



절대수학 극
그래프와 대수
예습 배부용 발췌

Day 1 새로운 시작

Ⅱ 2018 학년도 9월 평가원

21. 0이 아닌 세 정수 l, m, n 이

$$|l| + |m| + |n| \leq 10$$

을 만족시킨다. $0 \leq x \leq 3$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = 0, f(3) = 1 \text{ 이고}$$

$$f'(x) = \begin{cases} l \times -2(x-1) & (0 < x < 1) \\ m \times -2(x-1) & (1 < x < 2) \\ n \times 2(x-3) & (2 < x < 3) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^3 f(x)dx$ 의 값이 최대가 되도록 하는

l, m, n 에 대하여 $l+2m+3n$ 의 값은? [4점]

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

| 2009 학년도 6월 평가원 접어 미분 가불가 개념

24. 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.

(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$ 은 오직 $x=a$ ($a>2$)에서만
미분가능하지 않다.

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{array}{l} \text{(가) } g(1)=0 \\ \text{(나) } \lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n=1, 2, 3, 4) \end{array}$$

$g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$g'(x) \leq \frac{1}{3} \text{이다.}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$$

$f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

조건 (나)에서 $x \rightarrow 3$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - g(x)\} = 0$$

$$\therefore f(3) = g(3)$$

또한, $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수의 관계이므로

$$f(3) = g(3) = 3 \dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3) - g(x) + g(3)}{(x-3)g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \frac{1}{g(x)} - \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \times \frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$= f'(3) \times \frac{1}{g(3)} - g'(3) \times \frac{1}{g(3)}$$

$$= \frac{1}{3} \{f'(3) - g'(3)\} = \frac{8}{9}$$

$$\text{이때, } g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(3)} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{3} \left\{ f'(3) - \frac{1}{f'(3)} \right\} = \frac{8}{9}$$

$$3\{f'(3)\}^2 - 8f'(3) - 3 = 0$$

$$\{3f'(3) + 1\}\{f'(3) - 3\} = 0$$

$$\therefore f'(3) = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } f'(3) = 3$$

그런데, $f(x)$ 의 삼차항의 계수는 양수이고 역함수가 존재해야 하므로

$$f'(x) \geq 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore f'(3) = 3 \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여

$$f(x) - 3 = (x-3)(x^2 + ax + b)$$

라 하고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + ax + b + (x-3)(2x+a) \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 에 의하여

$$f'(3) = 9 + 3a + b = 3$$

$$\therefore 3a + b = -6 \dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x + a + (2x+a) + 2(x-3) \\ &= 6x + 2a - 6 \end{aligned}$$

이때, 변곡점의 x 좌표는

$$6x + 2a - 6 = 0$$

에서

$$x = \frac{3-a}{3}$$

그런데, $f'(3) = 3$ 에서

$$g'(3) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3}$$

이므로 조건 (가)에 의하여 $f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 3이 되어야 한다. 즉,

$$\frac{3-a}{3} = 3$$

$$\therefore a = -6$$

$\textcircled{4}$ 에 대입하면 $b = 12$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= (x-3)(x^2 + ax + b) \\ &= (x-3)(x^2 - 6x + 12) \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = -2 \times 7 + 3 = -11$$

<답> ①

30. 함수 $f(x) = -x^2(x-3)$ 에 대하여 부등식 $f(x) \geq t$ ($t > 0$)
을 만족시키는 x 의 최댓값을 $g(t)$ 라 정의하자. 함수 $g(t)$ 가
 $t=a$ 에서 불연속일 때, $10a^2$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$ 이 존재한다.

(다) 함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $f(3)$ 의 값을 k 라 할 때, $\frac{k}{9}$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가)에서

$$f(x) = x^m(x-2)^n \quad (\text{단, } m, n \text{ 은 자연수})$$

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^3}{x^m(x-2)^n} = \begin{cases} 0 & (n=1, 2) \\ \frac{1}{2^m} & (n=3) \\ \text{발산} & (n \geq 4) \end{cases}$$

