2. 조합(수능특강변형)

1. 여자 회원의 수가 남자 회원의 수의 2배인 어느 댄스 동호회에서 남녀 각각 3명의 임원을 뽑으려고 한다. 여자 회원 중 3명을 뽑는 경우의 수가 남자 회원 중 3명을 뽑는 경우의 수의 10배일 때, 이 동호회의 남자 회원의 수는? (단, 남자 회원의 수는 3 이상이다.)

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

2. 10명의 학생으로 구성된 동아리에서 대표 2명을 뽑을 때, 적어도 한 명의 여학생이 포함되도록 뽑는 경우의 수가 39이다. 이 동아리의 여학생 수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

3. 평면 위에 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 서로 다른 10개의 직선이 있다. 이 10개의 직선 중 서로 평행한 직선의 개수가 3개 일 때 , 10개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수는?

① 98 ② 99 ③ 100
④ 101 ⑤ 102

4. 파란 공 5개, 빨간 공 5개, 검은 공 2개가 있고, 파란 공과 빨간 공에는 각각 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있다. 이 12개의 공 중에서 5개의 공을 택할 때, 같은 숫자가 적힌 공이 한 쌍만 있는 경우의 수는? (단, 검은 공에는 숫자가 적혀 있지 않다.)

① 260 ② 280 ③ 300
④ 320 ⑤ 340

5. 어느 음식점의 메뉴에 피자 3종류, 스파게티 5종류의 총 8가지 음식이 있다. 이 음식점에서 서로 다른 3가지 음식을 주문할 때, 적어도 피자 한 종류와 스파게티 두 종류는 포함되도록 주문하는 경우의 수를 구하시오.

6. 집합 $X=\{-3\ \ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $f(-2)+f(2)=0$
(나) $f(-2)<f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$

7. 같은 종류의 사탕 6개, 같은 종류의 초콜릿 10개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 각 사람이 적어도 사탕 1개, 초콜릿 2개를 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 120 ② 150 ③ 180
④ 210 ⑤ 240

8. 같은 종류의 강아지 인형 5개, 같은 종류의 곰 인형 4개를 승철이와 영희에게 남김없이 나누어 줄 때, 승철이는 적어도 강아지 인형 1개를 받고 영희는 적어도 곰 인형 1개를 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

9. 네 자리의 자연수의 천의 자리의 수를 a, 백의 자리의 수를 b, 십의 자리의 수를 c, 일의 자리수를 d 라 할 때, $a \le b \le c \le d$인 네 자리의 자연수의 개수는?

① 495 ② 500 ③ 505
④ 510 ⑤ 515

10. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

(가) $4a+b+c+d=12$
(나) $d \ge 2$

① 88 ② 92 ③ 96
④ 100 ⑤ 104

11. 방정식 $x+y+z=15$를 만족시키는 $x \ge 2$, $y \ge 3$, $z \ge 4$ 인 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

12. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?

(가) $a+b+c+d=8$
(나) $d+e=4$

① 57 ② 59 ③ 61
④ 63 ⑤ 65

13. 등식 ${}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n+1}\mathrm{C}_{2}=121$를 만족시키는 자연수 n의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

14. 어느 직업체험관에 입장하면 먼저 1층에서 요리사, 미용사, 은행원, 화가, 마술사, 의사의 여섯 가지 직업 중 3가지 체험을 하고, 다음으로 2층에서 우주비행사, 경찰관, 소방관의 세 가지 직업 중 2가지 체험을 하게 된다. 이 직업체험관의 1층과 2층에서 직업체험을 하는 경우의 수는? (단, 각 층에서 직업체험을 하는 순서는 고려하지 않는다.)

① 60 ② 64 ③ 68
④ 72 ⑤ 76

15. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합 중 8을 포함하고 1을 포함하지 않는 원소의 개수가 4인 집합의 개수는?

① 10 ② 13 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

16. 남학생 10명, 여학생 2명으로 구성된 봉사 동아리에서 A지역에 4명, B지역에 8명이 봉사활동을 가기로 하였다. 여학생 2명이 같은 지역으로 가는 경우의 수는? (단, 한 사람은 한 지역으로만 봉사활동을 간다.)

