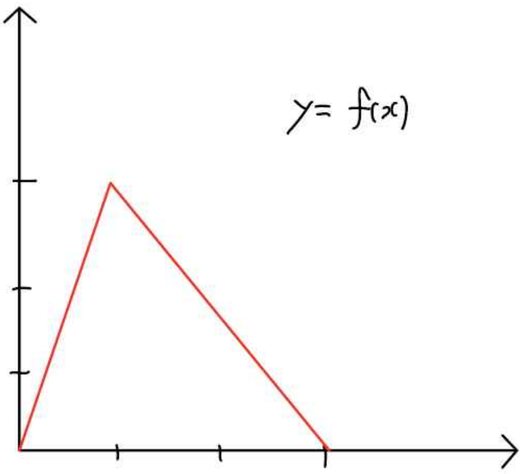
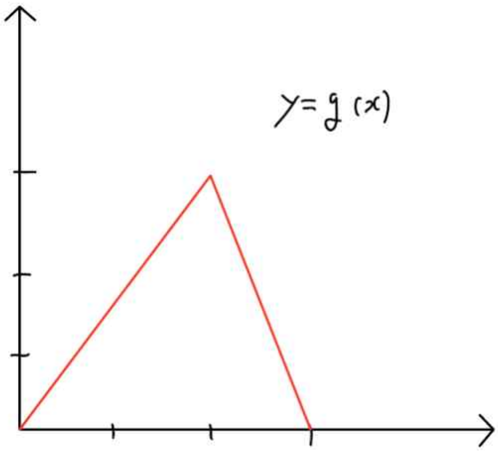
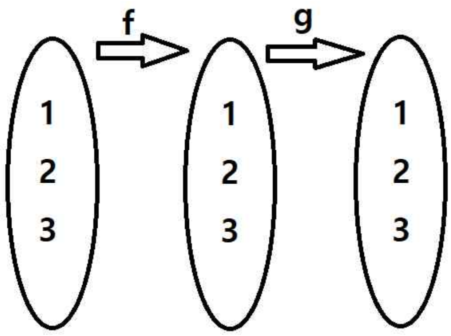
합성 함수 그래프 그리기 by 파급 효과

g(f(x)) 합성함수를 그려보자. (눈금 한 칸 = 1)



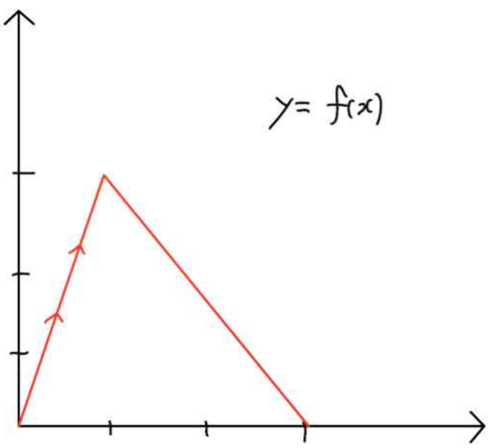


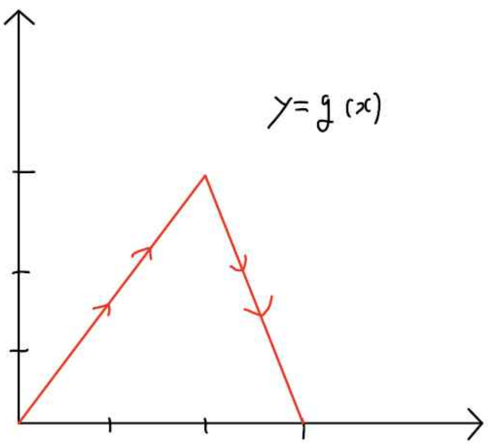
어떻게 그렸는가? f(x), g(x), g(f(x)) 정의역 구간을 열심히 나누고 직선의 방정식을 열심히 구해 가며 그렸는가? 이래도 답이 나오긴 하지만 시간이 좀 걸릴 것이다. 이제 좀 더 효율적인 방법을 알려주도록 하겠다.

