2020학년도 3월
CM.Lab 모의고사 나형
정답

1	⑤	**2**	③	**3**	①	**4**	②	**5**	③
6	④	**7**	③	**8**	①	**9**	⑤	**10**	④
11	④	**12**	②	**13**	①	**14**	④	**15**	⑤
16	②	**17**	②	**18**	①	**19**	④	**20**	⑤
21	④	**22**	2	**23**	256	**24**	200	**25**	23
26	8	**27**	16	**28**	39	**29**	18	**30**	58

초성민 2020학년도 대비 3월 공개모의 해설

1. 정답 : ⑤

$\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{1}=\frac{4+0}{1}=4$

2. 정답 : ③

$\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{27}=4\times3=12$

3. 정답 : ①

$a\neq3$ 이고 $a\neq4$ 이다.
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ a\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 이므로 $a=2$

4. 정답 : ②

첫째항이 3 이고 공차 2 이므로 수열 a_n 의 일반항은 $a_n=2n+1$ 이다. 따라서 $a_4=9$

5. 정답 : ③

$f(g(3))=f(1)=2$

6. 정답 : ④

로그의 밑변환 공식에 의하면 $2^{\log_2 6}\times3^{\log_3 6}=6\times6=36$

7. 정답 : ③

등차수열의 합 공식에 의하면 $\dfrac{5\times(2a_1+4\times3)}{2}=10$ 이므로 $a_1=-4$ 이다.

따라서 $a_2=a_1+3=-4+3=-1$

8. 정답 : ①

집합 A 는 1 과 2 를 원소로 갖고, 3 을 원소로 가져서는 안 된다. 또한 원소 4 와 5 는 가져도 되고 가지지 않아도 되므로 부분집합의 개수는 $2^2=4$ 이다.

9. 정답 : ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}3b_n=3$ 이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5-1=4$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4\times1=4$

10. 정답 : ④

함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동 시킨 그래프는 $y=\dfrac{1}{x-3}+k$ 이다. 이 그래프 위에 점 $(4,\,5)$ 가 있으므로 $5=\dfrac{1}{4-3}+k$ 이고, $k=4$

11. 정답 : ④

함수 $f(x)$ 가 증가함수이므로 $M=\sqrt{4+5}=3$, $m=\sqrt{-1+5}=2$ 이다.

그러므로 $M+m=3+2=5$

12. 정답 : ②

$f(x)$가 증가함수이므로 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 만나는 점은 $y=x$위의 점이고 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{2}$이므로 $\mathrm{A}(2, 2)$ 또는 $\mathrm{A}(-2,\ -2)$이다. 함수 $f(x)$가 $\mathrm{A}(2, 2)$ 또는 $\mathrm{A}(-2,\ -2)$를 지나므로 $f(2)=4+a=2$, $f(-2)=-4+a=-2$인데 $a>0$이므로 $a=2$

13. 정답 : ①

$p:\ -2<x<4$이고, 두 조건 $p,\ q$가 필요충분조건이어야 하므로 q의 부등식의 해집합이 p와 같아야 한다. 그러므로 $a=\ -(-2+4)=\ -2,\ b=\ -2\times4=\ -8$이고 $a-b=6$

14. 정답 : ④

$n(A\cap B)=2$이므로 가능한 a의 값으로는 $4,\ 0$이 있다. 따라서 모든 정수 a의 값의 합은 4

15. 정답 : ⑤

$\log_a\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\log_a a=\dfrac{1}{2}$ 이므로 $\log_{a^2}(a^2-2)=\dfrac{1}{2}\log_a(a^2-2)=\dfrac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=a^2-2$, 즉 $a=2\ \ (a>0)$

16. 정답 : ②

부등식의 양변을 $\dfrac{n+1}{n^2}$ 을 곱하면

$\dfrac{(9n+1)(n+1)}{n^2}<\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}^2<\dfrac{(9n+2)(n+1)}{n^2}$ 이고 부등식의 각 항에 루트를 씌우면

$\dfrac{\sqrt{(9n+1)(n+1)}}{n}<\dfrac{a_n}{n}<\dfrac{\sqrt{(9n+2)(n+1)}}{n}$ 이고 샌드위치 정리에 의하여

$$3=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(9n+1)(n+1)}}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(9n+2)(n+1)}}{n}=3$$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$

17. 정답 : ②

$\frac{4}{3}a_1(r+1)=\frac{a_1}{1-r}$ 이므로 $1-r^2=\frac{3}{4}$ 이고 $r>0$ 이므로 $r=\frac{1}{2}$