$\therefore n$ 은 3 이하의 자연수

$$f'(x) = x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\} \text{ 이므로}$$

$$g(x) = x - \frac{x^m(x-2)^n}{x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}$$

i) $m \geq 2, n \geq 2$ 일 때

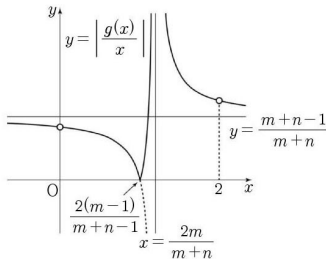
함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq 2, x \neq \frac{2m}{m+n}$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{x\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{(m+n)x-2m}$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x} &= \frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m} \\ &= \frac{2n}{x - \frac{(m+n)^2}{2m}} + \frac{m+n-1}{m+n} \end{aligned}$$

이고 점근선의 방정식은

$$x = \frac{2m}{m+n}, y = \frac{m+n-1}{m+n}$$



$$\frac{g(x)}{x} = 0 \text{ 에서 } x = \frac{2(m-1)}{m+n-1}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{2(m-1)}{m+n-1}$ 일 때 연속이고

미분가능하지 않다.

(다)에서

$$\frac{2(m-1)}{m+n-1} = \frac{5}{4}$$

$$m = \frac{5n+3}{3}$$

m 은 자연수이고 $n \leq 3$ 인 자연수이므로

$$m=6, n=3$$

ii) $m=1, n=1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq \frac{2m}{m+1}$ 인

모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{x\{mx-2(m-1)\}}{(m+1)x-2m}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{2(m-1)}{m}$ 일 때 연속이고

미분가능하지 않다.

$$\frac{2(m-1)}{m} = \frac{5}{4}$$

$\therefore$ 자연수 m 이 존재하지 않는다.

iii) $m=1, n \neq 1$ 일 때

함수 $g(x)$ 는 $x \neq 2, x \neq \frac{2}{n+1}$ 인 모든 실수에서

정의된다.

$$g(x) = \frac{nx^2}{(n+1)x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

iv) $m=n=1$ 일 때

$g(x)$ 는 $x \neq 1$ 인 모든 실수에서 정의된다.

$$g(x) = \frac{x^2}{2x-2}$$

함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 미분가능하므로

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

i), ii), iii), iv)에 의하여

$$m=6, n=3$$

$$\therefore g(x) = \frac{2x(4x-5)}{3(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{8(3x^2-8x+5)}{3(3x-4)^2}$$

$$g'(x)=0 \text{ 에서 } x=1 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	1	...	$\left(\frac{4}{3}\right)$	...	$\frac{5}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-		-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 의 극값값 k 는 $\frac{50}{27}$

따라서 $27k=50$

Ⅱ 2018 학년도 9월 평가원 x 진행 함수 개념

21. 사차함수 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 에 대하여

$x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_{-x}^{2x} \{f(t) - |f(t)|\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 < x < 1$ 에서 $g(x) = c_1$ (c_1 은 상수)

(나) $1 < x < 5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.

(다) $x > 5$ 에서 $g(x) = c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

① 40

② 42

③ 44

④ 46

⑤ 48

$f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 이므로 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

이때 $f(t) \geq 0$ 인 구간에서는

$$f(t) - |f(t)| = 0,$$

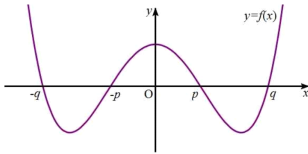
$f(t) < 0$ 인 구간에서는

$$f(t) - |f(t)| = 2f(t) < 0$$

이고, 조건 (가)에 의하여 $-1 \leq t \leq 2$ 일 때 $f(t) \geq 0$ 이어야 한다.

또, 조건 (나)에 의하여 $f(t) < 0$ 인 구간이 있어야 한다.

따라서 $f(0) > 0$ 이고 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 네 점의 x 좌표를 각각 $-q, -p, p, q$ ($0 < p < q$)라 하자.

(i) $0 < x < \frac{p}{2}$ 일 때, 구간 $[-x, 2x]$ 에

서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$g(x) = \int_{-x}^{2x} 0 dt = 0$$

조건 (가)에 의하여 $0 < x < 1$ 일 때

$g(x) = c_1$ (c_1 은 상수)이므로

$$\frac{p}{2} \geq 1, \text{ 즉 } p \geq 2$$

(ii) $\frac{p}{2} < x < q$ 일 때, 구간 $[-x, 2x]$ 에서

$f(x) < 0$ 인 구간이 점점 커지므로 $g(x)$ 는 감소한다.