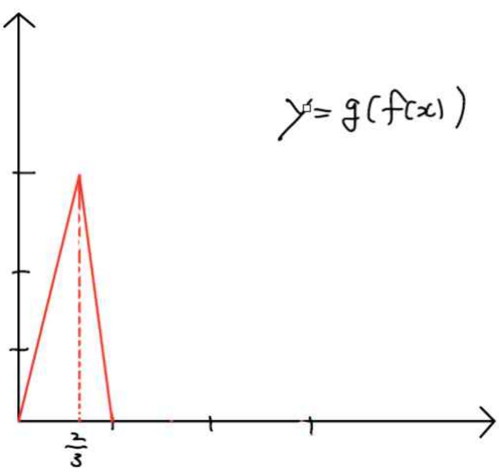


y=g(f(x))의 정의역은 f(x)의 정의역을 따른다. y=g(f(x))에서 f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 된다. 도식화한 것을 보면 쉽게 이해가 갈 것이다.
(도식화에서는 일부 정의역과 일부 치역만 나타내었다.)

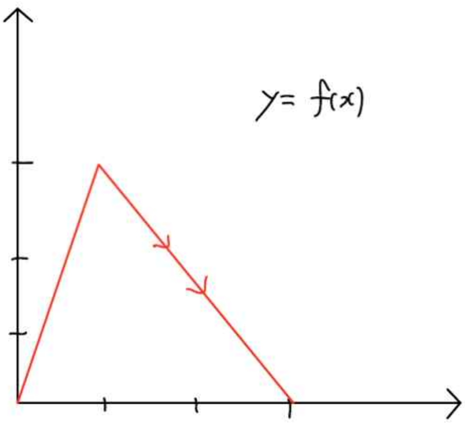
이제 본격적으로 g(f(x))를 그려보자!
먼저 f(x) 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
f(x)는 x=1 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 [0,1], [1,3] 이렇게 두 구간으로 나눈다.
(이에 대한 이유는 그래프 그리는 과정에서 알게 된다.)

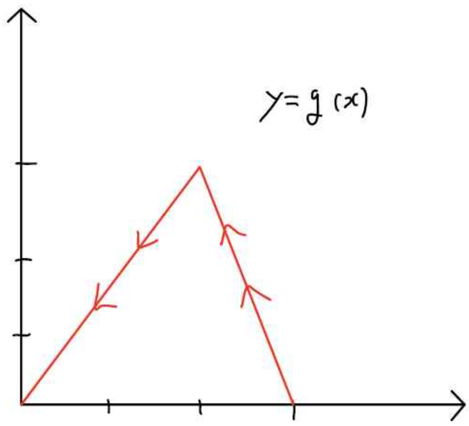


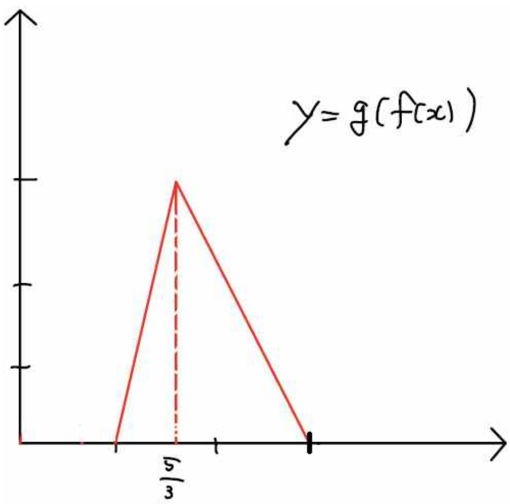




먼저 [0,1]에서 g(f(x))를 그려보자.
[0,1]에서 f(x)의 치역은 [0,3]이 된다.
f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 되므로
g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 '그래프 개형'을 g(f(x))의 정의역 [0,1]에 그리면 된다.
따라서 그려지는 그래프 개형은 왼쪽과 같다.
(보다시피 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 그래프가 scale에 맞게 잘 축소되었다.)



