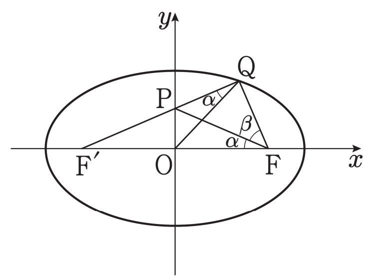
III

기하와 벡터

01 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하고, y축 위의 점 P에 대하여 직선 $\mathrm{F'P}$가 이 타원과 제1사분면 위의 점 Q에서 만난다고 하자.

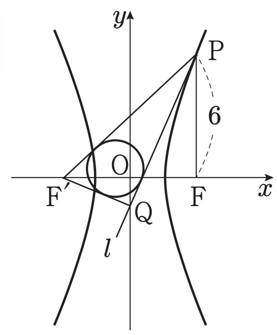
$$\angle \mathrm{PQO} = \angle \mathrm{PFO} = \alpha,\ \angle \mathrm{PFQ} = \beta$$

일 때, $\tan(\alpha-\beta)$의 값은? (단, O는 원점이다.) EBS 수특 p.14-5 변형

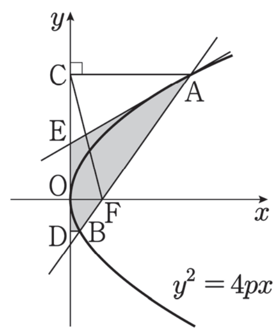


① $\frac{4}{23}$　② $\frac{9}{46}$　③ $\frac{5}{23}$　④ $\frac{11}{46}$　⑤ $\frac{6}{23}$

02 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c > 0)$ 일 때, 제1사분면에 있는 이 쌍곡선 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{FP}} = 6$을 만족시킨다. $\angle \mathrm{F}'\mathrm{PF}$를 이등분하는 직선 l이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 QPF'의 내접원의 반지름의 길이는 $p + q\sqrt{5}$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) EBS 수특 p.14-8 변형



03 그림과 같이 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AC}}=8$, $\overline{\mathrm{CF}}=2\sqrt{17}$일 때, 점 A에서 이 포물선에 접하는 직선이 y축과 만나는 점 E에 대하여 사각형 AEDB의 넓이는? (단, 점 A의 y좌표는 양수이다.) EBS 수특 p.15-1 변형



① $\frac{51}{2}$ ② $\frac{53}{2}$ ③ $\frac{55}{2}$ ④ $\frac{57}{2}$ ⑤ $\frac{59}{2}$

04 두 곡선 $x^2 - y^2 = k$와 $2xy^4 = 1$이 만나는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a > 0,\ b > 0)$에서 두 곡선에 각각 접하는 두 직선이 이루는 예각의 크기가 최소일 때, 실수 k의 값은? EBS 수특 p.25-1 변형

① $-\dfrac{1}{4}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $-\dfrac{3}{4}$ ④ -1 ⑤ $-\dfrac{5}{4}$

05 좌표평면에서 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P와 점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$에 대하여 점 Q가 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$이고 좌표평면 위의 점 X가 원점O에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XQ}}\le 0$$

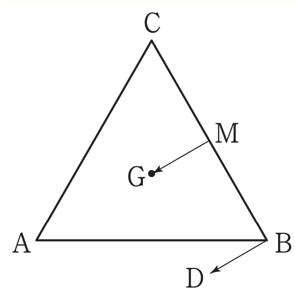
를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최댓값과 최솟값의 합은? EBS 수특 p.29(예제1) 변형

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

06 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중심을 M이라 하자. $\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}$를 만족시키는 점 D가 있을 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$$

을 만족시키는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{GX}}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은? EBS 수특 p.29 (유제) 변형

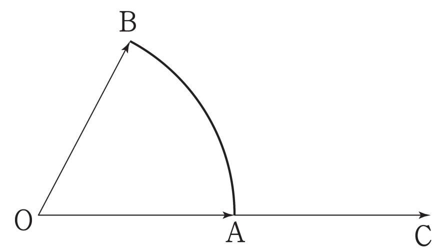


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

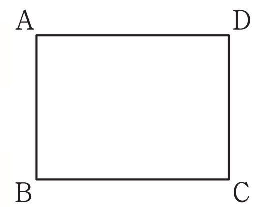
07 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB가 있다.
$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 일 때, 세 선분 OC, OD, CD 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 S일 때, S^2의 값을 구하시오. EBS 수특 p.34-4 변형



08 그림과 같이 $\overline{AB} : \overline{AD} = 3:4$인 직사각형 ABCD와 평면 ABCD 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.



