 전체적으로는 <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행 이다.
하지만 부분적으로 <A가 자기 주머니에서 뽑는 시행>과 <B가 자기 주머니에 뽑는 시행>은 서로 <독립시행>이다.
그러므로 이 문제는 <독립인 시행의 곱셈정리>와 <종속인 시행의 곱셈정리>가 모두 사용된다.

사건 A 학생이 이길 확률

사건의 분석 시행을 최종완료 후 <A가 이기는 상황>은 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

상황 1	첫 번째 판에 이김
상황 2	첫 번째 판에 비기고, 2 번째 판에 이김

⇨

상황 1-1	A빨, B노
상황 1-2	A노, B파
상황 2	A노, B노 → A노, B파

- 첫 번째 판이 비기는 경우는 <두 학생이 모두 노란 공>을 뽑는 경우만 존재한다.
  첫 번째 판을 비기고 나면 이제 같은 색의 공이 남지 않으므로 두 번째 판부터는 비기는 경우가 존재할 수 없다.

⇨
$$\begin{aligned} P(A\text{가 이김}) &= P(\text{상황}1-1) + P(\text{상황}1-2) + P(\text{상황}2) \\ &= P(A\text{빨}, B\text{노}) + P(A\text{노}, B\text{파}) + P(A\text{노}, B\text{노} \rightarrow A\text{노}, B\text{파}) \\ &= P(A\text{빨}, B\text{노}) + P(A\text{노}, B\text{파}) + P(A\text{노}, B\text{노}) \cdot P(A\text{노}, B\text{파} \mid A\text{노}, B\text{노}) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{4}\right) = \frac{31}{50} \end{aligned}$$

답 : ②

코칭 <확률의 곱셈정리>의 사고방식과 느낌을 완전히 받아들였다면 이제 가장 중요한 것은 <사건을 분석>하는 것이다.
그리고 <사건의 분석>은 <경우의 수>에서 배운 <분할적 사고>와 맥락을 같이 한다.

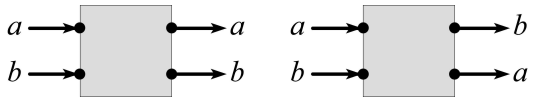
예제 028

REVIEW 〈확률조건〉 + 〈독립인 사건의 곱셈정리〉 + 〈덧셈정리〉

2007. 10. 가형(68%), 나형(51%). 16번. 4점

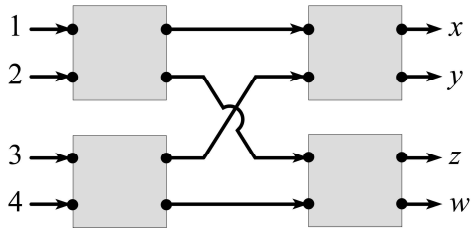
그림은 왼쪽의 입력 신호 a, b 를 오른쪽으로 전달하여 신호를 출력하는 장치를 나타낸 것이다.

이 장치가 [그림1]과 같이 출력할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, [그림2]와 같이 출력할 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.



[그림1] [그림2]

이 장치 4개를 아래 그림과 같이 연결하고, 입력신호를 $1, 2, 3, 4$ 로 하였을 때의 출력신호를 x, y, z, w 라 하자. 이때, $y=3$ 또는 $z=1$ 일 확률은? (단, 각 장치들은 독립적으로 작동한다.)



① $\frac{22}{81}$ ② $\frac{23}{81}$ ③ $\frac{25}{81}$ ④ $\frac{26}{81}$ ⑤ $\frac{29}{81}$

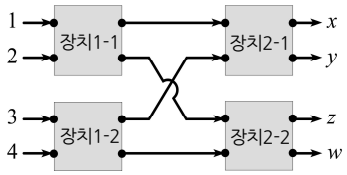
조건 주어진 그림에서 알려주는 것은 $P(\text{그대로 출력}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{반대로 출력}) = \frac{2}{3}$

조건 각 장치들은 독립적으로 작동

⇨ 〈확률이 조건〉으로 주어진 경우이므로 꼭 이 조건이 없더라도 〈독립〉이라고 판단 할 수 있다.

만약 종속을 표현하고 싶었다면 〈전 장치에서 그대로 출력되었을 때 다음 장치에서 그대로 출력될 확률은 ~~〉의 방식으로 서술했어야 한다.

구할 것 $y=3$ 또는 $z=1$ 일 확률



- 위와 같이 편의상 각 장치에 이름을 붙였다.
- $y=3$인 사건과 $z=1$ 인 사건은 〈동시에 발생할 수 있는 사건〉이므로

$$P(y=3 \cup z=1) = P(y=3) + P(z=1) - P(y=3 \cap z=1)$$

- $P(y=3) = P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로}) = P(1-2\text{그대로}) \times P(2-1\text{그대로}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

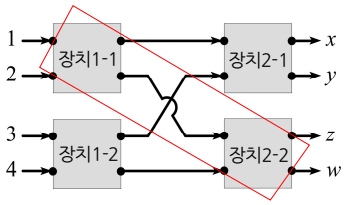
〈장치 $1-1$〉과 〈장치 $2-2$〉의 결과를 고려하지 않는 이유와 그 의미는 다음 장에 티칭 에서 설명하기로 한다.

- $P(z=1) = P(1-1\text{반대로} \rightarrow 2-2\text{그대로}) = P(1-1\text{반대로}) \times P(2-2\text{그대로}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
- $P(y=3 \cap z=1) = P(1-1\text{반대로}, 1-2\text{그대로}, 2-1\text{그대로}, 2-2\text{그대로}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$

⇨ $P(y=3 \cup z=1) = P(y=3) + P(z=1) - P(y=3 \cap z=1) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{81} = \frac{25}{81}$

답 : ③

티칭 $\frac{1}{9}$ - 비율의 의미 ps. 이 설명은 넣기를 굉장히 고민했던 내용으로 위의 해설이 <직관적으로> 이해가 갈 경우 가볍게 읽고 넘겨도 좋다.



$P(y=3) = P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로}) = P(1-2\text{그대로}) \times P(2-1\text{그대로}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

을 다시 한 번 살펴보자.

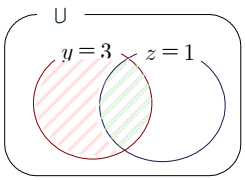
: <장치 $1-1$>과 <장치 $2-2$>의 결과를 기준으로 표본공간을 먼저 분할했다고 가정했을 때,

표본공간 S (전체면적=1)

<$1-1$ 그대로, $2-2$ 그대로> : $z=2$	
<$1-1$ 반대로, $2-2$ 그대로> : $z=1$	
<$1-1$ 그대로, $2-2$ 반대로> : $z=3$ or 4	
<$1-1$ 반대로, $2-2$ 반대로> : $z=3$ or 4	

- 위와 같이 분할된 각각에 대하여 $P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로})$가 같은 비율을 차지한다. (독립이기 때문이다.)
  그래서 **<상황을 고정>**해서 확률 값을 구해도 상관없다는 것은 이미 앞에서 설명한 바 있다.
  즉, $P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로} \mid S) = P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로} \mid 1-1\text{그대로} \rightarrow 2-2\text{그대로})$
  임을 설명한 것인데 물론 이것은 <옳은 설명>이고 <반복시행의 확률>에서 복잡한 상황을 정리할 때 굉장히 효율적인 <사고방식>이다.

- 여기에서는 조금 다른 관점으로 생각해본다.
  $P(1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로})$에서 <상자 $1-1$>과 <상자 $2-2$>의 결과에 상관없이 확률을 구했다고 생각한다.
  이 상황을 바꿔 생각해보면 <상자 $1-1$이 반대로 또는 그대로> 그리고 <상자 $2-2$가 반대로 또는 그대로>
  (이 결과에 의하여 $z=1$일수도 있고, $z \neq 1$일수도 있다.)
  의 모든 경우에 대한 확률 값인 1을 곱했다고 생각해도 된다.
  즉, <$1-2\text{그대로} \rightarrow 2-1\text{그대로}$>가 발생할 확률인 $P(y=3) = \frac{1}{9}$은
  아래 벤다이어그램과 같이 $P(y=3 \cap z=1)$인 경우와 $P(y=3 \cap z \neq 1)$경우가 모두 포함된 확률 값임을 의미한다.



  즉, **<표본공간 전체>**를 분할한 각각에 대하여 우리가 구하는 사건이 발생할 확률이 같은 비율의 면적을 차지할 것이라고 생각되는 경우 <확률의 연산>없이 <특정 상황으로 고정>해도 상관없지만
  <그 확률 값의 의미>는 발생할 수 있는 <특정상황에 대한 확률>이 아닌 발생할 수 있는 <모든 상황에 대한 확률>이다.

예제 029

REVIEW 〈조건부 분할〉 : 조건부를 분할해야 하는 경우 〈곱셈정리〉와 〈조건부 확률 식〉을 모두 활용한다.