조건 (나)에 의하여 $1 < x < 5$ 일 때 $g(x)$ 는 감소하므로

$$\frac{p}{2} \leq 1, q \geq 5$$

즉, $p \leq 2, q \geq 5$

(iii) $x > q$ 일 때, 구간 $[-x, -q]$ 와 구간 $[q, 2x]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$g(x) = g(q)$$

조건 (다)에 의하여 $x > 5$ 일 때 $g(x) = c_2$

(c_2 는 상수)이므로

$$q \leq 5$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$$p = 2, q = 5$$

따라서

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+2)(x-2)(x+5)(x-5) \\ &= (x^2-4)(x^2-25) \end{aligned}$$

이므로

$$f(\sqrt{2}) = (-2) \times (-23) = 46$$

정답 ④

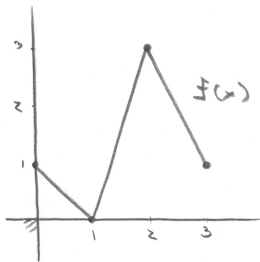
21. 최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여 $g(0) = 0$ 이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{f'(x)}{f(x)} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x)}{f(x)g'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 97 ② 99 ③ 103 ④ 105 ⑤ 109

| 그래프 합성 기본

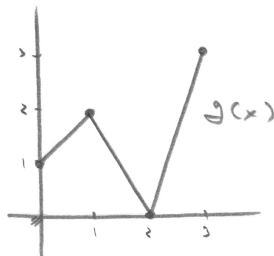


$g(f(x))$

$$f(x) = y$$



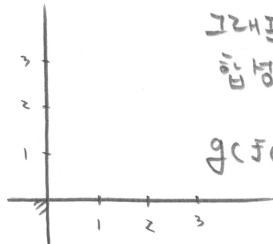
$$g(x) = y$$



그래프

합성

$g(f(x))$



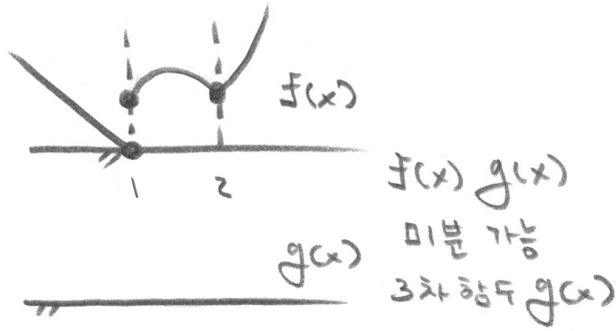
Day 2

24. 삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x - 1$ 이 있다. 실수 t ($t \geq -1$)에 대하여 $-1 \leq x \leq t$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라고 하자.

$$\int_{-1}^1 g(t) dt = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{ 의 값을 구하시오.}$$

(단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

| 그래프 곱 연불연 미분 가불가 성질



20. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x) = \int_0^x t f(t) dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $g'(0) = 0$

ㄴ. 양수 α 에 대하여 $g(\alpha) = 0$ 이면 방정식 $f(x) = 0$ 은
열린 구간 $(0, \alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 양수 β 에 대하여 $f(\beta) = g(\beta) = 0$ 이면

모든 실수 x 에 대하여 $\int_{\beta}^x t f(t) dt \geq 0$ 이다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \text{ 모든 실수 } t \text{ 에 대하여 } \int_0^t f(x) dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x) dx \text{ 이다.}$$

$$(나) \int_a^2 f(x) dx = 2, \int_a^2 |f(x)| dx = \frac{22}{9}$$

$$f(k)=0 \text{ 이고 } k < a \text{ 인 실수 } k \text{ 에 대하여 } \int_k^2 f(x) dx = \frac{q}{p} \text{ 이다.}$$

$p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28 삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록

하는 모든 실수 k 의 값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때, $p^2 + q^2$ 의 값을

구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Day 3

| 2018 학년도 9월 평가원

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 $0, 1, a, 2, b$ 이다.

$$f'(1) < 0, f'(2) < 0, f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

$x = \alpha$ 가 방정식 $(f \circ f)(x) = x$, 즉 $f(f(x)) = x$ 의 한 실근이라고 하면 다음과 같은 두 가지 경우 중의 하나이다.