(가) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$

(나) 직사각형 ABCD의 넓이는 48이다.

$|\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{DC}|$를 만족시키는 점 X에 대하여

$$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}|$$

의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. EBS 수특 p.35-2 변형

09 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(3,\ -4)$ 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2$를 만족시키는 점 P가 있을 때, 직선 $y=k$ 위의 점 Q가 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=0$ 을 만족시킨다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$가 최대일 때 실수 k의 값을 k_1, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$가 최소일 때 실수 k의 값을 k_2라 하자. k_1-2k_2의 값은? EBS 수특 p.36-1 변형

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

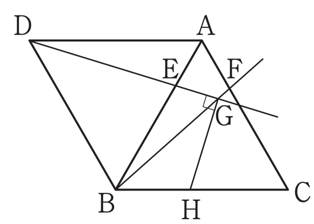
10 그림과 같이 좌표평면에서 한 변 AB를 공유하는 두 정삼각형 ABC, ADB가 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AE}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

일 때, 두 직선 DE와 BF가 만나는 점을 G라 하자. $0 < m < 1$인 실수 m에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = m\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \angle\mathrm{DGH} = \frac{\pi}{2}$$

일 때, m의 값은? EBS 수특 p.36-2 변형



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

정답

정답

I 확률과 통계

01		02		03		04		05		06		07		08		09		10	
11		12		13		14		15		16		17		18		19		20	
21		22		23		24		25		26		27		28		29		30	
31		32		33		34		35		36		37		38		39		40	
41		42		43		44		45		46		47		48		49		50	
51																			

II 미적분 II

01	②	02	⑤	03	②	04	④	05	②	06	②	07	108	08	②	09	④	10	③
11	④	12	⑤	13	①	14	③	15	②	16	②	17	④	18	④	19	①	20	65
21	40	22	④	23	②	24	140	25	④	26	⑤	27	375	28	165	29	②	30	③
31	④	32	⑤	33	③	34	③	35	75										

III 기하와 벡터

01	②	02	34	03	②	04	③	05	④	06	④	07	75	08	60	09	④	10	④
11		12		13		14		15		16		17		18		19		20	
21		22		23		24		25		26		27		28		29		30	
31																			

Ⅲ. 기하와 벡터

01. y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}$ 이므로

$$\angle \mathrm{PF'O}=\angle \mathrm{PFO}=\angle \mathrm{PQO}=\alpha$$

이때 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OF'}}=\overline{\mathrm{OF}}$ 이므로 점 Q는 선분 F′F를 지름으로 하는 원 위의 점이고

$\angle \mathrm{F'QF}=\dfrac{\pi}{2}$가 된다. $\overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{25-12}=\sqrt{13}$이고,

$$\overline{\mathrm{F'Q}}=m,\quad \overline{\mathrm{FQ}}=n\ (m>n)$$

으로 놓으면 타원의 정의에 의해

$$m+n=10 \quad \cdots \ ㉠$$

직각삼각형 F′FQ에서

$$m^2+n^2=\overline{\mathrm{F'F}}^2=(2\sqrt{13})^2=52 \quad \cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $m=6,\ \ n=4$

이때

$$\tan\alpha=\frac{n}{m}=\frac{2}{3},\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{PF}}},$$

$$\overline{\mathrm{PF}}=\frac{\sqrt{13}}{3}\overline{\mathrm{OF}}=\frac{\sqrt{13}}{3}\times\sqrt{13}=\frac{13}{3}$$

직각삼각형 PFQ에서

$$\cos\beta=\frac{\overline{\mathrm{FQ}}}{\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{4}{\frac{13}{3}}=\frac{12}{13}$$