2006. 3. 가형(54%). 28번. 3점

세 개의 주머니 A, B, C에 모양과 크기가 같은 전구가 들어 있다. A 에는 노란 전구 2개와 파란 전구 4개, B 에는 노란 전구 3개와 파란 전구 3개, C 에는 노란 전구 1개와 파란 전구 5개가 들어 있다. 각 주머니에서 전구를 한 개씩 꺼냈더니 노란 전구가 두 개 나왔다고 한다. 이때, A에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

조건 세 개의 주머니 A, B, C에 모양과 크기가 같은 전구가 들어 있다. A 에는 노란 전구 2개와 파란 전구 4개, B에는 노란 전구 3개와 파란 전구 3개, C 에는 노란 전구 1개와 파란 전구 5개

조건 각 주머니에서 전구를 한 개씩 꺼냈더니

⇨ A 주머니에서의 결과가 B 주머니에서의 결과에 영향을 주지 못하므로 독립시행이다.
독립시행의 경우 〈선후시행〉으로 보나 〈동시시행〉으로 보나 상관없다.

구할 것 노란 전구가 두 개 나왔다고 한다. 이때, A에서 꺼낸 전구가 노란 전구일 확률

⇨ 결국 〈조건부 : 새로운 표본공간〉은 〈노란 공이 두 개 나온 상황〉이며 이것은 다음과 같은 세 가지로 분할된다.

	A	B	C
상황 1	노	노	파
상황 2	노	파	노
상황 3	파	노	노

즉, $P(\text{노란공 2개}) = P(\text{상황}1) + P(\text{상황}2) + P(\text{상황}3) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}$

⇨ $P(A \text{ 노란공} \mid \text{노란 공 2개}) = \frac{P(A \text{ 노란공} \cap \text{노란 공 2개})}{P(\text{노란 공 2개})}$

$$= \frac{P(\text{상황 1}) + P(\text{상황 2})}{P(\text{상황 1}) + P(\text{상황 2}) + P(\text{상황 3})}$$

$$= \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}$$

정답은 ⑤

예제 030

REVIEW <조건부 분할> : 조건부를 분할해야 하는 경우 <곱셈정리>와 <조건부 확률 식>을 모두 활용한다.

2011. 사관학교. 문·이과. 10번. 3점

두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격하였더니 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A이었을 확률은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{17}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{9}{13}$

조건 두 사격선수 A, B가 한 번의 사격에서 10점을 얻을 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$

⇨ $P(A:10점) = \frac{3}{4}$, $P(A:10점\times) = \frac{1}{4}$, $P(B:10점) = \frac{2}{3}$, $P(B:10점\times) = \frac{1}{3}$이며

A, B가 각각 10점을 얻을 확률이 <독립>임을 암시한다.

조건 두 선수가 임의로 순서를 정하여 각각 한 번씩 사격

⇨ <임의로>라는 말에서 먼저 사격하게 될 확률은 각 선수가 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

어차피 누가 먼저 쏘더라도 10점을 얻을 확률에는 변함이 없으므로 <순서를 정하는 사건>과 <사격하는 사건>은 서로 <독립>이라는 것을 알 수 있다.

구할 것 먼저 사격한 선수만 10점을 얻었다고 한다. 이때, 먼저 사격한 선수가 A

⇨ 결국 <조건부 : 새로운 표본공간>은 <먼저 사격한 선수만 10점인 상황>이며 이것은 두 가지로 분할된다.

$$P(\text{먼저 사격한 선수만 10점}) = P(A\text{먼저} \to A\text{만 10점}) + P(B\text{먼저} \to B\text{만 10점})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

⇨ $$P(A\text{먼저} \mid \text{먼저 사격한 선수만 10점}) = \frac{P(A\text{먼저} \cap \text{먼저 사격한 선수만 10점})}{P(\text{먼저 사격한 선수만 10점})}$$

$$= \frac{P(A\text{먼저} \to A\text{만 10점})}{P(A\text{먼저} \to A\text{만 10점}) + P(B\text{먼저} \to B\text{만 10점})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

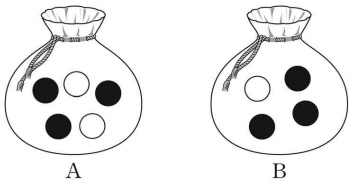
정답 : ③

예제 031

REVIEW <종속적 선후시행>에서 <후행사건의 확률>은 항상 분할된다.

2013. 11. A형(79%). 15번. 4점

주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때 꺼낸 공이 흰 공일 확률은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

조건 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 1개와 검은 공 3개

시행 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 흰 공이면 흰 공 2개를 주머니 B에 넣고 검은 공이면 검은 공 2개를 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

사건 꺼낸 공이 흰 공일 확률

사건의 분석 시행을 최종완료 후 <흰 공을 꺼내는 상황>은 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

상황 1	A에서 흰 공 → B에서 흰 공
상황 2	A에서 검은 공 → B에서 흰 공

⇨ $P(A\text{가 이김}) = P(\text{상황}1) + P(\text{상황}2)$

$= P(A\ \text{흰 공} \to B\ \text{흰 공}) + P(A\ \text{검은 공} \to B\ \text{흰 공})$

$= P(A\ \text{흰 공}) \cdot P(B\ \text{흰 공} \mid A\ \text{흰 공}) + P(A\ \text{검은 공}) \cdot P(B\ \text{흰 공} \mid A\ \text{검은 공})$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{10}$

정답 ⑤

예제 032

REVIEW <확률의 곱셈정리와 조건부 확률> : 미래의 결과, 과거의 확률 - 조건부 분할

2007. 사관학교. 문·이과. 11번. 3점

5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개 있다. 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때, 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 한 번 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

[보기]

ㄱ. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$　　ㄴ. $\mathrm{P}(B|A) > \mathrm{P}(B|A^c)$　　ㄷ. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(A|B)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄷ

조건 5개의 제비 중에서 당첨제비가 2개

시행 갑이 먼저 한 개의 제비를 뽑은 다음 을이 한 개의 제비를 뽑을 때,

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

사건 갑이 당첨제비를 뽑을 사건을 A, 을이 당첨제비를 뽑을 사건을 B

⇨ A는 선행사건, B는 후행사건으로 볼 수 있다.

ㄱ. $P(A)$는 선행사건이 발생할 확률로 원래는 <전체시행>에서 생각해야 하지만 <선 시행 - 단순시행>에서 확률 값을 구해도 상관없다. 즉, $P(A) = \frac{2}{5}$ (직관적으로도 그렇지만 Part 3의 #1에서 이론적 배경도 이미 설명한 바 있다.)

$P(B)$는 후행사건이 발생할 확률로 종속적 선후시행에서 후행사건이 발생할 확률은 항상 분할된다.

즉, $P(B) = P(A \to B) + P(A^c \to B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$이므로 (참)

ㄴ. $\mathrm{P}(B|A)$는 <의미상 조건부>로서 <조건부 확률의 식>을 이용할 필요가 없다. 즉, 선행사건 A가 발생한 상황에서 후행사건 B가 발생할 확률을 <바뀐 표본공간>에서 <수학적 확률>을 계산하듯 계산하면 된다.

즉, $\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{4}$이고, $\mathrm{P}(B|A^c) = \frac{2}{4}$이므로 ⇨ $\mathrm{P}(B|A) < \mathrm{P}(B|A^c)$이다. (거짓)

ㄷ. $\mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{4}$라는 것은 <의미상 조건부>로서 이미 ㄴ에서 구한 바 있다.

$\mathrm{P}(A|B)$는 <미래의 결과, 과거의 확률>의 구조를 가진 <조건부 확률>이고 이런 경우 <조건부>가 되는 후행사건이 항상 분할되기 때문에(물론 종속적 선후시행에서) <조건부 확률의 정의 식>과 <확률의 곱셈정리>를 이용하여 계산해야 한다.

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \to B)}{P(A \to B) + P(A^c \to B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}} = \frac{1}{4}$$

즉, ㄷ은 (참)

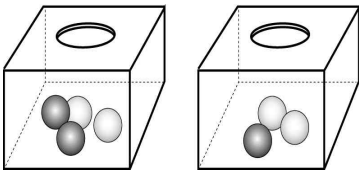
정답 : ①

예제 033

REVIEW 〈확률의 곱셈정리와 조건부 확률〉 : 미래의 결과, 과거의 확률 - 조건부 분할

2013. 7 A형(59%). 19번. 4점

크기와 모양이 같은 공이 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개가 들어 있다. 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률은?