18. 정답 : ①

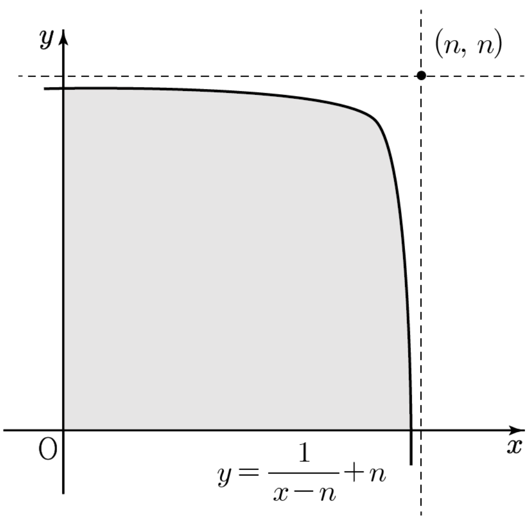
$f(x+y)=f(x)-f(y)$ 에 $x=1$, $y=1$ 을 대입하면 $f(2)=f(1)-f(1)=0$

$f(x+y)=f(x)-f(y)$ 에 $x=2$, $y=1$ 을 대입하면 $f(3)=f(2)-f(1)$ $\cdots$ ㉠
$f(x+y)=f(x)-f(y)$ 에 $x=1$, $y=2$ 를 대입하면 $f(3)=f(1)-f(2)$ $\cdots$ ㉡
㉠과 ㉡으로부터 $f(3)=f(2)-f(1)=f(1)-f(2)$ 이다, $f(2)-f(1)=f(1)-f(2)$ 이므로
$f(2)-f(1)=0$ 이다. 따라서 $f(3)=0$ 이고, $f(2)=f(1)$ 이다. $f(2)=0$ 이므로 $f(1)=0$

$f(x+y)=f(x)-f(y)$ 에 $x=2$, $y=2$ 를 대입하면 $f(4)=0$

따라서 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ 이고, 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 1 이므로
$f(1)+a=0+1=1$

19. 정답 : ④



곡선 $y=\dfrac{1}{x-n}+n$과 y축이 만나는 점의 좌표가

$\left(0,\ n-\dfrac{1}{n}\right)$이므로 주어진 영역에 포함될 수 있는 점의

y좌표 중 정수를 작은 순서대로 나열하면

$1,\ 2,\ \cdots,\ \boxed{n-1}$

$0<k\le \boxed{n-1}$ 인 정수 k에 대하여 직선 $y=k$와 곡선

$y=\dfrac{1}{x-n}+n$이 만나는 점의 x좌표는 $n+\dfrac{1}{k-n}$ 이므로

주어진 영역에 속하는 점 중 y좌표가 k이고 x좌표가

정수인 점의 개수는 $n-1$개다.

따라서 주어진 영역에 속하는 점 중 x좌표와 y좌표가

모두 정수인 점의 개수는

$$\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}(n-1)=\boxed{(n-1)^2}=a_n$$

이고, $a_n\le 36$을 만족시키는 가장 큰 자연수는 $p=7$이다.

$f(n)=n-1,\ g(n)=(n-1)^2$이므로 $f(7)+g(8)=6+49=55$이다.

20. 정답 : ⑤

$\angle \mathrm{B_1C_2E_1}=90^\circ$ 이므로 $\angle \mathrm{E_1C_2D_1}=90^\circ-\angle \mathrm{B_1C_2C_1}$ 이고 $\angle \mathrm{B_1C_2C_1}=\angle \mathrm{D_1E_1C_2}$ 이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{B_1C_1C_2}$와 삼각형 $\mathrm{C_2D_1E_1}$은 닮음이고 두 삼각형의 닮음비는 $2:1$이다.

$\overline{\mathrm{C_1C_2}}=2,\ \overline{\mathrm{D_1E_1}}=1$이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1E_1}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$임을 알 수 있다.

R_2의 색칠된 부분의 넓이를 구하기 위해 삼각형 $\mathrm{E_1B_1C_2}$와 $\mathrm{A_2B_1B_2}$가 닮음임을 활용하자.

선분 $\mathrm{B_1C_2}$의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이고 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 한 변의 길이를 t라 하면

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}:\overline{\mathrm{B_2A_2}}=2:1=2\sqrt{5}-t:t$이다. 따라서 $t=\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$ 이다.