이므로

$$\tan\beta=\frac{5}{12}$$

$$\therefore\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{5}{12}}{1+\frac{2}{3}\times\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{23}{18}}=\frac{9}{46}$$

답 ②

02. $c=\sqrt{4+12}=4,\ \ \mathrm{F}(4,\ 0),\ \mathrm{F'}(-4,\ 0)$

이므로 $\overline{\mathrm{F'F}}=8$이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=4,\quad \overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FP}}+4=6+4=10$$

이때 삼각형 PF′F는 $\angle \mathrm{F'FP}=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고 $\mathrm{P}(4,\ 6)$이다.

한편, 각의 이등분선 l과 선분 F′F의 교점을 A라 하면

$$\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{F'P}}:\overline{\mathrm{FP}}=10:6=5:3$$

이므로 $\overline{AF} = \frac{3}{8}\overline{F'F} = 3$이다.

직선 l의 기울기가 $\frac{\overline{FP}}{\overline{AF}} = \frac{6}{3} = 2$ 이므로 직선 l의 방정식은

$y = 2(x-4)+6 = 2x-2,\quad Q(0,\ -2)$

이때 직선 $F'Q$의 기울기가 $\frac{-2-0}{0-(-4)} = -\frac{1}{2}$ 이므로 직선 $F'Q$는 직선 l과 수직이다.

$\overline{F'Q} = 2\sqrt{5},\quad \overline{QP} = 4\sqrt{5},\quad \overline{F'P} = 10$ 이므로

삼각형 QPF'의 내접원의 반지름의 길이는

$$\frac{\overline{F'Q}\times\overline{QP}}{\overline{F'Q}+\overline{QP}+\overline{F'P}} = \frac{2\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+10} = \frac{20}{3\sqrt{5}+5}$$
$$= \frac{20(3\sqrt{5}-5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2} = 3\sqrt{5}-5 = -5+3\sqrt{5}$$

$\therefore\ p = -5,\quad q = 3,\quad p^2+q^2 = 25+9 = 34$

답 34

03. $\overline{AC} = 8$ 이므로 점 A의 x좌표는 8이고 y좌표는

$y^2 = 4p\times 8 = 32p = \overline{OC}^2$

$\overline{OF} = p,\quad \overline{CF} = 2\sqrt{17}$ 이므로 직각삼각형 OFC에서

$(2\sqrt{17})^2 = p^2+32p,\quad p^2+32p-68 = 0,$

$(p-2)(p+34) = 0,\quad \therefore\ p = 2$

이때 $\overline{AF} = \overline{AC}+p = 8+2 = 10$

공식 $\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{\overline{OF}}$을 이용하면

$\frac{1}{10}+\frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{2},\quad \overline{BF} = \frac{5}{2},\quad \overline{BD} = \overline{BF}-p = \frac{5}{2}-2 = \frac{1}{2}$

한편, $A(8,\ 8)$ 이므로 점 A에서의 접선의 방정식은

$8y = 4(x+8),\quad y = \frac{1}{2}x+4,\quad E(0,\ 4)$

포물선 $y^2 = 8x$에서 $A(8,\ 8)$, $B\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ 이므로

$$\square AEDB = \square ACDB - \triangle ACE$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD} - \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{CE}$$
$$= \frac{1}{2}\left(8+\frac{1}{2}\right)\times\{8-(-2)\} - \frac{1}{2}\times 8\times(8-4)$$
$$= \frac{53}{2}$$

답 ②

04. $x^2-y^2 = k$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\ (y\neq 0)$$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 곡선 $x^2-y^2=k$의 접선의 기울기는 $\frac{a}{b}$

또, $2xy^4=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y^4+2x\cdot 4y^3\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{4x}\ (y\neq 0)$$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 곡선 $2xy^4=1$의 접선의 기울기는 $-\frac{b}{4a}$

두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{a}{b}-\left(-\frac{b}{4a}\right)}{1+\frac{a}{b}\cdot\left(-\frac{b}{4a}\right)}\right|=\frac{4}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{4a}\right)$$

$$\geq\frac{4}{3}\times 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{4a}}=\frac{4}{3}$$