상자 A 상자 B

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

조건 상자 A에는 검은 공 2개와 흰 공 2개, 상자 B에는 검은 공 1개와 흰 공 2개

조건 두 상자 A, B 중 임의로 선택한 하나의 상자에서 공을 1개 꺼냈더니

⇨ 〈임의로〉라는 말에서 각 상자를 택할 확률은 $\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

즉, 〈선 시행 : 어떤 상자를 택하느냐〉에 따라 〈후 시행〉이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

구할 것 검은 공이 나왔을 때, 그 상자에 남은 공이 모두 흰 공일 확률

⇨ 결국 〈선택된 상자가 B이었을 확률〉이고 〈미래의 결과, 과거의 확률〉을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(B\text{ 선택}\mid\text{검은 공}) = \frac{P(B\text{ 선택}\cap\text{검은 공})}{P(\text{검은 공})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 〈조건부 사건〉은 종속적 선후시행에서 〈후행사건〉이므로

〈A 선택 → 검은 공〉 ∪ 〈B 선택 → 검은 공〉의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$\begin{aligned} P(\text{검은 공}) &= P(A\text{ 선택}\to\text{검은 공}) + P(B\text{ 선택}\to\text{검은 공}) \\ &= P(A\text{ 선택})\cdot P(\text{검은 공}\mid A\text{ 선택}) + P(B\text{ 선택})\cdot P(\text{검은 공}\mid B\text{ 선택}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \end{aligned}$$

⇨ $$P(B\text{ 선택}\mid\text{검은 공}) = \frac{P(B\text{ 선택}\cap\text{검은 공})}{P(\text{검은 공})}$$

$$= \frac{P(B\text{ 선택}\to\text{검은 공})}{P(A\text{ 선택}\to\text{검은 공})+P(B\text{ 선택}\to\text{검은 공})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

정답 ②

예제 034

REVIEW <확률의 곱셈정리와 조건부 확률> : 미래의 결과, 과거의 확률 - 조건부 분할

2014. 10. B형(67%). 20번. 4점

세 학생 A, B, C 가 다음 단계에 따라 최종 승자를 정한다.

> [단계 1] 세 학생이 동시에 가위바위보를 한다.
> [단계 2] [단계 1]에서 이긴 학생이 1명뿐이면 그 학생이 최종 승자가 되고, 이긴 학생이 2명이면 [단계 3]으로 가고, 이긴 학생이 없으면 [단계 1]로 간다.
> [단계 3] [단계 2]에서 이긴 2명 중 이긴 학생이 나올 때까지 가위바위보를 하여 이긴 학생이 최종 승자가 된다.

가위바위보를 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률은? (단, 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

조건 요약하면 세 명이서 가위바위보를 한다는 말이다.

⇨ <동시에>내기 때문에 **<부분적으로 독립>**이라고 생각할 수 있다. (A가 내는 것이 B가 내는 것에 영향을 주지 못한다.)

조건 각 학생이 가위, 바위, 보를 낼 확률은 각각 $\frac{1}{3}$

⇨ 각 학생이 이길 확률 또한 동일하기 때문에 $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$로 풀어도 된다.

(학생이 내는 것에 따라 확률이 다 다르면 <모든 결과의 확률 값> 일일이 따져서 구해야 하는 매우 복잡한 문제가 된다.)

구할 것 2번 한 결과 A 학생이 최종 승자로 정해졌을 때, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명이었을 확률

⇨ 전체적으로 보면 <선 시행 : 1번째 가위바위보의 결과>에 따라 <후 시행>이 영향을 받으므로 종속적 선후시행 이라고 볼 수 있으며 <미래의 결과, 과거의 확률>을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(\text{2번째 2명} \mid \text{2번 후 } A \text{ 승자}) = \frac{P(\text{2번째 2명} \cap \text{2번 후 } A \text{ 승자})}{P(\text{2번 후 } A \text{ 승자})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행 에서 <후행사건>이므로 <2번째 3명 → 2번 후 A승자> ∪ <2번째 A포함 2명 → 2번 후 A승자>의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$P(\text{2번 후 } A\text{승자}) = P(\text{2번째 3명} \to \text{2번 후 } A\text{승자}) + P(\text{2번째 } A\text{포함 2명} \to \text{2번 후 } A\text{승자})$$
$$= P(\text{2번째 3명}) \cdot P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 3명}) + P(\text{2번째 } A\text{포함 2명}) \cdot P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 } A\text{포함 2명})$$

- $P(\text{2번째 3명})$은 <모두 같은 것 or 모두 다른 것>을 내면 된다. 즉, $P(\text{2번째 3명}) = \frac{3!+3}{3^3}$

$P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 3명})$은 <의미상 조건부>로 그냥 <3명 중 A가 승자>일 확률을 구하는 것이다.

즉, A가 내는 3가지에 대하여 B, C는 내야하는 것이 자동으로 결정되므로 $P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 3명}) = \frac{3}{3^3}$

- $P(\text{2번째 } A\text{포함 2명})$은 <$A$, B>가 이기는 경우와 <A, C>가 이기는 경우로 나눌 수 있으며 $2 \times n(A, B)$라고 생각할 경우 $n(A, B)$는 역시 3가지이다. (A, B가 내는 3가지에 대하여 C는 자동결정) 즉, $P(\text{2번째 } A\text{포함 2명}) = \frac{6}{3^3}$

$P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 } A\text{포함 2명})$ 역시 <의미상 조건부>로서 그냥 <2명 중 A가 승자>일 확률을 구하는 것이다.

즉, $P(\text{2번 후 } A\text{승자} \mid \text{2번째 } A\text{포함 2명}) = \frac{3}{3^2}$이다.

- 각 색칠된 , , , 의 부분을 <수학적 확률 : $\frac{\text{개수}}{\text{개수}}$>로 풀었지만 <독립인 사건의 곱셈정리>를 이용해서 풀어도 상관없다.

$$\Rightarrow P(\text{2번째 2명} \mid \text{2번 후 } A \text{ 승자}) = \frac{P(\text{2번째 2명} \cap \text{2번 후 } A \text{ 승자})}{P(\text{2번 후 } A \text{ 승자})}$$

$$= \frac{P(\text{2번째 } A\text{포함 2명} \to \text{2번 후 } A \text{ 승자})}{P(\text{2번째 3명} \to \text{2번 후 } A \text{ 승자}) + P(\text{2번째 } A\text{포함 2명} \to \text{2번 후 } A \text{ 승자})}$$

$$= \frac{\frac{6}{3^3} \cdot \frac{3}{3^2}}{\frac{3!+3}{3^3} \cdot \frac{3}{3^3} + \frac{6}{3^3} \cdot \frac{3}{3^2}} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{27} + \frac{2}{27}} = \frac{2}{3}$$

정답 ④

예제 035

REVIEW <확률의 곱셈정리와 조건부 확률> : 미래의 결과, 과거의 확률 - 조건부 분할 + <비율조건>

2005. 3. 가형(35%). 21번. 4점

어느 도시에서 야간에 뺑소니 사건이 일어났다. 이 도시 전체 차량의 80%는 자가용이고, 20%는 영업용이다. 그런데 한 목격자가 뺑소니 차량을 자가용이라고 증언하였다. 이 증언의 타당성을 알아보기 위해 사고와 동일한 상황에서 그 목격자가 자가용 차량과 영업용 차량을 구별할 수 있는 능력을 측정해본 결과 바르게 구별할 확률이 90% 이었다. 그렇다면 목격자가 본 뺑소니 차량이 실제로 자가용일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 모든 차량이 뺑소니 사건을 일으킬 가능성은 같다고 가정한다.)

조건 도시 전체 차량의 80%는 자가용이고, 20%는 영업용

⇨ 비율이 곧 확률이다. 통계적으로 $P(\text{자가용 목격}) = \frac{4}{5}$, $P(\text{영업용 목격}) = \frac{1}{5}$

조건 바르게 구별할 확률이 90%

⇨ 즉, $P(\text{자가용 증언})$은 <선 시행의 결과 : 목격한 차의 종류>에 따라 바뀌기 때문에

<선 시행의 결과>에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행 이라고 볼 수 있다.

구할 것 목격자가 뺑소니 차량을 자가용이라고 증언 + 목격자가 본 뺑소니 차량이 실제로 자가용일 확률

⇨ <자가용이라고 증언>한 사건이 시간적으로 뒤에 일어난 <후행사건>이며 이 문제의 조건부가 된다.

즉, <미래의 결과, 과거의 확률>을 물어보는 조건부 확률이며 결국 $P(\text{자가용 목격} \mid \text{자가용 증언})$을 구한다.

$$P(\text{자가용 목격} \mid \text{자가용 증언}) = \frac{P(\text{자가용 목격} \cap \text{자가용 증언})}{P(\text{자가용 증언})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행 에서 <후행사건>이므로

<자가용 목격 → 자가용 증언> ∪ <영업용 목격 → 자가용 증언>의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$\begin{aligned} P(\text{자가용 증언}) &= P(\text{자가용 목격} \to \text{자가용 증언}) + P(\text{영업용 목격} \to \text{자가용 증언}) \\ &= P(\text{자가용 목격}) \cdot P(\text{자가용 증언} \mid \text{자가용 목격}) + P(\text{영업용 목격}) \cdot P(\text{자가용 증언} \mid \text{영업용 목격}) \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \end{aligned}$$

참고로 $P(\text{자가용 증언} \mid \text{자가용 목격})$은 $P(\text{바르게 증언})$이므로 $\frac{9}{10}$이다.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\text{자가용 목격} \mid \text{자가용 증언}) &= \frac{P(\text{자가용 목격} \cap \text{자가용 증언})}{P(\text{자가용 증언})} \\ &= \frac{P(\text{자가용 목격} \to \text{자가용 증언})}{P(\text{자가용 목격} \to \text{자가용 증언}) + P(\text{영업용 목격} \to \text{자가용 증언})} \\ &= \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{36}{37} \end{aligned}$$

즉, $p+q = 73$이므로 정답은 73

예제 036

REVIEW 〈독립시행의 확률〉

2013. 9. B형(80%). 6번. 3점

한 개의 주사위를 A 는 4 번 던지고 B 는 3 번 던질 때, 3 의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b 라 하자. $a+b$ 의 값이 6 일 확률은?