① 71 ② 73 ③ 75
④ 77 ⑤ 79

17. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적힌 카드 8장에서 서로 다른 3장을 택할 때, 3장의 카드에 적힌 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는?

① 50 ② 52 ③ 54
④ 52 ⑤ 54

18. 12명으로 이루어진 사진 동아리에서 사진을 찍을 장소를 선정하기 위해 네 지역 A, B, C, D 중 한 지역에 무기명으로 투표하기로 하였다. 투표 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 기권이나 무효는 없다.)

① 395 ② 410 ③ 425
④ 440 ⑤ 455

19. 같은 종류의 연필 8자루와 서로 다른 종류의 지우개 2개를 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 아무것도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 395 ② 405 ③ 420
④ 435 ⑤ 450

20. $(a+b+c)^6$의 전개식에서 a를 인수로 갖는 서로 다른 항의 개수는?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

21. 장미 8송이, 백합 6송이, 튤립 3송이 중에서 6송이를 택하여 꽃다발을 만들 때, 서로 다른 꽃다발을 만들 수 있는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 꽃은 구별하지 않고, 꽃송이의 배열은 고려하지 않는다.)

22. 방정식 $x+y+z=16$를 만족시키는 자연수 x, y, z에 대하여 x, y는 홀수, z는 짝수인 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 구하시오.

23. 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 노란색, 파란색, 빨간색 카드가 각각 5장씩 18장 있다. 이 18장의 카드에서 4장의 카드를 택할 때, 같은 숫자가 적힌 카드를 각각 2장씩 택하는 경우의 수는?

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 150

24. 50점 만점인 어느 수학 시험에서 출제된 15문항은 3점짜리 문항 10개, 4점짜리 문항 5개로 구성되어 있다. 어느 학생이 이 수학 시험에서 10문항을 맞힐 때, 얻는 점수가 36점 이상이 되도록 답안지를 작성하는 경우의 수는?

① 3077 ② 3177 ③ 3277
④ 3377 ⑤ 3477

25. 1부터 20까지의 자연수 중 서로 다른 4개의 수를 택할 때, 택한 4개의 수 중에서 가장 작은 수와 가장 큰 수의 차가 8인 경우의 수는?

① 308 ② 320 ③ 332
④ 344 ⑤ 356

26. 18 이하의 서로 다른 네 자연수 a, b, c, d에 대하여

$$a+7 \le b+5 \le c+3 \le d$$

를 만족시키는 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 896 ② 991 ③ 996
④ 1001 ⑤ 1006

27. 좌표평면에서 정수 x, y에 대하여 부등식 $x^2+y^2 \le 4$를 만족시키는 점 $(x,\ y)$ 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는?

① 240 ② 244 ③ 248
④ 252 ⑤ 256

28. 등식 $abc=2^7\times 3^5$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 756 ② 760 ③ 764
④ 768 ⑤ 772

29. 다음 조건을 만족시키는 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

(가) $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert+\lvert z\rvert=8$
(나) $xy\neq 0$

① 192 ② 196 ③ 200
④ 204 ⑤ 208

30. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f:X\rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)f(6)=6$
(나) $f(2)\ge f(3)\ge f(4)\ge f(5)\ge f(6)$

31. PREMIER의 일곱 개의 문자를 일렬로 나열하여 문자열을 만들 때, 문자열 RE 또는 ER를 포함하지 문자열의 개수는?

① 248 ② 252 ③ 256
④ 260 ⑤ 264

32. 1부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 공이 10개 있다. 이 중 6개의 공을 택하여 상자 A와 상자 B에 다음 조건에 따라 넣으려고 한다.

(가) 상자 A와 상자 B에 각각 3개씩 공을 넣는다. (나) 상자 A에 넣는 3개의 공에 적힌 수의 합이 3의 배수이다.

상자 A와 상자 B에 공을 넣는 경우의 수는?

① 1365 ② 1400 ③ 1435
④ 1470 ⑤ 1505

33. 두 기차역 A와 B를 연결하는 철로 사이에 15개의 역이 있다. A역에서 출발한 기차가 B역에 도착할 때까지 다음 조건에 따라 운행한다고 한다.