θ가 최소일 때 $\tan\theta$가 최소이고 이때 $\frac{a}{b}=\frac{b}{4a},\quad b=2a\quad\cdots$ ㉠

한편, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 곡선 $2xy^4=1$ 위의 점이므로 $2ab^4=1\quad\cdots$ ㉡

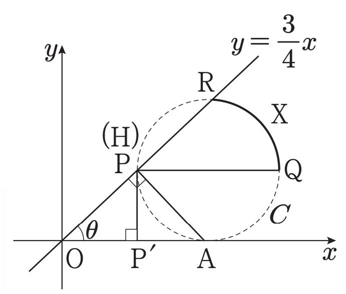
㉠, ㉡에서 $32a^5=1,\quad a^5=\frac{1}{32},\quad a=\frac{1}{2},\quad b=1$

또 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 곡선 $x^2-y^2=k$ 위의 점이므로

$$k=a^2-b^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{3}{4}$$

답 ③

05.



$\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{3}{4},\ \sin\theta=\frac{3}{5},\ \cos\theta=\frac{4}{5}$ 이다.

점 $\mathrm{A}(5,\ 0)$에서 직선 $y=\frac{3}{4}x$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}\sin\theta=5\times\frac{3}{5}=3$$

그런데 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 위의 점 P가 $\overline{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=3$을 만족하므로 점 P는 점 H와 일치한다. 이때

$$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta=5\times\frac{4}{5}=4$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P'이라 하면

$$\overline{\mathrm{OP}'}=\overline{\mathrm{OP}}\cos\theta=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5},$$

$$\overline{\mathrm{PP}'}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$$

에서 $\mathrm{P}\left(\frac{16}{5},\ \frac{12}{5}\right)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에서

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\frac{41}{5},\ \frac{12}{5}\right)$$ (= 점 P를 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$만큼 평행이동한다.)

한편, $\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QX}}=0$에서 점 X는 선분 PQ를 지름으로 하는 원 C 위의 점이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XQ}} \le 0$에서 $\overrightarrow{\mathrm{XO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XQ}} \ge 0$ 이므로

$\angle \mathrm{OXQ} \le \dfrac{\pi}{2}$이고, 직선 $y = \dfrac{3}{4}x$와 원 C의 두 교점을 P, R라 할 때 점 X는 호 QR 위에 있게 된다.

($\because$ $\overrightarrow{\mathrm{XO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XQ}} = 0$ 인 경우, 점 X는 선분 OQ를 지름으로 하는 원 C' 위에 있고, $\angle \mathrm{ORQ} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 점 R는 원 C' 위에 있다. 이때 원 C에서 호 QR 부분만이 원 C'의 외부에 있게 되고, 호 QR 위의 점 X가 $\overrightarrow{\mathrm{XO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XQ}} \ge 0$을 만족시킨다.)

이때 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최댓값은 X $=$ Q 일 때

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(\frac{9}{5},\ -\frac{12}{5}\right) \cdot (5,\ 0) = 9$$

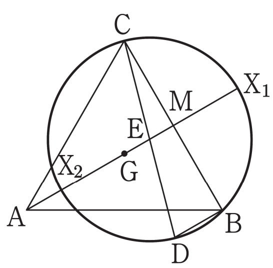
이고, $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PX}}$의 최솟값은 X $=$ R 일 때

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0\ (\because\ \angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{AHR} = \frac{\pi}{2})$$

$\therefore\ 9 + 0 = 9$

답 ④

06.



$$\overline{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\overline{\mathrm{MA}} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3} = \overline{\mathrm{BD}}$$

이고 $\angle \mathrm{CBD} = \angle \mathrm{CMG} = \dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{CD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{39}$$

이때 두 직선 AM과 CD의 교점을 E라 하면 점 E는 선분 MG와 선분 CD의 중점이고

$$\overline{\mathrm{EG}} = \overline{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{MG}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{ED}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}} = \frac{\sqrt{39}}{2} = \overline{\mathrm{EX_1}} = \overline{\mathrm{EX_2}}\ \text{(그림참조)}$$

한편, $|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AX}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$

에서 $(\overrightarrow{\mathrm{AX}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{AX}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DX}} = 0$

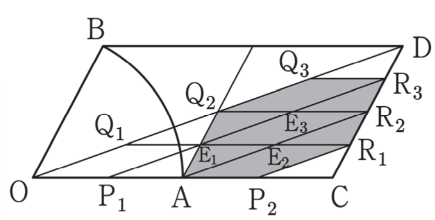
이므로 점 X는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위에 있다.