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

독립시행의 확률의 상황임을 판단하여 공식을 쓴다.

조건 한 개의 주사위를 A 는 4 번 던지고 B 는 3 번 던질 때, 3 의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b

⇨ a 와 b가 결정되면 n회의 독립시행에서 〈특정사건 : 3의 배수가 나옴〉이 k번 나올 확률이므로 〈독립시행의 확률 공식〉을 쓸 수 있는 구조이다.

구할 것 $a+b$ 의 값이 6 일 확률

⇨ 주어진 사건은 아래와 같이 배반인 두 사건으로 분할된다. - 〈사건의 분할〉은 모든 확률 문제의 기본이다.

〈A : 4번, B : 2번〉 ∪ 〈A : 3번, B : 3번〉

1회 시행 주사위를 1회 던져서 3의 배수가 나올 확률 ⇨ $P(3\text{의 배수}) = \frac{1}{3}$

독립시행의 확률 〈a가 정해지는 사건〉과 〈b가 정해지는 사건〉 역시 전체적으로 〈독립〉이다.

A가 던진 결과에 B가 영향을 받지 않기 때문인데 비율의 면적화를 통해 또 보이진 않겠다.

⇨ 즉, 부분적으로는 〈독립시행의 확률공식〉으로 계산되고, 전체적으로는 〈독립인 사건의 곱셈정리〉와 〈덧셈정리〉로 계산된다.

$$P(a+b=6) = P(A:4\text{번} \cap B:2\text{번}) + P(A:3\text{번} \cap B:3\text{번})$$

$$= {}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{2}{3} \cdot {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4 {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{8}{3^7} + \frac{6}{3^7} = \frac{14}{3^7}$$

정답 ⑤

코칭 독립시행의 확률은 공식을 쓸 수 있는 상황임을 인지하고 공식을 쓰는 것이 굉장히 중요하다.

예제 037

REVIEW <독립시행의 확률>

2006. 11. 나형(61%). 29번. 4점

채널이 1부터 100까지 설정된 텔레비전이 있다. 이 텔레비전의 리모컨의 일부는 다음 그림과 같고, 현재 켜져 있는 채널은 50이다. 채널증가 버튼 채널 ▲ 과 채널감소 버튼 채널 ▼ 두 개 중 한 번에 한 개의 버튼을 임의로 여섯 번 누를 때, 채널이 다시 50이 될 확률은? (단, 버튼을 한 번 누르면 채널은 1씩 변한다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

<독립시행 : 반복시행의 확률>

조건 채널증가 버튼 채널 ▲ 과 채널감소 버튼 채널 ▼ 두 개 중 한 번에 한 개의 버튼을 임의로 여섯 번 누를 때

⇨ 각 버튼을 누를 확률은 $\frac{1}{2}$이며 상황 상 서로 <독립>이다.

구할 것 채널이 다시 50이 될 확률

독립시행의 확률 순서에 관계없이 ↑버튼 3번, ↓버튼 3번 누르면 된다.

⇨ 6회의 독립시행에서 <특정사건 : ↑버튼>이 3번 나올 확률(나머지 3번은 자동으로 ↓)이므로 <독립시행의 확률 공식>을 쓸 수 있는 구조이다.

즉, $P(\text{다시 채널 } 50) = P(6\text{번 중 } 3\text{번 채널증가버튼}) = {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

정답은 ②

예제 038

REVIEW 부분적으로 <독립시행의 확률> 공식을 쓰다.

2009. 3. 가형(51%). 29번. 4점

A대학교에서는 수시모집과 정시모집으로 입학생을 선발한다. 수시모집은 정시모집보다 먼저 실시하고, 수시 모집에 지원하여 합격한 학생은 정시모집에 지원할 수 없다고 한다. 어떤 고등학생 3명이 A대학교의 수시모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 정시 모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이라고 하자. 이 학생 3명이 A대학교의 수시모집에 모두 지원하고, 이 중 불합격한 학생은 다시 A대학교의 정시모집에 지원한다고 할 때, 3명 중 2명이 합격할 확률은? (단, 각 학생이 A대학교에 합격하는 사건은 서로 독립이다.)

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{14}{27}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

조건 요약하자면 합격하려면 <수시모집>에서 합격하거나 <수시 탈락 후 정시모집>에 지원해서 합격한다는 뜻이다.

조건 수시모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고, 정시 모집에 지원하였을 때 합격할 확률은 각각 $\frac{1}{3}$

⇨ <독립>이라는 것을 암시한다. (이해에 도움을 줄 뿐 곱셈정리를 자연스럽게 적용하는 직관이 생겼다면 꼭 구분할 필요는 없다.)

구할 것 3명이 A대학교의 수시모집에 모두 지원하고, 이 중 불합격한 학생은 다시 A대학교의 정시모집에 지원한다고 할 때, 3명 중 2명이 합격할 확률

⇨ 3회의 독립시행에서 <특정사건 : 합격>이 2번 나올 확률이므로 <독립시행의 확률 공식>을 쓸 수 있는 구조이다. 즉, 부분적으로는 <독립인 사건의 곱셈정리>를 적용하고 전체적으로는 <독립시행의 확률공식>을 이용한다.

1회 시행 대학에 합격할 확률 ⇨ $P(\text{합격}) = P(\text{수시 합격}) + P(\text{수시 불합격} \rightarrow \text{정시 합격})$

$= P(\text{수시 합격}) + P(\text{수시 불합격}) \cdot P(\text{정시 합격} \mid \text{수시 불합격})$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

독립시행의 확률 3회의 독립시행에서 <특정사건 : 합격>이 2번 나올 확률은

⇨ $P(\text{3명 중 2명이 합격}) = {}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

정답은 ①

코칭 독립시행의 확률은 공식을 쓸 수 있는 상황임을 인지하고 공식을 쓰는 것이 굉장히 중요하다.

예제 039

REVIEW 부분적으로 <독립시행의 확률> 공식을 쓰다.

2008. 3. 가형(39%). 25번. 4점

네 명이 동전을 한 개씩 동시에 던져서 다음과 같은 방법으로 두 명씩 두 개 조로 나누려고 한다.

(가) 앞면과 뒷면이 각각 두 개씩 나오면 같은 면이 나온 사람끼리 같은 조가 된다.
(나) 앞면과 뒷면의 개수가 다르면 앞면과 뒷면의 개수가 같게 나올 때까지 네 명 모두 동전을 다시 던진다.

이와 같은 방법으로 네 명을 두 개 조로 나눌 때, 동전을 두 번씩 던지게 될 확률은 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수) 이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.

조건 요약하자면 동전의 앞면과 뒷면이 두 개씩 나올 때까지 던진다는 뜻이다. 그리고 이렇게 나왔을 때 편이 나누어진다.

구할 것 동전을 두 번씩 던지게 될 확률

⇨ 1회 시행에서 <편이 나누어질 확률>은 <독립시행의 확률공식>을 쓸 수 있는 상황이다.
4개의 동전 중 <앞면 2개, 뒷면 2개>가 나와야 편이 나누어지고, 이 사건을 A라고 해보자.

즉, $P(A) = {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

⇨ 두 번씩 던지게 되려면 <편이 나누어지지 않음 → 편이 나누어 짐>이어야 한다.
즉, 전체적으로는 <독립인 사건의 곱셈정리>로 풀 수 있다.

$P(A^c \to A) = P(A^c) \times P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$이다. 즉, $p+q = 79$이다.

정답은 79

예제 040

REVIEW 부분적으로 <독립시행의 확률> 공식을 쓰다.

2012. 9. 가형(68%). 11번. 3점

A 가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B 가 동전을 던진다. B 가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A 가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

조건 A 가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B 가 동전을 던진다.

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받는 종속적 선후시행이다.