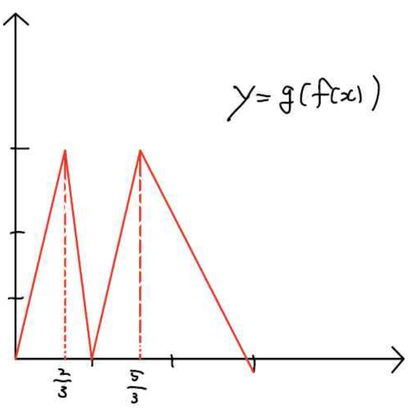




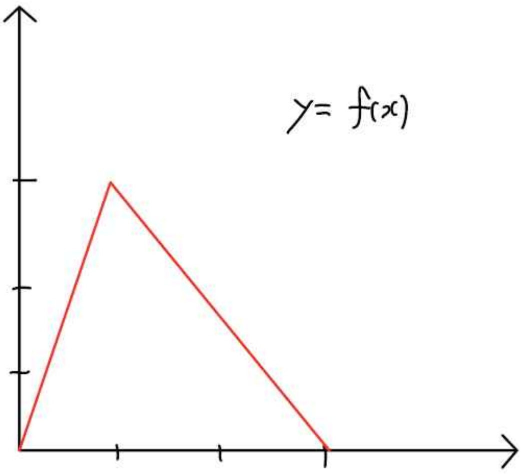
다음으로 [1,3]에서 g(f(x))를 그려보자.
[1,3]에서 f(x)의 치역은 [0,3]이 된다.
f(x)의 치역은 g(x)의 정의역이 되므로
g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 ‘그래프 개형‘을 g(f(x))의 정의역 [1,3]에 그리면 된다.
하지만 이번에는 좀 다르다!
[0,1]에서는 f(x)는 증가하므로 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 ‘그래프 개형‘을 ’정방향‘으로 그려야했다.
그러나 [1,3]에서 f(x)는 감소하므로 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 ‘그래프 개형‘을 ’역방향‘으로 그려야 한다.

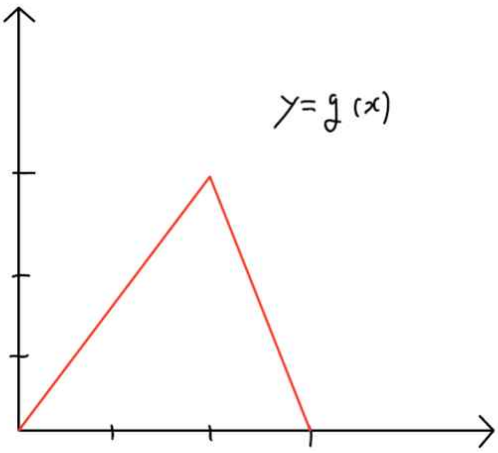
‘역방향’으로 그린다는 말은 g(x)에서 정의역 [0,3]에 해당하는 ‘그래프 개형‘을 [3,0] 방향으로 되감듯이 g(f(x))의 정의역 [1,3]에 그리면 된다는 것이다.
(f(x), g(x)위의 화살표를 보면 이해가 쉽다.)

따라서 그려지는 그래프 개형은 위와 같다. (보다시피 g(x)에서 정의역 [3,0](역방향이므로)에 해당하는 그래프가 scale에 맞게 잘 축소되었다.) 최종적으로 y=g(f(x)) 그래프는 밑과 같다.