(i) $f(\alpha) = \alpha$ 일 때
 α 는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x좌표이다.

(ii) $f(\alpha) = \beta$ 이고 $f(\beta) = \alpha$ 일 때
 (단, $\alpha \neq \beta$)

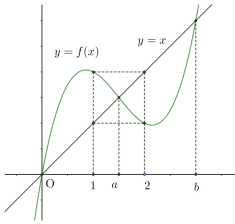
곡선 $y = f(x)$ 는 두 점 (α, β) , (β, α) 를 지나고, 이 두 점을 모두 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1$$

이다.

따라서 (i) 또는 (ii)와 주어진 조건

$f'(1) < 0$, $f'(2) < 0$ 및 $0 < 1 < a < 2 < b$ 를 모두 만족시키고 α 의 개수가 5가 되도록 하는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 경우 뿐이다.



즉, 방정식 $f(x) = x$ 를 만족시키는 실수는 0, a , b 의 3개이고,

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이어야 한다.

따라서 삼차방정식 $f(x) - x = 0$ 의 해는 0, a , b 이므로

$f(x) - x = kx(x-a)(x-b)$ (k 는 양의 상수)로 놓을 수 있다.

$f(1) = 2$ 에서

$$2 - 1 = k(a-1)(b-1)$$

$$ab - (a+b) = \frac{1}{k} - 1 \cdots \textcircled{7}$$

$f(2) = 1$ 에서

$$1 - 2 = 2k(a-2)(b-2)$$

$$ab - 2(a+b) = -\frac{1}{2k} - 4 \cdots \textcircled{8}$$

한편,

$$f(x) = k\{x^3 - (a+b)x^2 + abx\} + x$$

이므로

$$f'(x) = k\{3x^2 - 2(a+b)x + ab\} + 1$$

따라서 $f'(0) - f'(1) = 6$ 에서

$$abk + 1 - k\{3 - 2(a+b) + ab\} - 1 = 6$$

$$-3k + 2k(a+b) = 6$$

$$a+b = \frac{3}{k} + \frac{3}{2} \cdots \textcircled{9}$$

⑨를 ⑦, ⑧에 각각 대입하면

$$ab = \frac{4}{k} + \frac{1}{2} \text{ 이고 } ab = \frac{11}{2k} - 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{4}{k} + \frac{1}{2} = \frac{11}{2k} - 1 \text{에서}$$

$$\frac{3}{2k} = \frac{3}{2}$$

따라서 $k = 1$ 이므로

$$a+b = \frac{9}{2}, \quad ab = \frac{9}{2}$$

이때

$$f(x) = kx(x-a)(x-b) + x$$

$$= x^3 - (a+b)x^2 + (ab+1)x$$

이므로

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$$

따라서

$$f(5) = 5 \left(5^2 - \frac{9}{2} \times 5 + \frac{11}{2} \right)$$

$$= 5 \left(25 - \frac{45}{2} + \frac{11}{2} \right)$$

$$= 5(25 - 17) = 40$$

정답 40

29. 함수 $f(x)$ 는
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

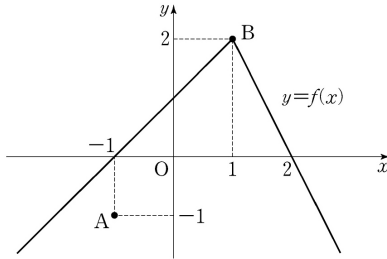
이고, 좌표평면 위에 두 점 $A(-1, -1)$, $B(1, 2)$ 가 있다.

실수 x 에 대하여 점 $P(x, f(x))$ 에서 점 A 까지의 거리와

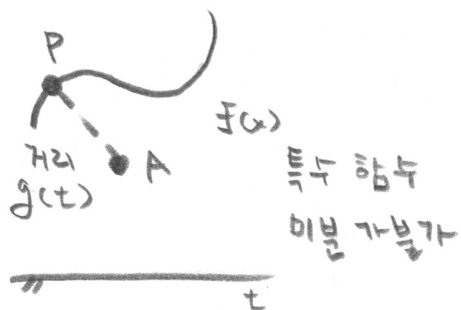
점 B 까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(x)$ 라 하자.