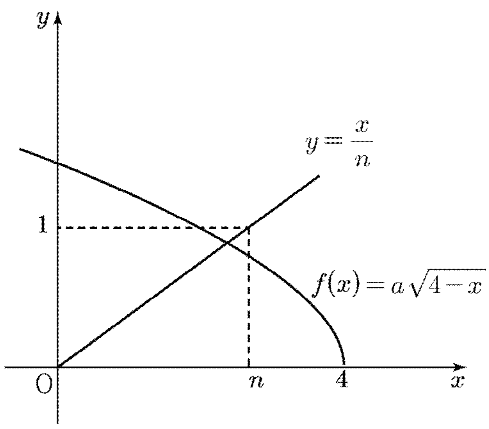
사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$과 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 닮음비는 $4:\dfrac{2}{3}\sqrt{5}=6:\sqrt{5}$ 이고

넓이비는 $36:5$이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{6}{1-\dfrac{5}{36}}=\dfrac{216}{31}$ 이다.

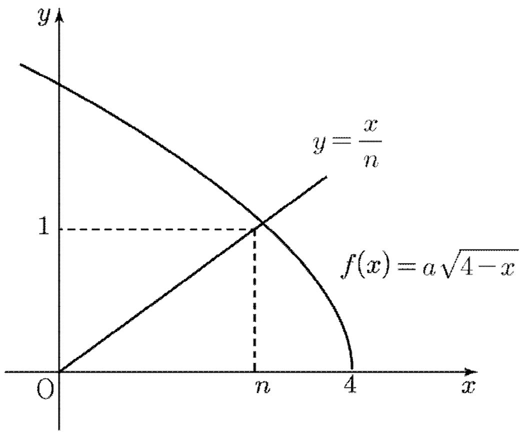
21. 정답 : ④

함수 $f(x)=a\sqrt{4-x}$ $(a>0)$은 감소함수이므로 임의의 두 실수 p, q에 대하여 $p \geq q$일 때 $f(p) \leq f(q)$가 성립한다.

따라서 $g\left(\dfrac{f(x)+x}{n+1}\right) \geq x$일 때 $f\left(g\left(\dfrac{f(x)+x}{n+1}\right)\right) \leq f(x)$ $\cdots$ ㉠이다. $f(x)$와 $g(x)$가 서로 역함수의 관계에 있기 때문에
$f\left(g\left(\dfrac{f(x)+x}{n+1}\right)\right)=\dfrac{f(x)+x}{n+1}$ 이고, 따라서 ㉠은 $\dfrac{f(x)+x}{n+1} \leq f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x}{n} \leq f(x)$이다.



위의 그림과 같이 $f(n)<1$이라면 $0 \leq x \leq n$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{x}{n} \leq f(x)$를 만족시킬 수 없다.



따라서 위의 그림과 같이 $f(n) \geq 1$ 이라면 $0 \leq x \leq n$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x}{n} \leq f(x)$ 를 만족시킨다.

$f(n) = a\sqrt{4-n} \geq 1$ 을 만족시키는 a 의 범위는 $a \geq \frac{1}{\sqrt{4-n}}$ 이다. $f(-5)$ 의 값은 $3a$ 이므로

$f(-5) = 3a \geq \frac{3}{\sqrt{4-n}}$ 이고, $a_n = \frac{3}{\sqrt{4-n}} \Rightarrow (a_n)^2 = \frac{9}{4-n}$ 이다.

따라서 $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 = \left(\frac{9}{3}\right) + \left(\frac{9}{2}\right) + 9 = \frac{33}{2}$

22. 정답 : 2

로그의 밑 변환 공식에 따라 $\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$ 이고 $\log_8 16 = \frac{\log 16}{\log 8}$ 이다.

따라서 $\log_4 8 \times \log_8 16 = \frac{\log 8}{\log 4} \times \frac{\log 16}{\log 8} = \frac{\log 16}{\log 4} = \log_4 16 = 2$ 이다.

23. 정답 : 256

첫째항과 공비가 모두 4 인 등비수열 a_n 의 일반항은

$\{a_n\} = 4 \times 4^{n-1} = 4^n$ 이다. 따라서 $a_4 = 4^4 = 256$ 이다.

24. 정답 : 200

$(2, \log 2)$, $(4, \log m)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{\log m - \log 2}{4-2} = \frac{\log \frac{m}{2}}{2} = 1$ 이다.