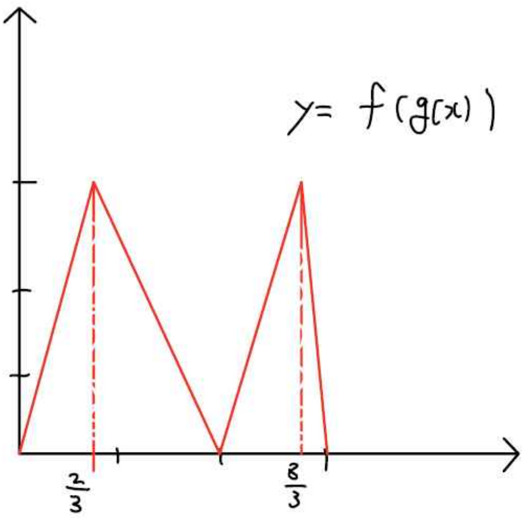


이번에는 f(g(x)) 합성함수를 그려보자. (눈금 한 칸 = 1)

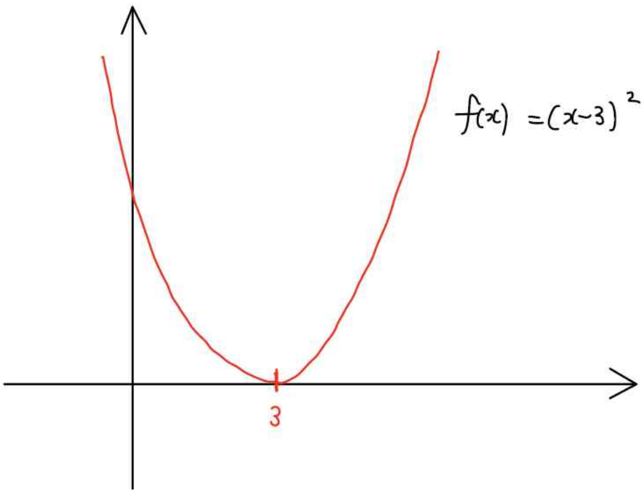




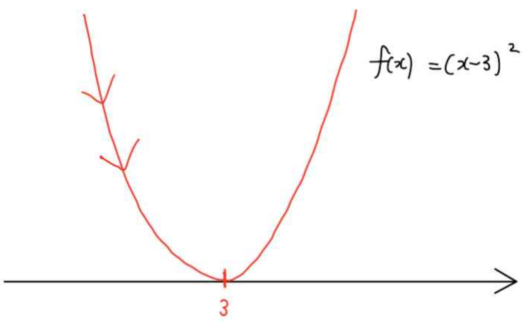
위에서 배운대로 잘 따라한다면 이와 같은 그래프가 나온다.(직접 꼭 해봐라!)

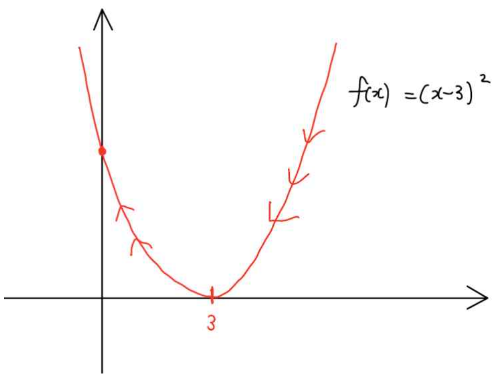


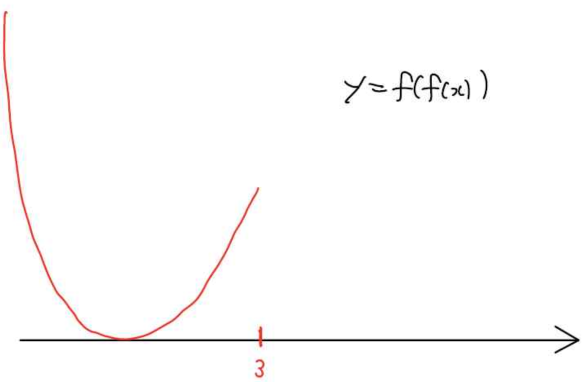
f(x) 그래프가 밑과 같을 때 f(f(x))를 그려보자.