구할 것 B 가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A 가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률

⇨ 미래의 결과, 과거의 확률을 물어보는 조건부 확률이다.

$$P(A\ \text{앞면 2개} \mid B\ \text{앞면 1개}) = \frac{P(A\ \text{앞면 2개} \cap B\ \text{앞면 1개})}{P(B\ \text{앞면 1개})}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행에서 <후행사건>이므로

<A 앞면 1개 → B 앞면 1개> ∪ <A 앞면 2개 → B 앞면 1개>의 경우로 분할 할 수 있고 결국

$$\begin{aligned} P(B\ \text{앞면 1개}) &= P(A\ \text{앞면 1개} \to B\ \text{앞면 1개}) + P(A\ \text{앞면 2개} \to B\ \text{앞면 1개}) \\ &= P(A\ \text{앞면 1개}) \cdot P(B\ \text{앞면 1개} \mid A\ \text{앞면 1개}) + P(A\ \text{앞면 2개}) \cdot P(B\ \text{앞면 1개} \mid A\ \text{앞면 2개}) \\ &= {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(A\ \text{앞면 2개} \mid B\ \text{앞면 1개}) &= \frac{P(A\ \text{앞면 2개} \cap B\ \text{앞면 1개})}{P(B\ \text{앞면 1개})} \\ &= \frac{P(A\ \text{앞면 2개} \to B\ \text{앞면 1개})}{P(A\ \text{앞면 1개} \to B\ \text{앞면 1개}) + P(A\ \text{앞면 2개} \to B\ \text{앞면 1개})} \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

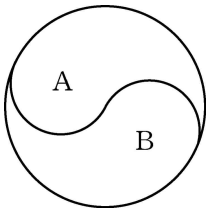
답 : ④

예제 041

REVIEW 반복시행의 확률 + 독립

2005. 11. 가형(65%). 나형(46%). 23번. 4점

각 면에 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 던져서 밑면에 적힌 숫자가 1이면 다음 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에 색을 칠하기로 하였다. 두 영역에 색이 모두 칠해질 때까지 이 상자를 계속 던질 때, 3번째에 마칠 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



<독립시행 : 반복시행의 확률>

조건 1, 1, 1, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 + 면에 적힌 숫자가 1이면 다음 그림의 영역 A에, 숫자가 2이면 영역 B에 색을 칠하기로 하였다.

⇨ 정사면체 상자를 던져서 1이 나오는 사건과 2가 나오는 사건은 서로 <독립>이다.

구할 것 3번째에 마칠 확률

⇨ 세 번째에 두 면이 모두 칠해지는 상황은 다음과 같이 두 가지로 나눌 수 있다.

	1번째	2번째	3번째
상황 1	A	A	B
상황 2	B	B	A

- ABA나 BAB는 두 번째에 모든 면이 칠해지므로 두 번째에 마치게 된다. 즉, 고려하면 안 된다.
- $P(3\text{번째 마칠}) = P(\text{상황 }1)+P(\text{상황 }2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$

즉, $p+q = 19$ 정답은 19

예제 042

REVIEW 반복시행의 확률 + 독립 : <사건의 분할과 각각에 대하여 같은 확률> + <덧셈정리>

2006. 3. 가형(15%). 20번. 4점

A, B, C, D 4개의 축구팀이 있다. 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다. 경기에서 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이 생길 확률을 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수)이라 할 때, $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, 비기는 경기는 없다.)

<독립시행 : 반복시행의 확률>

<예제 31번>의 설명을 다시 한 번 참조하도록 한다.

- **<표본공간 전체>**를 분할한 각각에 대하여 우리가 구하는 사건이 발생할 확률이 같은 비율의 면적을 차지할 것이라고 생각되는 경우 <확률의 연산>없이 <특정 상황으로 고정>해도 상관없지만
  <그 확률 값의 의미>는 발생할 수 있는 <특정상황에 대한 확률>이 아닌 발생할 수 있는 <모든 상황에 대한 확률>이다.

조건 이들은 각각 다른 모든 팀과 1경기씩을 치르게 되고, 각각의 팀이 경기에서 이길 확률은 $\frac{1}{2}$

- 확률 조건에서 <독립>이라는 것을 암시한다. <독립>이라면 시간에 순서가 중요하지 않으므로 언급할 필요 또한 없다.
- 총 경기 수는 ${}_4C_2 = 6$이다.

구할 것 모두 이기거나, 경기에서 모두 진 팀이 생길 확률

⇨ $P(\text{모두 이긴 팀 생길}) = 4\times P(\text{모두 이긴 팀 } A) = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

$P(\text{모두 진 팀 생길}) = 4\times P(\text{모두 진 팀 } A) = 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

$P(\text{모두 이긴 팀과 진 팀이 생길}) = {}_4P_2\times P(\text{모두 이긴 팀 } A,\ \text{모두 진 팀 } B) = \frac{3}{8}$이므로

$P(\text{모두 이긴 팀 or 진 팀이 생길}) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

- $P(\text{모두 이긴 팀 생길}) = 4\times P(\text{모두 이긴 팀 } A)$인 이유는
  모두 이긴 팀이 A, B, C, D인 경우 각각에 대하여 같은 확률 값이 나오기 때문이다.

- $P(\text{모두 이긴 팀 } A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$이라고 계산한 것은 <나머지 경기의 결과에 상관없이> A가 3경기를 모두 이길 확률을 계산한 것이다. A가 모든 경기를 확률 $\frac{1}{8}$ 안에는
  <남은 3번 경기의 모든 결과> 즉, <모두 진 팀이 발생하는 경우>와 <모두 진 팀이 발생하지 않는 경우>를 포함한다.

$m+n = 13$이므로 정답은 13

예제 043

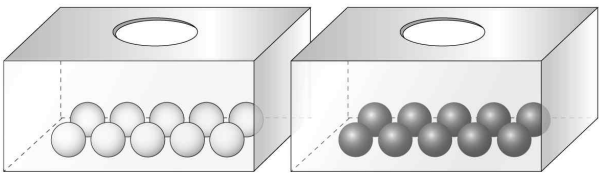
REVIEW 반복시행의 확률 + 종속 : <사건의 분할과 고정>

2014. 7. A형(26%). 28번. 4점

상자 A에는 흰 공 10개, 상자 B에는 검은 공 10개가 들어 있다. 다음과 같이 [실행 1]부터 [실행 3]까지 할 때, 상자 B의 흰 공의 개수가 홀수일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[실행 1] 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 B에 넣는다.
[실행 2] 상자 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 A에 넣는다.
[실행 3] 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 상자 B에 넣는다.



상자 A　　상자 B

조건 요약하자면 두 개의 공을 꺼내서 다른 상자에 넣는 시행을 반복한다는 뜻이다.

⇨ <선 시행>의 결과에 따라 <후 시행>이 영향을 받으므로 종속적 선후시행이라고 볼 수 있다.

구할 것 [실행 1]부터 [실행 3]까지 할 때, 상자 B의 흰 공의 개수가 홀수일 확률이 $\frac{q}{p}$

⇨ 3번의 실행 후 <상자 B>에 흰 공이 홀수인 상황은 다음과 같이 정리할 수 있다.

[실행 1] A 상자 → B 상자			[실행 2] B 상자 → A 상자		[실행 3]
			$\xrightarrow[B \to A]{\text{흰}2}$	A : 흰 10 B : 검 10	…
A : 흰 10 B : 검 10,	$\xrightarrow[A \to B]{\text{흰}2}$	A : 흰 8 B : 흰 2, 검 10	$\xrightarrow[B \to A]{\text{흰}1,\ \text{검}1}$	A : 흰 9, 검 1 B : 흰 1, 검 9	…
			$\xrightarrow[B \to A]{\text{검}2}$	A : 흰 8, 검 2 B : 흰 2, 검 8	…

- [실행 1]은 확률을 계산할 필요가 없는 상황이다. (무조건 발생하는 상황)
- 결국 [실행 2]에서 <흰1, 검1>를 옮긴 후 → [실행 3]에서 <흰2>를 옮기는 경우
  또는 [실행 2]에서 <검2>를 옮긴 후 → [실행 3]에서 <흰1, 검1>를 옮기는 경우

⇨ $P(B\text{에 흰 공이 홀수 개}) = P(\text{흰}1, \text{검}1 \to \text{흰}2) + P(\text{검}2 \to \text{흰}1, \text{검}1)$

$= P(\text{흰}1, \text{검}1) \cdot P(\text{흰}2 \mid \text{흰}1, \text{검}1) + P(\text{검}2) \cdot P(\text{흰}1, \text{검}1 \mid \text{검}2)$

$= \frac{{}_{10}C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} + \frac{{}_{10}C_2}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_8C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{16}{33}$

따라서 $p+q=49$이므로 정답 49

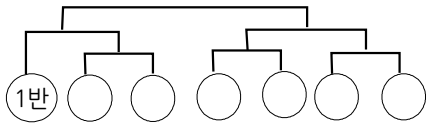
예제 044

REVIEW 반복시행의 확률 + 종속 : <확률조건> + <사건의 분할과 고정>

2006. 6. 가형(47%). 11번. 3점

3학년에 7개의 반이 있는 어느 고등학교에서 토너먼트 방식으로 축구 시합을 하려고 하는데 이미 1반은 부전승으로 결정되어 있다. 다음과 같은 형태의 대진표를 만들어 시합을 할 때, 1반과 2반이 축구 시합을 할 확률은?

(단, 각 반이 시합에서 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이고, 기권하는 반은 없다고 한다.)



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

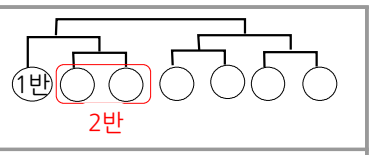
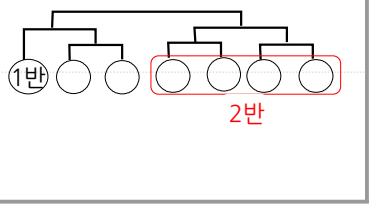
시행 대진표를 만들어 시합을 할 때,

⇨ <선 시행 : 대진표 작성>의 결과에 따라 <후 시행 : 시합>이 영향을 받는 종속적 선후 시행이다.