따라서 $m = 200$ 이다.

25. 정답 : 23

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 $a_1 = S_1 = 2 + a = 7$이므로 $a = 5$이다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2+5n) - (2n^2+n-3) = 4n+3$이므로

a번째 항, 즉 $a_5 = 23$이다.

26. 정답 : 8

$\sum_{k=1}^{\infty}(8k-ka_k)=2$이므로 $\lim_{k\to\infty}(8k-ka_k)=0$ $\cdots$ ㉠

$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$ $\cdots$ ㉡ 이므로 ㉠식과 ㉡식을 곱하면 $\lim_{k\to\infty}\frac{k(8-a_k)}{k}=\lim_{k\to\infty}(8-a_k)=0$이므로

$\lim_{k\to\infty}a_k=8$이다.

27. 정답 : 16

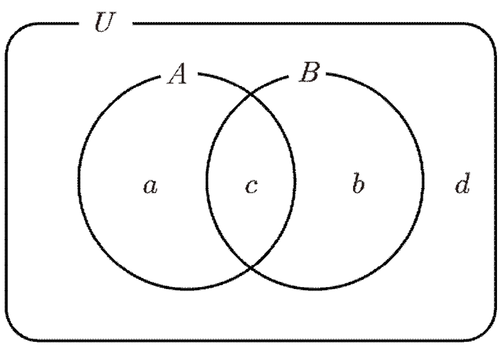
음식점을 방문한 손님 50명을 전체집합 U라 하고

커피를 주문한 손님의 집합은 A, 빵을 주문한 손님의 집합은 B라 하고

커피만 주문한 손님의 수를 a, 빵만 주문한 손님의 수를 b, 둘 다 주문한 손님을 c,

둘 다 주문하지 않은 손님의 수는 d라 하자.

집합을 벤 다이어그램으로 표현하면 아래 그림과 같다.



커피를 주문하지 않은 손님의 집합의 원소의 수는 $b+d=30$이고

커피와 빵 중 아무것도 주문하지 않은 손님의 수 $d=10$이다.

따라서 $b=20$이고 빵만 주문한 손님의 수 b는 모두 주문한 손님 c의 5배이므로 $b=5c$이고 $c=4$이다. 따라서 $a=50-(b+c+d)=50-34=16$이다.

28. 정답 : 39

직선 $2^{n^2}x-2^{4n}y+1=0$의 기울기는 $\dfrac{2^{n^2}}{2^{4n}}=2^{n^2-4n}$이고

자연수 n에 대하여 2^{n^2-4n}이 정수가 되려면 $n^2-4n\geq 0$이어야 한다.
따라서 $n\geq 4$인 자연수 n이 조건을 만족시키고 4보다 크거나 같고 10보다 작은 자연수 n의 값의 합은 39이다.

29. 정답 : 21

$a_n=2n+a$, $b_n=2n+b$라 하면, $a_{10}=20+a$, $b_3=6+b$에서 $a_{10}-b_3=14+(a-b)$이다.
$a_{10}-b_3=14+(a-b)$의 값이 최대가 되기 위해서는 $a-b$의 값이 최대가 되어야 한다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+a)=n^2+(1+a)n$이고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}(2k+b)=n^2+(1+b)n$이므로
$S_nT_n<0 \Leftrightarrow \{n^2+(1+a)n\}\{n^2+(1+b)n\}<0$이고
$\{n^2+(1+a)n\}\{n^2+(1+b)n\}<0 \Leftrightarrow n^2(n+1+a)(n+1+b)<0 \Leftrightarrow (n+1+a)(n+1+b)<0$
이다.

함수 $f(x)=(x+1+a)(x+1+b)$라 하면 $S_nT_n<0 \Leftrightarrow f(n)<0$이다. 방정식 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $f(n)<0$의 해집합은 $\alpha<n<\beta$이다. 이를 만족하는 자연수 n의 값의 합이 9이기 위해서는 $n=2,\ 3,\ 4$ 혹은 $n=4,5$ 혹은 $n=9$ 이다. 따라서
$1\leq\alpha<2,\ 4<\beta\leq 5$ 혹은 $3\leq\alpha<4,\ 5<\beta\leq 6$ 혹은 $8\leq\alpha<9,\ 9<\beta\leq 10$이다.

$(a-b)$의 값이 최대가 되기 위해서는 $a>b$여야 하고, 따라서 $f(x)=0$의 두 실근인 $x=-a-1,\ -b-1$에 대하여 $-a-1<-b-1$이다.
즉, $-a-1=\alpha$이고 $-b-1=\beta$이다.