(가) A역과 B역 사이의 15개의 역 중에서 3개의 역에 정차한다. (나) 출발 후 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이에 적어도 두 개의 역이 있다. (다) 출발 후 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이에 적어도 세 개의 역이 있다.

A역에서 B역까지 열차가 운행하는 경우의 수는?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

34. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오.

1. 정답 ①
남자 회원의 수를 n이라 하면 여자 회원의 수는 $2n$이다. 남자 회원 중 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_3$, 여자 회원 중 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_3$이므로
${}_n\mathrm{C}_3 \times 10 = {}_{2n}\mathrm{C}_3$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}\times10=\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\times2\times1}$
$n \geq 3$이므로
$10(n-2)=4(2n-1)$
$2n=14$
따라서 이 동호회의 남자 회원의 수는 7명이다.

2. 정답 ④
이 동아리의 남학생 수를 n이라 하면 여학생 수는 $10-n$
 이다.
동아리의 구성원 10명에서 대표 2명을 뽑을 때 적어도 한 명의 여학생을 뽑는 경우의 수는 10명에서 2명을 뽑는 경우의 수에서 2명 모두 남학생을 뽑는 경우의 수를 빼면 된다.
${}_{10}\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_2 = 39$
$\frac{10\times9}{2\times1}-\frac{n(n-1)}{2}=39$
$\frac{n(n-1)}{2}=6$
$n^2-n-12=0,\ (n+3)(n-4)=0$
n은 자연수이므로 $n=4$
따라서 남학생 수가 4이므로 여학생 수는
$10-4=6$

3. 정답 ①
전체 10개의 직선에서 3개를 택하는 경우의 수는
${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$
평행한 두 직선과 다른 한 직선을 택하는 경우
${}_3C_2\times{}_7C_1=21$
평행한 세 직선을 선택하는 경우가 1가지
삼각형이 만들어지지 않으므로 구하는 경우의 수는
${}_{10}C_3-21-1=98$

4. 정답 ④
5개의 공에 검은 공이 포함되는 개수로 경우를 나누어 생각하자.
(i) 검은 공이 0개 포함된 경우
$${}_5C_1\times{}_4C_3\times2^3=160$$
(ii) 검은 공이 1개 포함되는 경우
${}_2C_1\times{}_5C_1\times{}_4C_2\times2^2=120$
(iii) 검은 공이 2개 포함되는 경우
\`${}_2C_2\times{}_5C_1\times{}_4C_1\times2=40$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
$160+120+40=320$

5. 정답 45
구하는 경우는 8가지 음식 중 서로 다른 3가지 음식을 택하는 경우에서 스파게티 5종류를 모두 택하는 경우와 피자 3종류 선택하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_8\mathrm{C}_5-{}_5\mathrm{C}_3-{}_3\mathrm{C}_3=56-10-1=45$

6. 정답 147
조건 (가)에서 $f(-2)=-f(2)$이므로 순서쌍 $(f(-2),\ f(2))$로 가능한 경우는
$(-3,\ 3)$, $(-2,\ 2)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ -1)$, $(2,\ -2)$, $(3,\ 3)$
의 7가지이다.
조건 (나)에서 이므로 집합 X에서 서로 다른 3개의 원소를 $f(-2)<f(-1)<f(0)<f(1)<f(2)$택하여 작은 수부터 차례로$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$에 대응시키면 된다. 이 경우의 수는 ${}_7C_5$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_7\mathrm{C}_5\times7=21\times7=147$

7. 정답 ②
세 사람이 각각 적어도 사탕 1개, 초콜릿 2개를 받아야 하므로 먼저 세 사람에게 각각 사탕 1개와 초콜릿 2개를 나누어 준 후 나머지 사탕 3개와 초콜릿 4개를 나누어 주는 경우를 생각하면 된다.
(i) 사탕 3개를 세 사람에게 나누어 주는 경우
세 사람에서 중복을 허락하여 두 사람을 택한 후 사탕을 주는 경우와 같으므로 그 경우의 수는
$${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$$
(ii) 초콜릿 4개를 세 사람에게 나누어 주는 경우
세 사람에서 중복을 허락하여 네 사람을 택한 후 초콜릿을 주는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$10\times15=100$