함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 모든 a 의

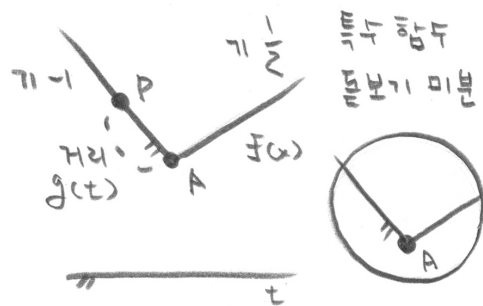
값의 합이 p 일 때, $80p$ 의 값을 구하시오. [4점]



| 특수 함수 성질



| 도함수 돋보기 한정



| 2016 학년도 6월 평가원

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가
모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x) + f(-x) = 0$
(다) $f'(x) = \{1 + f(x)\}\{1 + f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

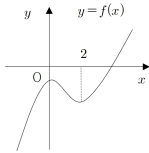
- ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq -1$ 이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y = f'(x)$ 는 세 개의 극값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 출제의도 : 도함수의 그래프로부터 함수의 그래프를 그릴 수 있고 이를 활용하여 극대와 극소, 방정식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $f(0) < 0$ 이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때,

$$f(2) < f(0) < 0$$

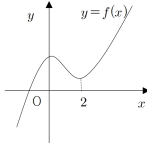
이므로

$$|f(2)| > |f(0)|$$

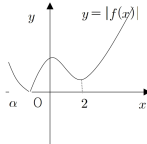
<참>

ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$ 일 때, $f(0) > f(2)$ 이므로 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형을 각 경우에 따라 그리면 다음과 같다.

(i) $f(0) > f(2) > 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

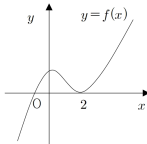


이때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



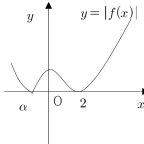
그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ ($\alpha \neq 2$)라 하면 α 의 값은 α 와 2로 개수는 2이다.

(ii) $f(0) > f(2)$ 이고 $f(2) = 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



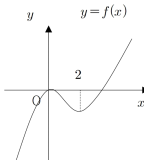
이때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형

은 다음과 같다.

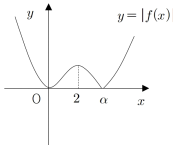


그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ ($\alpha \neq 2$)라 하면 α 의 값은 α 와 2로 개수는 2이다.

(iii) $f(0) = 0$ 이고 $f(2) < 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

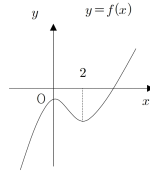


이때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

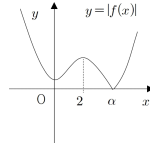


그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 α 의 값은 0과 α 로 개수는 2이다.

(iv) $f(2) < f(0) < 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.

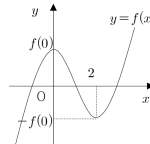


그러므로 $|f(\alpha)| = 0$ 라 하면 α 의 값은 0과 α 로 개수는 2이다.

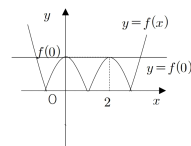
따라서 (i), (ii), (iii), (iv)에서 극소인 α 의 값의 개수는 2이다. <참>

ㄷ. $f(0) + f(2) = 0$ 이므로 $f(2) = -f(0)$

이때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 방정식 $|f(x)| = f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = f(0)$ 과의 서로 다른 교점의 개수와 같다.

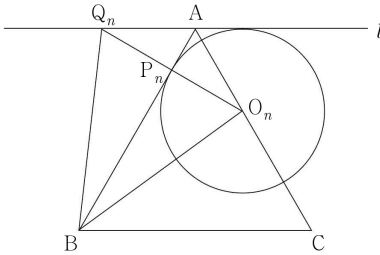
위의 그림에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = f(0)$ 의 서로 다른 교점의 개수는 4이므로 서로 다른 실근의 개수도 4이다. <참>

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

Ⅱ 2016 학년도 7월 교육청

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선 l 이 있다. 자연수 n 에 대하여 중심 O_n 이 변 AC 위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 인 원이 직선 AB와 직선 l 에 모두 접한다. 이 원과 직선 AB가 접하는 점을 P_n , 직선 O_nP_n 과 직선 l 이 만나는 점을 Q_n 이라 하자. 삼각형 BO_nQ_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n S_n = k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. [4점]