ⅰ) $1\leq\alpha<2,\ 4<\beta\leq 5$인 경우

$1 \leq \alpha < 2$에서 $1 \leq -a-1 < 2 \Leftrightarrow -3 < a \leq -2$이고,
$4 < \beta \leq 5$에서 $4 < -b-1 \leq 5 \Leftrightarrow -6 \leq b < -5$이다.
따라서 $2 < a-b \leq 4$이므로 $16 < 14+(a-b) = a_{10} - b_3 \leq 18$이다.

ii) $3 \leq \alpha < 4,\ 5 < \beta \leq 6$인 경우

$3 \leq \alpha < 4$에서 $3 \leq -a-1 < 4 \Leftrightarrow -5 < a \leq -4$이고,
$5 < \beta \leq 6$에서 $5 < -b-1 \leq 6 \Leftrightarrow -7 \leq b < -6$이다.
따라서 $-1 < a-b \leq 3$이므로 $13 < 14+(a-b) = a_{10} - b_3 \leq 17$이다.

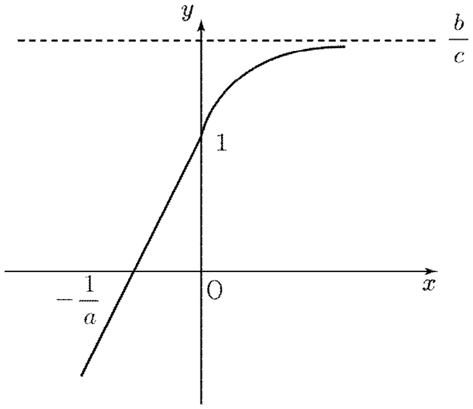
iii) $8 \leq \alpha < 9,\ 9 < \beta \leq 10$인 경우

$8 \leq \alpha < 9$에서 $8 \leq -a-1 < 9 \Leftrightarrow -10 < a \leq -9$이고,
$9 < \beta \leq 10$에서 $9 < -b-1 \leq 10 \Leftrightarrow -11 \leq b \leftarrow 10$이다.
따라서 $0 < a-b \leq 2$이므로 $14 < 14+(a-b) = a_{10} - b_3 \leq 16$이다.

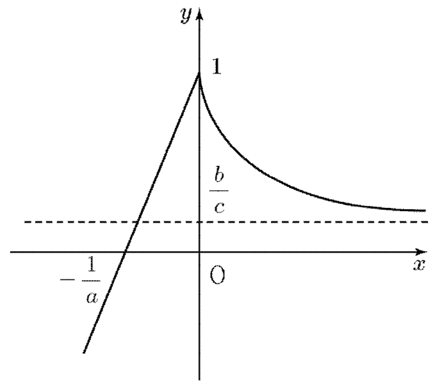
i), **ii**), **iii**) 에서 $a_{10} - b_3$의 최댓값은 18이다.

30. 정답 : 58

직선 $y = ax+1$의 y절편은 1, x절편은 $-\dfrac{1}{a}$이고, 유리함수 $y = \dfrac{bx+1}{cx+1}$의 y절편은 1, 점근선은 $x = -\dfrac{1}{c}$, $y = \dfrac{b}{c}$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



[그림1]

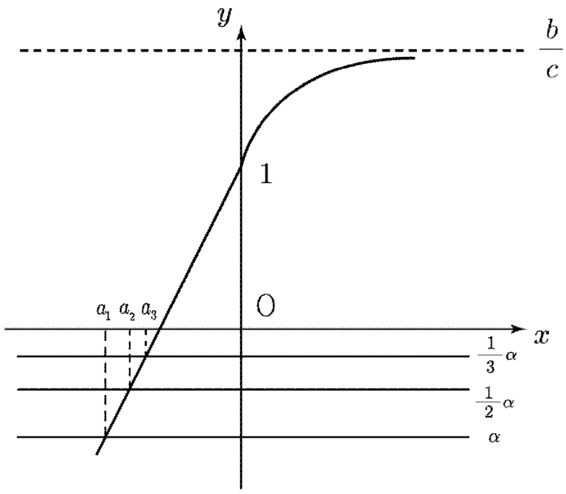


[그림2]

ⅰ) [그림1]처럼 $b > c$인 경우

방정식 $f(nf(x)) = \dfrac{1}{3}$ 에서 $nf(x) = t$로 치환하면 $f(nf(x)) = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow f(t) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

$b > c$인 경우 함수 $y = f(x)$가 증가함수이다. 따라서 $f(t) = \dfrac{1}{3}$ 의 실근은 1개이고, 그 실근을 α $(\alpha < 0)$라 하자. 방정식 $f(nf(x)) = \dfrac{1}{3}$ 의 실근은 $nf(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\alpha}{n}$ 이다.