8. 정답 ③
먼저 승철이에게 강아지 인형 1개, 영희에게 곰 인형 1개를 주고 나머지 강아지 인형 4개, 곰 인형 3개를 승철이와 영희에게 나누어 주는 경우의 수를 구하면 된다.
승철과 영희에게 강아지 인형 4개를 나누어 주는 경우의 수는 승철, 영희 중 중복을 허락하여 세 사람을 택하는 경우의 수와 같으므로
$_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$
승철과 영희에게 곰 인형 3개를 나누어 주는 경우의 수는 승철, 영희 중 중복을 허락하여 두 사람을 택하는 경우의 수와 같으므로
$_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times4=20$

9. 정답 ①
네 자리의 자연수이므로 $a\geq1$이어야 한다.
$1\leq a\leq b\leq c\leq d$이므로 1부터 9까지의 자연수에서 중복을 허락하여 4개를 택한 후 크기순으로 a, b, c, d로 정하면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는
$_9\mathrm{H}_4={}_{12}\mathrm{C}_4=495$

10. 정답 ④
$d\geq2$이므로 $d=d'+2$ (d'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $4a+b+c+d=12$에서

$$4a+b+c+(d'+2)=12$$
$$4a+b+c+d'=10$$

a의 값은 0 또는 1또는 2가 될 수 있으므로 세 가지 경우로 나누어 생각하자.
(ⅰ) $a=0$일 때
방정식 $b+c+d'=10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d'의 순서쌍 $(b,\ c,\ d')$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}=66$$

(ⅱ) $a=1$일 때
방정식 $b+c+d'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d'의 순서쌍 $(b,\ c,\ d')$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$$

(ⅲ) 방정식 $b+c+d'=2$
$_3H_2={}_4C_2=6$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의하여
$66+28+6=100$

11. 정답 ④
$x=x'+2$, $y=y'+3$, $z=z'+4$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)라 하면 $x+y+z=15$에서
$(x'+2)+(y'+3)+(z'+4)=15$
$x'+y'+z'=6$
방정식 $x'+y'+z'=6$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$

12. 정답 ⑤
조건 (나)에서 방정식 $d+e=4$을 만족시키는 자연수 d, e의 모든 순서쌍 $(d,\ e)$는
$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$
의 3가지이다.
(ⅰ) $d=1$, $e=3$일 때, $_4H_4={}_7C_3=35$
(ⅱ) $d=2$, $e=2$일 때, $_4H_3={}_6C_3=20$
(ⅲ) $d=3$, $e=1$일 때, $_4H_2={}_5C_2=10$
(ⅰ), (ⅱ), ⅲ)에서 구하는 경우의 수는
$35+20+10=65$

13. 정답 ④
$_n\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2=121$에서
$\dfrac{n(n-1)}{2\times1}+\dfrac{n(n+1)}{2\times1}=121$ 를 정리하면
$2n^2=2\times121$
$n^2=121$
n은 자연수이므로 $n=11$

14. 정답 ①
1층에서 직업체험을 하는 경우의 수는
$_6\mathrm{C}_3=20$
2층에서 직업체험을 하는 경우의 수는
$_3\mathrm{C}_2=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$20\times3=60$

15. 정답 ③
집합 X의 부분집합에서 8을 포함하고 1를 포함하지 않는원소의 개수가 4인 집합의 개수는 8을 먼저 택고 1은

없다고 보고 나머지 6개 중 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_2=15$

16. 정답 ②
(ⅰ) 여학생 두 명이 A지역으로 가는 경우
A지역에 갈 남학생 2명을 택하고 나머지 6명은 B지역으로 가면 되므로 그 경우의 수는
${}_{10}C_2=45$
(ⅱ) 여학생 두 명이 B지역으로 가는 경우
B지역에 갈 남학생 6명을 택하고 나머지 4명은 A지역으로 가면 되므로 그 경우의 수는
${}_8C_6=28$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$45+28=73$

17. 정답 ①
1부터 8까지의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_3$이다.
이 중 세 수의 곱이 짝수인 경우는 세 수 모두 홀수인 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는
${}_8C_3-{}_4C_3=56-4=52$