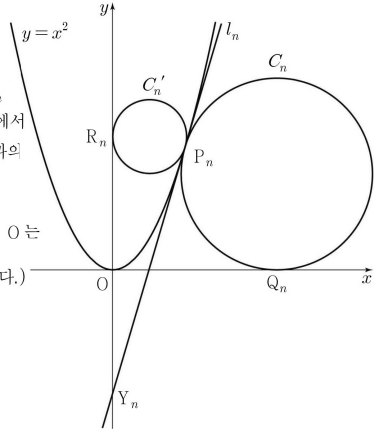
2017 학년도 7월 교육청

29. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선을 l_n 이라 하고, 직선 l_n 이 y 축과 만나는 점을 Y_n 이라 하자. x 축에 접하고 점 P_n 에서 직선 l_n 에 접하는 원을 C_n , y 축에 접하고 점 P_n 에서 직선 l_n 에 접하는 원을 C'_n 이라 할 때, 원 C_n 과 x 축과의 교점을 Q_n , 원 C'_n 과 y 축과의 교점을 R_n 이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OQ_n}{Y_n R_n} = \alpha$ 라 할 때, 100α 의 값을 구하시오. (단, O 는

원점이고, 점 Q_n 의 x 좌표와 점 R_n 의 y 좌표는 양수이다.)

[4점]



| 2013 학년도 수능

21. 함수 $f(x) = -x^2(x-k)$ ($k > 0$) 과 실수 t 에 대하여
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와
 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자.
함수 $g(t)$ 가 2 개 점에서 미분가능하지 않도록 하는
 k 의 최댓값은? [4점]

Ⅱ 2016 학년도 수능

20. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가진다. (단, k 는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

ㄱ. $\int_0^k f'(x) dx < 0$

ㄴ. $0 < k \leq 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 그 도함수의 그래프를 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 조건 (가)에서

$$f'(x) = ax(x-k) \quad (a > 0)$$

라 하면 구간 $[0, k]$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로

$$\int_0^k f'(x) dx < 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 조건 (나)에서

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$|f'(t)| = f'(t) \cdots \textcircled{\text{A}}$$

이때, $\textcircled{\text{A}}$ 은 $t > 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하므로

$$f'(t) \geq 0 \quad (t > 1)$$

따라서, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가지므로 $0 < k \leq 1$ 이다. (참)

$$\text{ㄷ. } f'(x) = ax(x-k) = ax^2 - akx \text{에서}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t |f'(x)| dx \\ &= -\int_0^k (ax^2 - akx) dx + \int_k^t (ax^2 - akx) dx \\ &= -\left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{ak}{2}x^2\right]_0^k + \left[\frac{a}{3}x^3 - \frac{ak}{2}x^2\right]_k^t \\ &= -\left(\frac{ak^3}{3} - \frac{ak^3}{2}\right) + \left(\frac{at^3}{3} - \frac{akt^2}{2} - \frac{ak^3}{3} + \frac{ak^3}{2}\right) \\ &= \frac{ak^3}{6} + \left(\frac{at^3}{3} - \frac{akt^2}{2} + \frac{ak^3}{6}\right) \\ &= \frac{at^3}{3} - \frac{akt^2}{2} + \frac{ak^3}{3} \cdots \textcircled{\text{B}} \end{aligned}$$

또한,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (ax^2 - akx) dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 - \frac{ak}{2}x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned} f(t) + f(0) &= \left(\frac{a}{3}t^3 - \frac{ak}{2}t^2 + C\right) + C \\ &= \frac{a}{3}t^3 - \frac{ak}{2}t^2 + 2C \cdots \textcircled{\text{C}} \end{aligned}$$

$\textcircled{\text{B}}, \textcircled{\text{C}}$ 이 같아야 하므로

$$C = \frac{ak^3}{6}$$

즉, $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - \frac{ak}{2}x^2 + \frac{ak^3}{6}$ 이므로 극솟값은

$$f(k) = \frac{ak^3}{3} - \frac{ak^3}{2} + \frac{ak^3}{6} = 0 \quad (\text{참})$$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