사건 1반과 2반이 축구 시합을 할 확률

사건의 분석 1반과 2반이 축구시합을 하는 경우를 <선 시행 : 대진표 작성>을 기준으로 상황을 분할하면 다음과 같다.

표본공간 (전체면적=1)

상황 1		⇨ <상황 1>과 같이 대진표가 작성된 후 <2반>이 1회 이김
상황 2		⇨ <상황 2>와 같이 대진표가 작성된 후 <1반>이 1회 이기고, <2반>이 2회 이김

- <Part 3. #1. 비율의 마법과 확률의 곱셈정리 - 4. 비율의 느껴라.>의 부분을 참조해보면 좋다.
- $P(1, 2\text{반 시합}) = P(\text{상황1 대진} \rightarrow 1, 2\text{반 시합}) + P(\text{상황2 대진} \rightarrow 1, 2\text{반 시합})$

$$= P(\text{상황1 대진}) \cdot P(1, 2\text{반 시합} \mid \text{상황1 대진}) + P(\text{상황2 대진}) \cdot P(1, 2\text{반 시합} \mid \text{상황2 대진})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- 전체 $6!$가지 중 <상황 1>처럼 분할되는 경우는 $2! \times 5!$이고, <상황 2>처럼 분할되는 경우는 $4! \times 5!$이다.

  결국 비율적으로 $1:2$이므로 임의로 대진표를 작성했을 때 $P(\text{상황1 대진}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{상황2 대진}) = \frac{2}{3}$이다.
- <상황 1>처럼 대진된 각각에 대하여 <1, 2반이 시합할 확률은 같으므로> 상황을 1개로 고정하고 생각해도 상관없다.

  또한 나머지 시합에 상관없이 2반이 한 번만 이기면 되므로 <2반이 이길 확률 $\frac{1}{2}$>을 한 번만 곱해주면 된다.

  ⇨ 이 부분들이 설명없이 직관으로 당연하게 느껴지면 <개념을 이해>했다고 생각해도 좋다.

정답은 ⑤

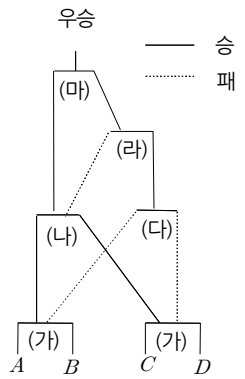
예제 045

REVIEW <반복시행의 확률> + <미래의 결과, 과거의 확률 - 조건부 분할> + <확률조건>

2009. 10. 가형(40%). 나형(28%). 23번. 4점

4 개의 야구팀 A, B, C, D가 다음과 같은 방법으로 우승팀을 결정하기로 하였다.

(가) A팀과 B팀이 경기를 하고, C팀과 D팀이 경기를 한다.
(나) (가)에서 이긴 팀끼리 경기를 한다.
(다) (가)에서 진 팀끼리 경기를 한다.
(라) (나)에서 진 팀과 (다)에서 이긴 팀이 경기를 한다.
(마) (나)에서 이긴 팀과 (라)에서 이긴 팀이 경기를 한다.
(바) (마)에서 이긴 팀이 우승팀이 된다.



매 경기에서 각 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같다고 하자. A팀이 우승했을 때, A팀이 (가)에서 이겼을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. 이때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 두 자연수이다.)

조건 경기와 대진표의 의미를 순차적으로 설명하고 있다.

⇨ <주어진 조건>에 맞게 순차적으로 대입하여 추론할 경우 A가 우승하는 경우는 다음과 같이 정리된다.

	1차전	2차전	3차전	4차전
상황 1	승	승	승	
상황 2	승	패	승	승
상황 3	패	승	승	승

조건 매 경기에서 각 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같다

- 이때 앞 경기의 결과에 상관없이 <이길 확률이 일정>하므로 <부분적으로 독립>이라는 것을 암시한다.

구할 것 A팀이 우승했을 때, A팀이 (가)에서 이겼을 확률

⇨ <A팀이 우승>한 사건이 시간적으로 뒤에 일어난 <후행사건>이며 이 문제의 조건부가 된다.

즉, <미래의 결과, 과거의 확률>을 물어보는 조건부 확률이며 결국 $P((가)에서\ 이김 \mid A\ 우승)$을 구한다.

$$P((가)에서\ 이김 \mid A\ 우승) = \frac{P((가)에서\ 이김 \cap A\ 우승)}{P(A\ 우승)}$$

- 여기에서 분모에 해당하는 <조건부 사건>은 종속적 선후시행 에서 <후행사건>이다.

위의 표에서 (가)에서 승, 패에 따라 우승할 확률이 달라지기 때문이다.

<상황 1> ∪ <상황 2> ∪ <상황 3>의 경우로 분할할 수 있고 결국

$$P(A\ 우승) = P(승 \to 승 \to 승) + P(승 \to 패 \to 승 \to 승) + P(패 \to 승 \to 승 \to 승)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

⇨ $$P((가)에서\ 이김 \mid A\ 우승) = \frac{P((가)에서\ 이김 \cap A\ 우승)}{P(A\ 우승)}$$

$$= \frac{P(승 \to 승 \to 승) + P(승 \to 패 \to 승 \to 승)}{P(승 \to 승 \to 승) + P(승 \to 패 \to 승 \to 승) + P(패 \to 승 \to 승 \to 승)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{3}{4}$$

$p+q = 7$이므로 정답은 7

예제 046

REVIEW 확률의 단순 연산

2011. 11. 나형(74%). 10번. 3점

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$, $P(A\mid B)=\frac{3}{8}$일 때, $P(A\cap B^c)$의 값은?

(단, B^c은 B의 여사건이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

- 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $P(A|B) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{8}$이다.
- 두 사건 A와 B는 서로 독립이므로 $P(B) = x$라 하면 $P(A\cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{8}x$

즉, $P(A\cup B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{8}+x-\frac{3}{8}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$이므로 $P(B) = \frac{1}{5}$

⇨ (두 사건 A와 B는 서로 독립이므로) $P(A\cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{3}{8}\times\{1-P(B)\} = \frac{3}{8}\times\frac{4}{5} = \frac{3}{10}$

정답은 ⑤

예제 047

REVIEW 확률의 단순 연산

2009. 11. 나형(84%). 5번. 3점

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고 $P(A)=P(B)$, $P(A)P(B)=\frac{1}{9}$일 때, $P(A\cup B)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

A와 B는 서로 배반사건이고 $P(A) = P(B)$이므로 $P(A) = x$라 하면 $P(B) = x$이다.

즉, $P(A)P(B) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ (확률 값은 양수)이다.

A와 B는 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A\cup B) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

정답은 ④

예제 048

REVIEW 수열과 확률 - 점화식

2005. 사관학교. 문·이과. 21번. 4점

두 개의 주머니 A, B가 있다. A주머니에는 흰 공 1 개와 검은 공 1 개가 들어 있고, B주머니에는 검은 공 2 개가 들어 있다. A주머니에 있는 공을 1 개 꺼내어 B 주머니에 넣은 후, 다시 B주머니에서 공을 1 개 꺼내어 A주머니에 넣는 과정을 1 번의 시행이라 하자. 이와 같은 시행을 4 번 반복하였을 때, A주머니에 흰 공이 들어 있을 확률은?

① $\frac{83}{162}$ ② $\frac{41}{81}$ ③ $\frac{14}{27}$ ④ $\frac{33}{64}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

조건 A주머니에는 흰 공 1 개와 검은 공 1 개가 들어 있고, B주머니에는 검은 공 2 개

조건 A주머니에 있는 공을 1 개 꺼내어 B 주머니에 넣은 후, 다시 B주머니에서 공을 1 개 꺼내어 A주머니에 넣는 과정을 1번의 시행

A : W B
B : B B
처음 상태

⇨ 부분적으로 종속적 선후시행이라고 볼 수 있다. 여기가지 나올 수 있는 모든 경우를 해보면 다음과 같다.

$A \underset{w}{\overset{w}{\rightleftarrows}} B$ ⇨ A : W B, B : B B	$A \underset{b}{\overset{w}{\rightleftarrows}} B$ ⇨ A : B B, B : W B	$A \underset{b}{\overset{b}{\rightleftarrows}} B$ ⇨ A : W B, B : B B
〈상황 1〉	〈상황 2〉	〈상황 3〉

- 여기까지 $P(\text{상황 1}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $P(\text{상황 2}) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, $P(\text{상황 3}) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{3} = \frac{1}{2}$

  결국 〈1회 시행의 결과〉 주머니 상황이 그대로일 확률과 반대로 바뀔 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다.

- 만약 1회 시행에서 〈주머니의 상황이 반대로 바뀌면〉 어떻게 될까? 즉, 〈상황 2〉에서 한 번의 시행을 더 해보자.