점 E가 이 원의 중심이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{GX}}|$의 최댓값과 최솟값의 곱은 그림에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{GX_1}} \times \overline{\mathrm{GX_2}} &= (\overline{\mathrm{EX_1}} + \overline{\mathrm{EG}}) \times (\overline{\mathrm{EX_2}} - \overline{\mathrm{EG}}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{39}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{39}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{39}{4} - \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9\end{aligned}$$

답 ④

07.



$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$와 $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = 4$에서 $\overline{\mathrm{OC}} = \overline{\mathrm{BD}} = 8$, $\overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{CD}} = 4$인 평행사변형 OCDB가 생긴다. 선분 OC의 사등분점을 $\mathrm{P_1}$, A, $\mathrm{P_2}$, 선분 OD의 사등분점을 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$, 선분 CD의 사등분점을 $\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$,

R_3이라 하고, $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OQ_1}$이라 하면

$$\overrightarrow{OY} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$$

를 만족하는 점 Y가 나타내는 영역은 평행사변형 $OP_1E_1Q_1$의 둘레 및 내부이고, 그 넓이 S_1은 평행사변형 OCDB의 넓이의 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$(배)이다. 삼각형 OAB가 정삼각형이므로

$$S_1 = \frac{1}{16}(\square OCDB) = \frac{1}{16} \times 4(\triangle OAB) = \frac{1}{16} \times 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2\right) = \sqrt{3}$$

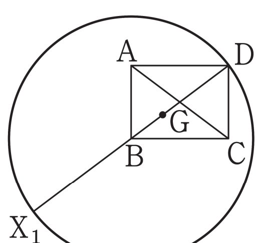
이때 $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$를 만족하는 점 X는 점 Y를 $\frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$만큼 평행이동한 점이므로 점 Y가 나타내는 영역인 $\square OP_1E_1Q_1$을 평행이동시켜 선분 OC의 중점 A에서 선분 OD의 중점 Q_2까지, 즉 선분 AQ_2 $(= \frac{1}{2}\overrightarrow{OR}$의 종점이 나타내는 도형)를 따라 움직여서 만들어지는 도형 $AP_2R_1R_3Q_3Q_2$의 둘레 및 내부를 나타내게 된다. 따라서 구하는 넓이는

$$S = 5S_1 = 5\sqrt{3} \quad \left(\begin{array}{l} \because \square AP_2R_1E_2 = \square E_1E_2R_2E_3 = \square Q_2E_3R_3Q_3 = S_1, \\ \triangle AE_2E_1 = \triangle E_1E_3Q_2 = \triangle E_2R_1R_2 = \triangle E_3R_2R_3 = \frac{1}{2}S_1 \end{array}\right)$$

$\therefore\ S^2 = (5\sqrt{3})^2 = 75$

답 75

08.



삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$\overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$$

이므로 조건 (가)에서

$$3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PD}$$

직선 GD 위에서 $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD}$ 이므로 점 P는 점 B와 일치한다.