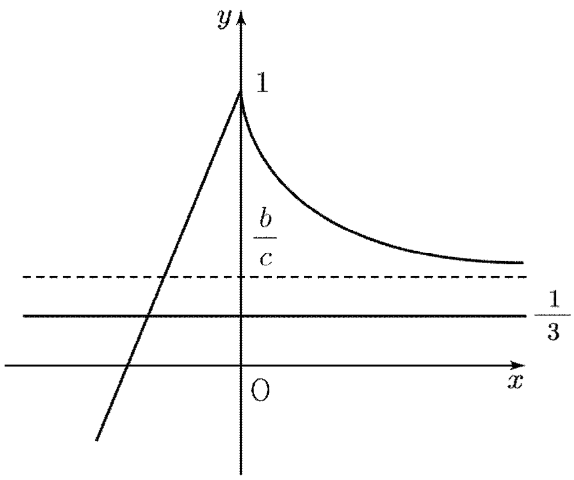


위의 그림과 같이 n의 값이 증가하면 방정식 $f(x) = \dfrac{\alpha}{n}$ 의 실근이 증가하므로, 조건 $a_3 > a_2 > a_1 > a_4 = a_5 = a_6 = \ \cdots \ = -2$을 만족시킬 수 없다.

ii) [그림2]처럼 $b<c$인 경우

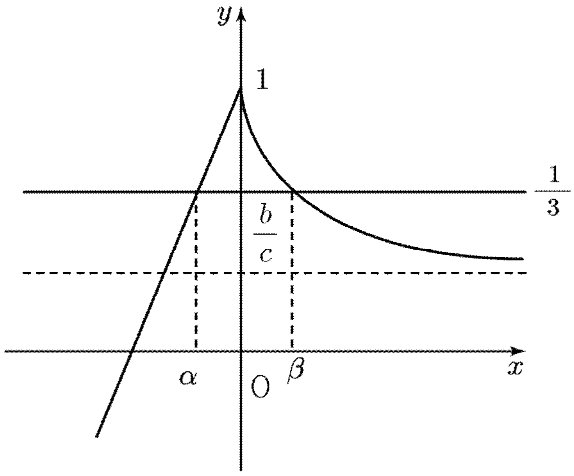
방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$에서 $nf(x)=t$로 치환하면

$f(nf(x))=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow f(t)=\dfrac{1}{3}$이다.

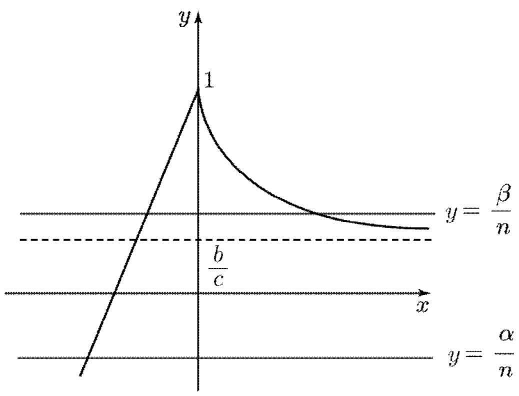


만약, 위의 그림과 같이 $\dfrac{b}{c} \geq \dfrac{1}{3}$이라면, 방정식 $f(t)=\dfrac{1}{3}$은 음의 실근을 1개 갖고, 이는 **i**)의 상황과 마찬가지로 조건 $a_3>a_2>a_1>a_4=a_5=a_6= \cdots =-2$을 만족시킬 수 없다.