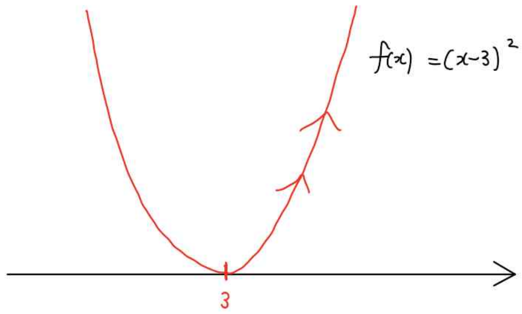
이제 본격적으로 f(f(x))를 그려보자!
먼저 f(x) 정의역을 '증감'을 기준으로 구간을 나눈다.
f(x)는 x=3 기준으로 증감이 바뀌므로 정의역을 (-∞,3], [3,∞) 이렇게 두 구간으로 나눈다.

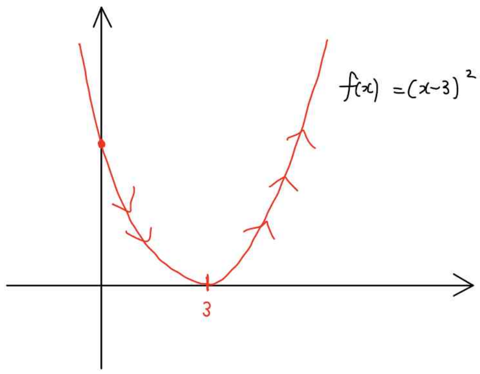


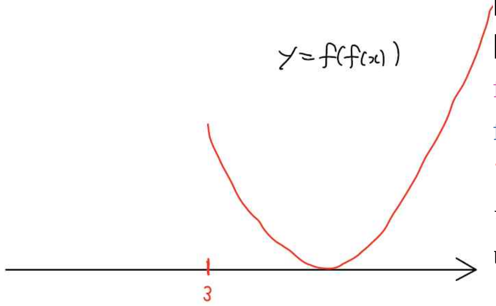




(-∞,3]에서 f(f(x))를 그려보자.
(-∞,3]에서 f(x)의 치역은 [0,∞)이 된다.
f(x)의 치역은 f(x)의 정의역이 되므로
f(x)에서 정의역 [0,∞)에 해당하는
'그래프 개형'을 '역방향'으로((-∞,3]에서
f(x)는 감소하므로) f(f(x))의 정의역 (-∞,3]
에 그리면 된다.
따라서 (-∞,3]에서 f(f(x))는 왼쪽과 같다.

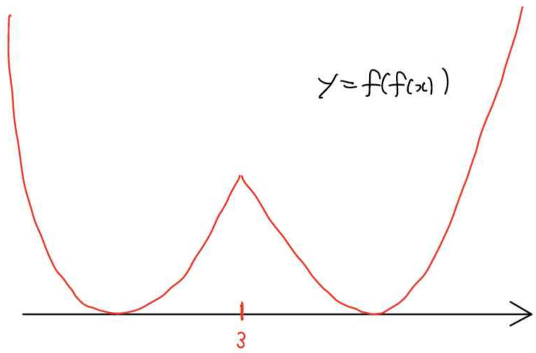






$[3,\infty)$에서 $f(f(x))$를 그려보자.
$[3,\infty)$에서 $f(x)$의 치역은 $[0,\infty)$이 된다.
$f(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역이 되므로
$f(x)$에서 정의역 $[0,\infty)$에 해당하는
'그래프 개형'을 '정방향'으로($[3,\infty)$에서 $f(x)$는 증가
하므로) $f(f(x))$의 정의역 $[3,\infty)$에 그리면 된다.
따라서 $[3,\infty)$에서 $f(f(x))$는 왼쪽과 같다.

따라서 $y=f(f(x))$의 그래프 개형은 밑과 같이 그려진다.



알다시피 미분 가능한 함수에 미분 가능한 함수를 합성하면 미분 가능한 함수이다.
따라서 $f(x)$는 미분 가능한 함수이므로 $f(f(x))$도 미분 가능한 함수이다.
$f(f(x))$그래프 개형을 좀 더 예쁘게 그리면 밑과 같다. ($x=3$에서 미분 가능한걸 추가시켜줌.)