18. 정답 ⑤
무기명 투표이므로 12명이 네 지역 A, B, C, D 에 투표한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 12개를 택하는 경우의 수와 같다.
따라서 그 경우의 수는
${}_4H_{12}={}_{15}C_{12}=455$

19. 정답 ②
같은 종류의 연필 8자루를 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_3H_8={}_{10}C_8=45$
서로 다른 종류의 지우개 2개를 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
${}_3\Pi_2=3^2=9$
따라서 구하는 경우의 수는
$45\times9=405$

20. 정답 ⑤
$(a+b+c)^6$의 전개식에서 항의 개수는 a, b, c에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3H_6$
이 중 a를 인수로 갖지 않는 항의 개수는 b, c에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2H_6$
따라서 a를 인수로 갖는 항의 개수는
${}_3H_6-{}_2H_6={}_8C_6-{}_7C_6=21$

21. 정답 23
장미, 백합, 튤립 중에서 중복을 허락하여 6송이를 택하는 경우의 수는
$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$
이 중 튤립을 4송이 이상 택한 경우는 제외해야 한다.
튤립을 4송이 택한 경우 장미와 백합 중에서 나머지 2송이를 택해야 하므로 그 경우의 수는 ${}_2H_2=3$이다.
튤립을 5소이 택한 경우 장미와 백합 중에서 나머지 1송이를 택해야 하므로 그 경우는 수는 2 이다.
튤립을 6송이 택한 경우의 수는 1이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$28-(2+2+1)=23$

22. 정답 28
x는 홀수, y와 z는 짝수이므로
$x=2x'+1$, $y=2y'+1$, $z=2z'+2$ (x', y', z'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $x+y+z=16$에서
$(2x'+1)+(2y'+1)+(2z'+2)=16$
$2x'+2y'+2z'=12$
$x'+y'+z'=6$
방정식 $x'+y'+z'=6$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 (x', y', z')의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_3H_6={}_8C_6=28$

23. 정답 ①
1부터 6까지의 자연수 중 숫자 2개를 택하는 경우의 수는
${}_6C_2=15$
선택된 각 숫자에 대하여 3개의 색 중 2개를 각각 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_2\times{}_3C_2=3\times3=9$
따라서 4장의 카드를 택할 때, 같은 숫자가 적힌 카드를 각각 2장씩 택하는 경우의 수는
$15\times9=135$

24. 정답 ⑤
이 수학 시험에서 맞힌 3점짜리 문항의 수를 x, 4점짜리 문항의 수를 y라 하면
$x+y=10$, $3x+4y\ge32$ (단, $0\le x\le10$, $0\le y\le5$)

이다. 이때

$3x+4y=3(x+y)+y=30+y\geq 32$

에서 $y\geq 2$이다.

이때 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$로 가능한 것은

$(8,\ 2),\ (7,\ 3),\ (6,\ 4),\ (5,\ 5)$

이다. 따라서 구하는 경우의 수는

${}_{10}C_8\times{}_5C_2+{}_{10}C_7\times{}_5C_3+{}_{10}C_6\times{}_5C_4+{}_{10}C_5\times{}_5C_5$

$=450+1200+1575+252=3477$

25. 정답 ①

1부터 20까지의 자연수 중 서로 다른 4개의 수를 택할 때, 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 하면 $b-a=9$이 되는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 10),\ (2,\ 11),\ (3,\ 12),\cdots,(11,\ 20)$

의 11가지이다.

이 각각에 대하여 두 수 a, b 사이의 8개의 수에서 2개의 수를 택하는 경우의 수는 ${}_8C_2$이므로 구하는 경우의 수는

$11\times{}_8C_2=11\times 28=308$

26. 정답 ④

$a+7\leq b+5\leq c+3\leq d$

$a+7=a',\ b+5=b',\ c+3=c'$ 라하면

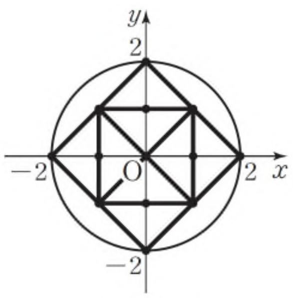
$a'\geq 8$이므로

$8\leq a'\leq b'\leq c'\leq d\leq 18$ 이므로8부터 18까지 서로 다른 11개 수 중에서 중복을 해서4개를 택하는 경우의 수와 같다.