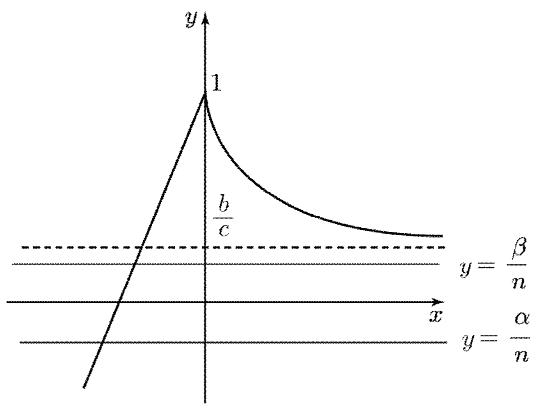
따라서 $\dfrac{b}{c}<\dfrac{1}{3}$이고, 방정식 $f(t)=\dfrac{1}{3}$은 아래의 그림과 같이 두 실근 α $(\alpha<0)$, β $(\beta>0)$를 갖는다.



따라서 방정식 $f(nf(x))=\frac{1}{3}$의 실근은 $nf(x)=\alpha,\ \beta \Leftrightarrow f(x)=\frac{\alpha}{n},\ \frac{\beta}{n}$이다.



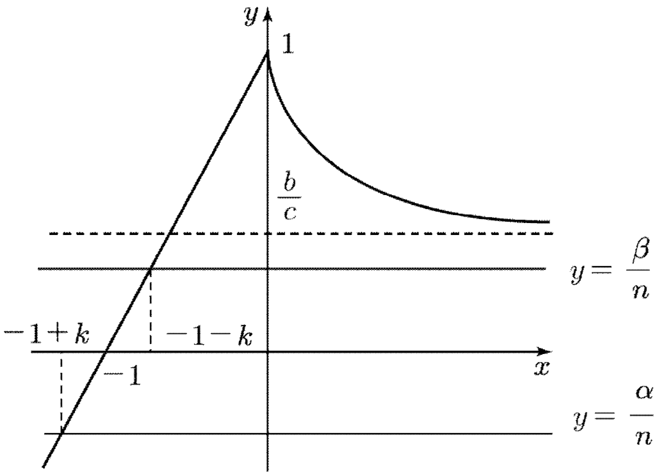
[그림3]



[그림4]

$\alpha<0$이기 때문에 $f(x)=\frac{\alpha}{n}$의 실근의 개수는 n의 값에 상관없이 1이지만, $f(x)=\frac{\beta}{n}$의 실근의 개수는 [그림3]과 같이 $\frac{\beta}{n}>\frac{b}{c}$이라면 2이고, [그림4]와 같이 $\frac{\beta}{n}\le\frac{b}{c}$인 경우에는 1이다.

조건 $a_3>a_2>a_1>a_4=a_5=a_6=\ \cdots\ =-2$로부터 $n\ge 4$인 모든 실수 n에 대하여 방정식 $f(nf(x))=\frac{1}{3}$의 실근의 합은 -2인데, 적당히 큰 자연수 p $(p\ge 4)$에 대하여 $\frac{b}{c}>\frac{\beta}{p}>\frac{\beta}{p+1}>\frac{\beta}{p+2}>\ \cdots$ 이므로 방정식 $f(x)=\frac{\alpha}{n},\ \frac{\beta}{n}$은 $n\ge p$일 때 두 실근을 갖고, 두 실근의 합이 n의 값에 상관없이 -2이다.



(그림 $-1-k$, $-1+k$ 수정)

위의 그림처럼 $f(x)=\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\beta}{n}$의 실근의 합이 $n \geq p$일 때 n의 값에 상관없이 -2가 되기 위해서는, 두 직선 $y=\frac{\alpha}{n}$, $y=\frac{\beta}{n}$ $(n \geq p)$가 x축에 대하여 대칭해야 한다. 따라서 $\alpha=-\beta$이고, 두 실근의 합이 -2이기 때문에 $f(x)=\frac{\alpha}{n}$의 실근을 $-1-k$라 하면 $f(x)=\frac{\beta}{n}$의 실근이 $-1+k$이다. 따라서 $f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 좌표가 $(-1,\,0)$이고, $a=1$이다.

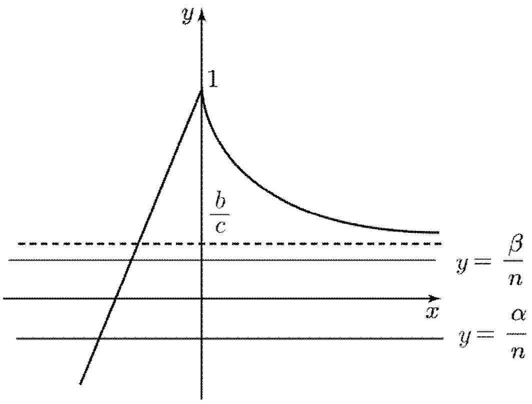
(수식적인 판단 : 두 방정식 $ax+1=\frac{\alpha}{n}$, $ax+1=\frac{\beta}{n}$의 실근인 $x=-\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{n}-1\right)$, $x=-\frac{1}{a}\left(\frac{\beta}{n}-1\right)$의 합을 구하면 $-\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}-2\right)$인데, $n \geq p$일 때 n의 값에 상관 없이 $-\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}-2\right)=-2$이기 위해서는 $\alpha+\beta=0$이고, $a=1$이다.)