A : B B
B : W B
〈상황 2〉 ⇨

$A \underset{b}{\overset{b}{\rightleftarrows}} B$ ⇨ A : B B, B : W B	$A \underset{w}{\overset{b}{\rightleftarrows}} B$ ⇨ A : W B, B : B B
〈상황 2-1〉	〈상황 2-2〉

- $P(\text{상황 2}-1) = \frac{2}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, $P(\text{상황 2}) = \frac{2}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

  결국 〈A주머니에 흰 공이 있을 확률〉은 〈선 시행의 결과〉에 따라 바뀔 수 있음을 알 수 있다.

구할 것 4 번 반복하였을 때, A주머니에 흰 공이 들어 있을 확률

⇨ 〈선 시행의 결과〉에 따라 〈후 시행〉이 영향을 받으므로 종속적 선후시행이다. 즉, 〈종속적 반복시행〉이므로 〈사건의 분할〉과 〈상황의 고정〉을 통해서 풀 수 있다.

⇨ 그러나 반복된 시행의 결과가 두 가지로만 정리되는 상황이므로 〈점화식〉을 세우면 훨씬 쉽게 문제를 풀 수 있다.

즉, n번 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 P_n이라 하면

$n+1$번 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률을 P_{n+1}은

〈n번째 흰 → $n+1$번째 흰〉 또는 〈n번째 흰× → $n+1$번째 흰〉이다.

그러므로 $P_{n+1} = P_n \cdot \frac{2}{3} + (1-P_n)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}$, $P_1 = \frac{1}{2}$이므로 $P_4 = \frac{41}{81}$이다.

정답 : ④

코칭 $a_{n+1} = pa_n + q$꼴의 점화식을 푸는 과정은 책에서 언급된 적이 없으므로 생략했다.
(혹시 모르는 사람은 $n=1$부터 대입해 봐도 그리 오래 걸리지 않는다.)

예제 049

REVIEW 수열과 확률 - 시그마와 규칙성

2006. 11. 가형(56%). 나형(43%). 15번. 4점

$1, 2, 3, \cdots, 3n$ (n은 자연수)의 숫자가 하나씩 적혀 있는 $3n$장의 카드 중 임의로 꺼낸 2장의 카드에 적혀있는 두 수를 각각 a, b $(a<b)$라 하자. $3a<b$일 확률을 P_n이라 할 때, 다음은 $\lim_{n\to\infty} P_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $3n$ 장의 카드 중 2장의 카드를 꺼내는 경우의 수는 ${}_{3n}C_2$이다. $3a<b$인 경우에는 $b \leqq 3n$이므로 $1 \leqq a < n$이다. 따라서 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는 b의 경우의 수는 (가) 이므로 $P_n = \dfrac{\text{(나)}}{{}_{3n}C_2}$이다.
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty} P_n =$ (다) 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
②	$3(n-k)$	$\frac{3}{2}n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
③	$3(n-k)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$
④	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{1}{3}$
⑤	$3(n-k+1)$	$3n(n-1)$	$\frac{2}{3}$

a는 $1 \leqq a < n$일 수 밖에 없다. a가 n보다 크거나 같을 경우 $3a<b$을 만족하는 상황은 일어나지 않는다.
아래 참조하면 $a=k$라 하면 $3a<b$를 만족시키는 b의 경우의 수는 (가) 에서 (가)에 들어갈 b의 경우의 수는 $3n-(3k+1)+1 = 3n-3k$가지이다.

$1, 2, \cdots, k, \cdots, n-1$	$3k+1, 3k+2, \cdots, 3n$
a가 k인 경우	b는 총 $3n-(3k+1)+1 = 3n-3k$가지의 숫자선택이 가능하다.

즉, $P_n = P(a=1) + P(a=2) + \cdots + P(a=n-1) = \dfrac{n(a=1)+n(a=2)+\cdots+n(a=n-1)}{{}_{3n}C_2}$

$= \dfrac{1}{{}_{3n}C_2} \times \sum_{k=1}^{n-1}(3n-3k) = \dfrac{1}{{}_{3n}C_2} \times \left\{\sum_{k=1}^{n-1}3n - \sum_{k=1}^{n-1}3k\right\} = \dfrac{1}{{}_{3n}C_2} \times \left\{3n(n-1) - \dfrac{3n(n-1)}{2}\right\}$

$= \dfrac{1}{{}_{3n}C_2} \times \left\{\dfrac{3}{2}n(n-1)\right\}$이므로 $P_n = \dfrac{\text{(나)}}{{}_{3n}C_2}$에서 (나)에 들어갈 식은 $\dfrac{3}{2}n(n-1)$이다.

결국 $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{{}_{3n}C_2} \times \left\{\dfrac{3}{2}n(n-1)\right\} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(\dfrac{3n(3n-1)}{2}\right)} \times \left\{\dfrac{3}{2}n(n-1)\right\}$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)}{n(3n-1)} = \dfrac{1}{3}$ 즉, (다)는 $\dfrac{1}{3}$이다.

정답은 ①

MAP

춘천 살이

PART 01 수학적 확률

#1 시행과 사건 7

1. 시행과 사건 - 기본용어와 의미 (교과서 설명방식)
   1) 시행 2) 표본공간 3) 사건 참고) 곱집합
2. 시행의 구분
   1) 단순시행 (시간순서 無) 2) 복합시행 (시간순서 無)
   3) 독립적 선후시행 (시간순서 有) 4) 종속적 선후시행 (시간순서 有)
3. 사건의 종류와 관계
   1) 사건의 종류 2) 사건의 관계 3) 시차에 따른 사건의 분류
4. 조건을 만족하는 사건의 개수
   1) 근원사건의 개수 2) 사건 A와 배반인 사건의 개수 3) 시차에 따른 사건의 분류

#2 수학적 확률 19

1. 수학적 확률의 계산
   1) 내용적 근거 2) 같은 것을 포함한 확률 3) 결국 경우의 수 문제
2. 확률의 성질 : 당연한 내용이므로 한 번 생각해 본 뒤 넘어간다.

#3 통계적 확률과 기하학적 확률 28

1. 통계적 확률
   1) 통계적 확률은 조건이다. 2) 큰 수의 법칙
2. 기하학적 확률

PART 01 수학적 확률

#1 정수론 2탄, 3탄 일부내용 31

촌철살인 확률과 통계 1 - 발췌

1. 정수 분류법
   1) 나머지 기준 (합이 ~의 배수) 2) 소인수 기준 (곱이 ~의 배수)
2. 나머지와 주기성
3. 주기에 대한 논리 : 공통 주기 찾기

#2 원주각과 중심각 36

1. 원주각과 중심각
   1) 외각의 성질 2) 외심의 성질, 원주각과 중심각 3) 지름의 원주각
2. 단위원 위의 동점
   1) 직각삼각형의 특수 비 2) 좌표의 방향성과 독립성
   3) 단위원의 등분점과 삼등분점 (문과는 넘어가도 좋다.)

#3 해석기하 43

연속적이지만 감이 안오면 해석기하

1. 논증기하와 해석기하
   1) 논증기하 2) 해석기하
2. 자취의 방정식
   1) 자취의 방정식 2) 무작정 세우기 3) 조건, 매개변수, 변환 관계식

PART 02 확률의 계산 1

#1 비율의 면적화와 영역 분할 69

1. 단순시행
   1) 비율의 면적화와 영역 분할
   2) 단순시행에서 비율의 면적화
2. 독립적 선후시행
   1) 순열의 뜻 2) 조합의 뜻 3) 순열의 공식 4) 조합의 공식
3. 종속적 선후시행

#2 확률의 덧셈정리 74

1. 확률의 덧셈정리
   1) A 또는 B가 발생할 확률
   2) A와 B가 배반인 경우 A 또는 B가 발생할 확률
2. 여사건의 아이디어
   1) 여사건의 확률 2) 여사건의 아이디어

#3 조건부 확률 80

1. 조건부 확률의 뜻과 기호 : 바뀐 표본공간의 이해
   1) 조건부 확률의 뜻 2) 조건부 확률의 기호와 계산
2. <계산적 조건부>와 <의미상 조건부>
   1) 계산적 조건부 2) 의미상 조건부

#4 독립과 종속 91

1. 시행의 독립과 종속 : 직관적
2. 사건의 독립과 종속의 정의
   1) 사건의 독립과 종속의 뜻과 수식적 정의 2) 13개의 식
3. 독립조건

PART 02 확률의 계산 1

#1 가비의 리 101

1. 가비의 리
   1) <가비의 리>는 매우 쉬운 것이다.
   2) (참고) 식에서 가비의 리 - 수2 내용
   3) 면적에서 가비의 리
2. 사건의 독립과 종속
   1) 13개의 식 2) 독립이 되도록 표본공간을 분할하는 법

#2 명제의 참 · 거짓 판단논리 106

확률도 명제에서 자유로울 수는 없다.

1. 명제의 증명법
   1) 일반적인 이야기 2) 당위법
2. 배반, 독립, 종속의 논리관계
   1) 공사건이 아닌 두 사건
   2) 공사건의 독립과 종속 (지엽적 내용 - 중요하지 않고, 문 · 이과 모두 넘어가도 좋다.)