${}_{11}H_4={}_{14}C_4=1001$

27. 정답 ⑤

좌표평면에서 부등식 $x^2+y^2\leq 4$가 나타내는 영역은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원의 경계 및 내부이고, 이 영역에 있는 x좌표와 y좌표가 정수인 점을 나타내면 다음 그림과 같다.



13개의 점에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{13}C_3=\frac{13\times 12\times 11}{3\times 2\times 1}=286$$

이때 한 직선 위에 있는 세 점을 택하면 삼각형이 만들어지지 않으므로 그 경우를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) x축 및 y축에 놓여 있는 5개의 점에서 3개를 택하는 경우

$$2\times{}_5C_3=2\times{}_5C_2=2\times\frac{5\times 4}{2\times 1}=2\times 10=20$$

(ⅱ) 한 직선 위에 있는 3개의 점에서 3개를 택하는 경우

그림에서 3개의 점이 한 직선에 놓여 있는 경우는 10가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$286-(20+10)=256$

28. 정답 ①

$a=2^{x_1}3^{y_1},\ b=2^{x_2}3^{y_2},\ c=2^{x_3}3^{y_3}$

(단, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$abc=2^{x_1+x_2+x_3}3^{y_1+y_2+y_3}$

$abc=2^7\times 3^5$에서

$x_1+x_2+x_3=7,\ y_1+y_2+y_3=5$

방정식 $x_1+x_2+x_3=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_9C_7=36$

방정식 $y_1+y_2+y_3=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3의 모든 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_{3)}$의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$36\times 21=756$

29. 정답 ②

조건 (나)에서 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이므로 $z=0$인 경우와 $z\neq 0$인 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $z=0$일 때

조건 (가)에서

$|x|+|y|=8$이고 $|x|$, $|y|$는 1 이상의 정수이므로

$|x|=x_1+1,\ |y|=y_1+1$ (x_1, y_1은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$(x_1+1)+(y_1+1)=8$

$x_1+y_1=6$

방정식 $x_1+y_1=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, y_1의 모든 순서쌍 $(x_1,\ y_1)$의 개수는

$_{2}H_{6} = {}_{7}C_{6} = 7$

이때 하나의 순서쌍 $(x_1,\ y_1)$에 대하여

$x = \pm(x_1+1),\ y = \pm(y_1+1)$일 때

방정식 $|x|+|y|=10$이 성립하므로 모든 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는

$_{2}H_{6} \times 2^2 = 7\times 4 = 28$

(ⅱ) $z \neq 0$일 때

조건 (가)에서

$|x|+|y|+|z|=8$

이고 $|x|,\ |y|,\ |z|$는 1 이상의 정수이므로

$|x| = x_2+1,\ |y| = y_2+1,\ |z| = z_2+1$

$(x_2,\ y_2,\ z_2$는 음이 아닌 정수)로 놓으면

$(x_2+1)+(y_2+1)+(z_2+1)=8$

$x_2+y_2+z_2=5$

방정식 $x_2+y_2+z_2=5$을 만족시키는 음이 아닌 정수

$x_2,\ y_2,\ z_2$의 모든 순서쌍 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$의 개수는

$_{3}H_{5} = {}_{7}C_{5} = {}_{7}C_{2} = 21$

이때 하나의 순서쌍 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

$x = \pm(x_2+1),\ y = \pm(y_2+1),\ z = \pm(z_2+1)$일 때

방정식 $|x|+|y|+|z|=10$이 성립하므로 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$_{3}H_{5} \times 2^3 = 21 \times 8 = 168$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는

$28+168=196$

30. 정답 105

조건 (가)에서 $f(1)f(6)=6$이므로 $f(6)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.

(ⅰ) $f(6)=2$일 때

$f(1)=3$이고 $f(2) \ge f(3) \ge f(4) \ge f(5) \ge 2$이므로 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 4개를 택한 후 크기순으로 차례로 $f(2),\ f(3),\ f(4)$,$f(6)$의 값으로 정하면 된다.