한편 $\overline{AB} = 3k$, $\overline{AD} = 4k$로 놓으면 조건 (나)에서

$$(3k) \times (4k) = 12k^2 = 48,\quad k^2 = 4,\quad \therefore\ k = 2,$$

$$\overline{AB} = 6,\quad \overline{AD} = 8,\quad \overline{BD} = 10$$

이때

$$|\overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{PX}| = |\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BD}| = 10$$

이므로 점 X는 점 B를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원 위의 점이다. 이때

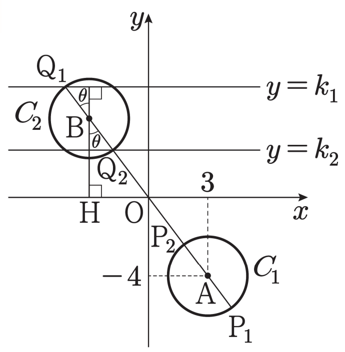
$$|\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}| = 3\left|\frac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}}{3}\right| = 3|\overrightarrow{XG}|$$

의 최댓값과 최솟값의 합은 (그림참조)

$$3\overline{X_1G} + 3\overline{GD} = 3\overline{X_1D} = 6\overline{BD} = 60$$

답 60

09. $|\overrightarrow{AP}| = 2$에서 점 P는 점 A$(3, -4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1 위의 점이다. 이때



$\left|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right|=0$에서

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\vec{0},\quad \overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OP}$$

이므로 점 Q는 점 P와 원점대칭이다.

이때 점 Q는 점 $B(-3,\ 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C_2와 직선 $y=k$의 교점이다.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right|=2\left|\overrightarrow{OP}\right|=2\left|\overrightarrow{OQ}\right|$$

이므로 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$가 최대, 최소인 경우는 두 점 P, Q가 직선 AB 위에 있을 때이다. (그림참조)

점 B에서 x축에 내린 수선의 발 $H(-3,\ 0)$에 대하여 $\angle OBH=\theta$라 하면

$\overline{OB}=5$, $\overline{BH}=4$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이다.

그림에서 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$가 최대일 때, $P=P_1$, $Q=Q_1$이고 이때

$$k_1=\overline{BH}+\overline{BQ_1}\cos\theta=4+2\times\frac{4}{5}=\frac{28}{5}$$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$가 최소일 때, $P=P_2$, $Q=Q_2$이고 이때

$$k_2=\overline{BH}-\overline{BQ_2}\cos\theta=4-2\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$$

$$\therefore\ k_1-2k_2=\frac{28}{5}-\frac{24}{5}=\frac{4}{5}$$

답 ④

10. $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$로 놓으면

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=(\vec{a}-\vec{b})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=(\vec{a}-\vec{b})+\frac{1}{3}\vec{b}=\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$$

이때

$$\overrightarrow{DG}=k\overrightarrow{DE}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}\ \ (k>1),$$

$$\overrightarrow{BG}=t\overrightarrow{BF}=t\vec{a}-\frac{2t}{3}\vec{b}\ \ (0<t<1)$$

로 놓을 수 있다. $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BG}$ 이므로

$$\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}=t\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{3}\right)\vec{b},$$

$\dfrac{2k}{3}=t$ 이고 $\dfrac{k}{3}=1-\dfrac{2t}{3}$에서

$$k=\frac{9}{7},\quad t=\frac{6}{7}$$

이때 $\overrightarrow{BG}=\dfrac{6}{7}\vec{a}-\dfrac{4}{7}\vec{b}$이고 $\overrightarrow{BH}=m\overrightarrow{BC}=m\vec{a}$ 이므로

$$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BG}=m\vec{a}-\left(\frac{6}{7}\vec{a}-\frac{4}{7}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\{(7m-6)\vec{a} + 4\vec{b}\}$$

$\angle \mathrm{DGH} = \frac{\pi}{2}$에서 두 직선 DE와 GH가 수직이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{1}{3}(2\vec{a} + b) \cdot \frac{1}{7}\{(7m-6)\vec{a} + 4\vec{b}\} = 0 \quad \cdots \quad ㉠$$

한편, $\overline{\mathrm{AB}} = 1$로 놓으면 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$이고

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

이므로 ㉠에서

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \{(7m-6)\vec{a} + 4\vec{b}\} = 0$$

$$2(7m-6) + (7m+2) \times \frac{1}{2} + 4 = 0$$

$$4(7m-6) + (7m+2) + 8 = 0$$

$$35m - 14 = 0$$

$$\therefore \ m = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

답 ④

EBS 수능특강 가형 변형

발행일 _ 2019년 02월
지은이 _ 이장규