#3 배타적 고리문제 110

배타적 고리문제는 표를 활용하라.

1. 배타적 고리문제
2. 표 활용법
   1) 교집합이 생기지 않는 경우 2) 교집합이 생기는 경우

PART 03 확률의 계산 2

#1 비율의 마법과 확률의 곱셈정리 127

1. 확률의 곱셈정리
   1) 상황에 따른 $P(A \cap B)$
   2) <독립적 선후시행>에서 선행사건과 후행사건
   3) <종속적 선후시행>에서 선행사건과 후행사건
2. 독립사건과 종속사건에서 $P(A \cap B)$
   1) $P(A \cap B)$의 사고방식 2) 독립사건과 종속사건에서 확률의 곱셈정리
3. 분할과 상황의 고정
   1) $A \cap B$에서 A와 B는 사실 우리가 정하는 것이다.
   2) 곱하는 순간 상황은 고정 - 경우의 수 3) 곱하는 순간 상황은 고정 - 확률
4. 비율을 느껴라.
   1) 직관과 분석 1단계 - 분석 2) 직관과 분석 2단계 - 직관
   3) 직관과 분석 3단계 - 완성 4) 구체적 상황으로 느껴라.
5. 확률조건에서 두 사건의 독립과 종속
   1) 독립이라는 뉘앙스 2) 종속을 표현하는 방법 3) 애매한 상황 - 문맥상 파악

#2 곱셈정리와 조건부 확률 152

미래의 결과, 과거리 확률

1. 조건부 사건의 분할
   1) 조건부 사건이 분할되는 경우
   2) 종속적 선후시행에서 후행사건이 발생할 확률
2. 베이즈 정리 : 미래의 결과, 과거의 확률

#3 독립시행의 확률 157

1. 독립시행의 확률의 상황
   1) 베르누이의 시행과 독립시행 2) 독립시행의 확률
2. 반복시행의 확률
   1) 독립적 반복시행 2) 종속적 반복시행

PART 03 확률의 계산 2

#1 확률의 기본 연산 173

1. 벤다이어그램 활용법
   1) 벤다이어그램 표현법 : Venn의 표현법
   2) 벤다이어그램 활용법
2. 여러 가지 조건과 관계식
   1) 조건부 확률 2) 여사건 조건 3) 독립조건 4) 배반사건

#2 이항정리와 독립시행의 확률 178

1. 이항계수의 성질 - 성급한 일반화

#3 수열의 확률 180

#4 경우리 수의 맹점 183

1. 같은 것을 포함한 원순열
   1) 같은 것을 포함한 순열 2) 원순열 3) 같은 것을 포함한 원순열
2. 최단거리 문제
   1) 같은 것을 포함한 순열

#5 경우의 수로 풀기 186

1. 무엇이든 경우의 수로 풀 수 있다?
2. 무엇이든 확률의 연산으로 풀 수 있다?

PART 04 이산확률분포와 이항분포

#1 중등통계에서 배우다. 235

1. 도수분포와 평균의 이해
   1) 도수분포
   2) 평균의 이해
   3) 가중 평균, 기댓값 - 같은 계산에 다른 의미
2. 편차와 분산의 이해
   1) 편차
   2) 분산과 표준편차의 이해
   3) 분산을 구하는 공식

#2 이산확률분포와 평균, 분산, 표준편차 241

1. 이산확률분포
   1) 확률변수와 확률 2) 확률질량함수 - 표를 함수적으로 표현하는 방법
2. 평균 (= 기댓값)
   1) X의 평균, 기댓값 2) ~~의 평균, 기댓값
3. 분산과 표준편차
   1) 분산의 정의(편차 제곱의 평균)와 표준편차
   2) 분산의 계산 공식 3) 공식의 증명
4. 평균, 분산, 표준편차의 성질 - 확률변수의 변형
   1) 성질과 느낌 2) 성질의 증명 : $\sum$ 의 성질로 증명한다.

#3 이항분포 252

1. 이항분포
   1) 확률변수와 확률 2) 확률질량함수 - 표를 함수적으로 표현하는 방법
2. 이항분포표의 모든 의미를 담은 기호 : $B(n,p)$
   1) $B(n,p)$의 의미 2) $B(n,p)$로 표현하기
3. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차
   1) 공식 (먼저 외운다.) 2) 평균, 분산, 표준편차의 성질
   3) 이항분포에서 평균, 분산의 시그마 표현
4. 이항분포의 평균, 분산, 표준편차의 증명
   1) $B(n,p)$에서 $E(X)$의 증명 2) $E(aX+b) = anp+q$의 증명
   3) $B(n,p)$에서 $V(X)$의 증명 4) $V(aX+b) = a^2(npq)$의 증명

PART 04 분할의 상황

#1 표 작성 문제는 확률문제 261

1. 리그의 상황 : 조합의 상황
2. 토너먼트의 상황 : 분할의 상황

#2 이항분포의 확신 263

#3 이항정리의 연산 265

이항전개식 간단히 하기

1. 이항전개식 간단히 하기
   1) 첫 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양 1
   2) 두 번째 전개식 : <조합 × 등비수열>이 규칙적으로 더해진 모양 2

#4 큰 수의 법칙 268

식의 의미정도만 이해

PART 05 연속확률분포와 정규분포

#1 연속확률분포 295

1. 연속확률분포
   1) 용어와 의미 2) 정적분 : 실수계의 시그마 3) 확률밀도함수의 특징
   4) 질량과 밀도의 차이 5) 평균, 분산, 표준편차와 성질

#2 정규분포와 표준정규분포 299

1. 정규분포와 확률밀도함수
   1) 정규분포 뜻과 기호 2) 정규분포의 그래프
2. 정규분포의 확률 표현
   1) 정규분포의 확률을 표현하는 규칙 2) 정규분포의 확률 값을 주는 방법
   3) 같을 수밖에 없는 이유 4) 확률변수의 위치 (내 점수의 위치)
3. 정규분포의 표준화와 표준정규분포
   1) 표준화 2) 표준정규분포 3) 표준정규분포의 평균, 분산, 표준편차
   4) 정규분포 표 → 표준정규분포 표
4. 서로 다른 확률 변수로 표현된 확률 관계식

#3 이항분포의 정규분포 화 320

1. 이항분포의 정규분포 화
   1) 라플라스의 정리
   2) $X : B(n, p) \rightarrow X : N\left(np, (\sqrt{npq})^2\right)$인 경우 확률 구하기
   3) $X : B(n, p) \rightarrow X : N\left(np, (\sqrt{npq})^2\right)$인 경우 확률 구하기
2. 이항분포의 확률표현 : $\sum$를 통한 표현에 익숙해지자

PART 05 연속확률분포와 정규분포

#1 연속확률분포와 적분의 관계 325

교과과정 외 - 넘어가도 좋다.

1. 연속확률분포의 평균, 분산, 표준편차
2. 연속확률분포의 평균, 분산, 표준편차의 성질 증명

PART 06 통계적 추정

#1 표본평균의 이해 341

1. 표본평균($\overline{X}$)의 이해
   1) 이해 1단계 : 용어와 의미
   2) 이해 2단계 : $\overline{X}$를 확률변수로 인정하는 과정
2. $\overline{X}$의 평균(기댓값), 분산, 표준편차 (선 암기, 후 이해)
   1) 공식과 의미 Reading
   2) 공식 설명 : n을 충분히 작은 수로 두어 경험적으로 안다.
   3) 공식을 사용하는 근거
3. $\overline{X}$의 분포
   1) 이산확률분포 2) 정규분포

#2 모평균의 추정 350

1. 모평균의 추정 식의 도출
   1) 1단계 : 신뢰계수와 신뢰도
   2) 2단계 : 식의 표현 바꾸기
   3) 3단계 : 최종식

#3 표본비율의 이해 355

1. 표본비율($\hat{p}$)의 이해
   1) 이해 1단계 : 용어와 의미 2) 이해 2단계
2. $\hat{p}$의 평균(기댓값), 분산, 표준편차 (선 이해, 후 암기)
   1) 공식의 이해와 증명 : 이항분포의 상황임을 쉽게 이해할 수 있다.
   2) 공식과 의미 Reding
   3) 공식을 사용하는 근거
3. $\hat{p}$의 분포
   1) 무조건 이항분포 2) 이항분포의 정규분포 화

#4 모비율의 추정 362

1. 모비율의 추정 식의 도출 - 모평균 추정과 거의 같다.
   1) 1단계 : 신뢰계수와 신뢰도
   2) 2단계 : 식의 표현 바꾸기
   3) 3단계 : 최종식

PART 06 통계적 추정

#1 표본비율의 확률 367

1. 표본비율은 사실 이항분포

촌철살인 경우의 수

본 책의 PDF파일의 가격은 25000원으로 책정 되었습니다.

촌철살인

확률과 통계

수학은 직관에 의존한 논리다.

값 25000원
55410
9 788968 194498
ISBN 978-89-6819-449-8 (PDF)

티칭과 코칭