그 경우의 수는

$_{5}H_{4} = {}_{8}C_{4} = 70$

(ⅱ) $f(6)=3$일 때

$f(1)=2$이고 $f(2) \ge f(3) \ge f(4) \ge f(5) \ge 3$이므로 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 4개를 택한 후 크기순으로 차례로 $f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$의 값으로 정하면 된다.

그 경우의 수는

$_{4}H_{4} = {}_{7}C_{4} = {}_{7}C_{3} = 35$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$70+35=105$

31. 정답 ②

RE와 ER를 포함하지 않기 위해서는 3문자 P, M, I를 나열한 후 양 끝이나 각 문자의 사이 4군데에 다음 ①, ②, ③, ④의 각 문자나 문자열이 들어가야 한다.

∨ P ∨ M ∨ I ∨

① R, R, E, E ② RR, E, E

③ EE, R, R ④ RR, EE

각각의 경우의 수를 구해 보자.

①의 경우 4군데 중 R가 들어갈 2군데를 고르고 나머지 2군데에 E를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$_{4}C_{2} \times {}_{2}C_{2} = 6 \times 1 = 6$

②의 경우 RR가 들어갈 1군데를 고르고, E가 들어갈 2군데를 고르면 되므로 그 경우의 수는

$_{4}C_{1} \times {}_{3}C_{2} = 4 \times 3 = 12$

③의 경우 EE가 들어갈 1군데를 고르고, R가 들어갈 2군데를 고르면 되므로 그 경우의 수는

$_{4}C_{1} \times {}_{3}C_{2} = 4 \times 3 = 12$

④의 경우 RR가 들어갈 1군데와 EE가 들어갈 1군데를 고르면 되므로 그 경우의 수는

$_{4}C_{1} \times {}_{3}C_{1} = 4 \times 3 = 12$

이때 P, M, I를 나열하는 경우의 수는 3!이므로 구하는 경우의 수는

$6 \times 42 = 252$

32. 정답 ④

상자 A에 넣을 3개의 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 세 집합

$S_1 = \{1,\ 4,\ 7,\ 10\},\ S_2 = \{2,\ 5,\ 8\},\ S_3 = \{3,\ 6,\ 9\}$

에 대하여 각 공에 적힌 수가 다음과 같은 경우이다.

(ⅰ) 세 공에 적힌 수가 모두 한 집합의 원소인 경우

세 집합 중 한 집합에서 3개의 원소를 택하는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

$_{4}C_{3} + {}_{3}C_{3} + {}_{3}C_{3} = 4+1+1 = 6$

(ⅱ) 세 공에 적힌 수가 세 집합에 각각 하나씩 있는 경우

각 집합에서 한 개의 원소를 택하는 경우와 같으므로 이 경우의 수는

$_{4}C_{1} \times {}_{3}C_{1} \times {}_{3}C_{1} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

(ⅰ), (ⅱ)에서 상자 A에 넣을 공 3개를 택하는 경우의 수는

$6+36=42$

이 각각에 대하여 상자 B에 넣을 공 3개를 택하는 경우의 수는

$_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

따라서 구하는 경우의 수는

$42\times35=1470$

33. 정답 ③

A역과 출발 후 첫 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 a, 첫 번째 정차한 역과 두 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 b, 두 번째 정차한 역과 세 번째 정차한 역 사이의 역의 개수를 c, 세 번째 정차한 역과 B역 사이의 역의 개수를 d라 하자. 이때 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고

$a+b+c+d=12$, $b\geq2$, $c\geq3$

음이 아닌 정수 b', c'에 대하여 $b=b'+2$, $c=c'+3$라 하면

$a+(b'+2)+(c'+3)+d=12$

$a+b'+c'+d=7$ …… ㉠

구하는 경우의 수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d의 순서쌍 $(a,\ b',\ c',\ d)$의 개수와 같으므로 그 경우의 수는

$_4H_7=\,_{10}C_7=\,_{10}C_3=120$

34. 정답 105

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는

$_6C_2=15$

이 15개의 부분집합 중에서 서로 다른 두 집합을 선택하는 경우의 수는

$_{15}C_2=15\times7=105$