$a=1$이기 때문에 방정식 $f(x)=\frac{1}{3}$의 음의 실근은 $ax+1=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{3}$에서 $x=-\frac{2}{3}$이므로 $\alpha=-\frac{2}{3}$이고, $\alpha=-\beta$이므로 $\beta=\frac{2}{3}$ $\cdots$ ㉠이다.

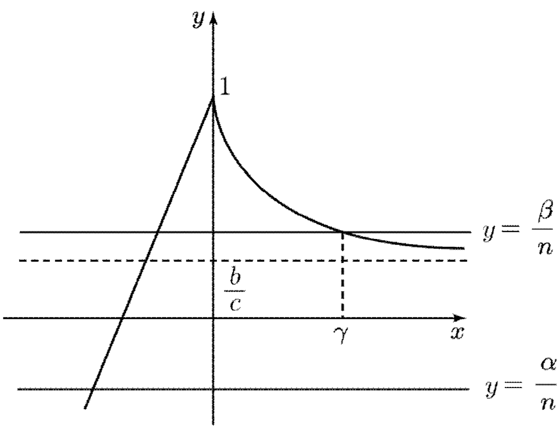
$\alpha=-\beta$이기 때문에 n의 값에 상관 없이 방정식 $f(nf(x))=\frac{1}{3}$의 실근 중 음수인 두 실근의 합은 항상 -2이다.

따라서 아래의 그림과 같이 $\frac{\beta}{n} \leq \frac{b}{c}$여서 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{\alpha}{n}$, $\frac{\beta}{n}$이 두 점에서

만 만난다면, (즉, 음의 실근 2개만 갖는다면) 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$의 모든 실근의 합은 -2 이다.



아래의 그림과 같이 $\dfrac{\beta}{n}>\dfrac{b}{c}$여서 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$이 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근 γ $(\gamma>0)$ 갖는다면, 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$의 모든 실근의 합은 $-2+\gamma>-2$이다.



따라서 조건 $a_3>a_2>a_1>a_4=a_5=a_6=\ \cdots\ =-2$로부터 $n\geq 4$일 때 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$은 두 개의 음의 실근을 갖고, $n<4$일 때 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$은 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖는다는 사실을 알 수 있다.

$n\geq 4$일 때 방정식 $f(nf(x))=\dfrac{1}{3}$이 두 개의 음의 실근을 갖기 때문에 $\dfrac{\beta}{4}\leq\dfrac{b}{c}$이고, $n<3$

일 때 방정식 $f(nf(x))=\frac{1}{3}$ 이 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖기 때문에

$\frac{\beta}{3}>\frac{b}{c}$ 이다. 즉, $\frac{\beta}{4}\le\frac{b}{c}<\frac{\beta}{3}$ 이고, ㉠에서 $\beta=\frac{2}{3}$ 이므로 $\frac{1}{6}\le\frac{b}{c}<\frac{2}{9}$ $\cdots$ ㉡이다.

또한 방정식 $f(x)=\frac{1}{3}$ 의 양의 실근이 β 이므로 방정식 $\frac{bx+1}{cx+1}=\frac{1}{3}$ 의 양의 실근이 β 이다.

$\beta=\frac{2}{3}$ 이므로 $\dfrac{\frac{2}{3}b+1}{\frac{2}{3}c+1}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3b+3=c$ $\cdots$ ㉢이다.

㉢의 결과를 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{6}\le\frac{b}{3b+3}<\frac{2}{9}\Leftrightarrow 1\le b<2$ 이고, 만족하는 자연수 $b=1$ 이다. $b=1$ 를 ㉢에 대입하면 $c=6$ 이다.

$a=1,\ b=1,\ c=6$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ \dfrac{x+1}{6x+1} & (x\ge 0) \end{cases}$ 이다. $f(a+b+c)=f(8)=\frac{9}{49}$ 이므로

$p=49,\ q=9$ 이다. $p+q=58$