제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. 집합 $A=\{x\,|\,x$는 5이하의 자연수$\}$에 대하여 $n(A)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\sqrt{9}\times\sqrt[3]{27}$ 의 값은? [2점]

① 4 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 27

3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+5n}{2n}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 세 수 3, -6, a가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, a의 값은? [3점]

① -8 ② -10 ③ -12 ④ -15 ⑤ -18

5. 두 함수 $f(x)=2x-3$, $g(x)=2\sqrt{x+1}-1$ 에 대하여 $(g\circ f)(3)$ 의 값은? [3점]

① -3 ② $-\sqrt{3}$ ③ 0 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

6. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$A=\{x\,|\,x$는 7 이하의 자연수$\}$,

$B=\{x\,|\,x$는 짝수$\}$

일 때, 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은? [3점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

7. 점근선의 교점의 좌표가 $(-1,\ 3)$이고 원점 O를 지나는 함수 $y=\dfrac{b}{x+a}+c$에서 $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

8. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=0$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+1}{3a_n-2}$ 의 값은? [3점]

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ 1

9. 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 세 항 a_3, a_k, a_{15}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 항 a_1, a_2, a_k는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. $k\times a_1$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2^n$ 일 때, a_1+a_6 의 값은? [3점]

① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49 ⑤ 50

11. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x-2}{5}\right)^n$ 이 수렴하도록 하는 정수 x 의 개수는? [3점]

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 7 ⑤ 10

12. $\frac{1}{\log_4 54}+\frac{3}{\log_9 54}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

13. 두 조건 p, q의 진리집합이 각각

$$P=\{1,\ 4,\ x^2\},\ \ Q=\{9,\ x+1\}$$

이다. 명제 $p \rightarrow q$의 역이 참일 때, 실수 x의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

14. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots\left(2^{2^{2018}}+1\right)=2^a-1$을 만족하는 정수 a에 대하여 $\log_2 a$의 값은? [4점]

① 2018 ② 2019 ③ 2020 ④ 2^{2019} ⑤ $\log_2\left(2^{2019}-1\right)$

15. 두 조건 $p : |x-3| < k$, $q : -3 \le x \le 5$에 대하여 명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 양수 k의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2 = 42,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1) = 12$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값은? [4점]

① 10 ② 20 ③ -10 ④ -20 ⑤ 0

17. 실수 x에 대한 두 조건

p : $x^2-2x-8 \geq 0$,

q : $x^2-3ax+2a^2+2a-4<0$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, a의 범위는? [4점]

① $-\frac{1}{2} \leq a<0$

② $2<a<3$

③ $-\frac{1}{2} \leq a<0$ 또는 $2<a<3$

④ $-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $2<a \leq 3$

⑤ $-\frac{1}{2} \leq a<0$ 또는 $2<a \leq 3$

18. 자연수의 순서쌍 (a, b)은 다음을 만족한다.

$$9^{2^a}=b \times 2^{100}+1$$

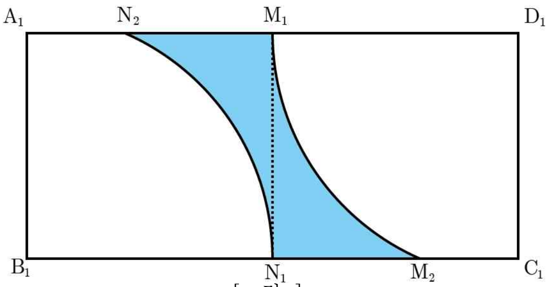
이때, 가능한 a의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $9^{2^a}=b \times 2^{100}+1$에서 1을 좌변으로 이항하면
> $9^{2^a}-1=b \times 2^{100}$이다.
> $9^{2^a}-1$
> $=(\boxed{(가)})(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1) \cdots (9^{2^{a-1}}+1)$
> $=b \times 2^{100}$ 에서 양변을 $\boxed{(가)}$로 나누면
> $(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1) \cdots (9^{2^{a-1}}+1)=b \times 2^{\boxed{(나)}}$
> 이다.
> 자연수 k에 대하여 9^k+1꼴은 8로 나눌 때 나머지가 $\boxed{(다)}$이다.
> 따라서
> $(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1) \cdots (9^{2^{a-1}}+1)$
> $=(8+\boxed{(다)})(8 \times 10+\boxed{(다)})(8 \times \boxed{}+\boxed{(다)}) \cdots (8 \times \boxed{}+\boxed{(다)})$ $\cdots$ ㉠
> $=\cdots+2^{(\ )\text{의 개수}}$
> 이고 이 수가 $2^{\boxed{(나)}}$의 배수가 되기 위해서는 ㉠의 ( )의 개수가 $\boxed{(나)}$이상이어야 한다.
> 따라서 a의 최솟값은 $\boxed{(나)}$이다.

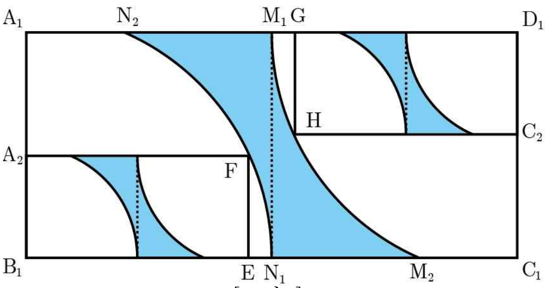
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 95 ② 100 ③ 107 ④ 115 ⑤ 120

19. [그림1]과 같이 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4$ 인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. $\overline{A_1D_1}$와 $\overline{B_1C_1}$의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$인 원과 선분 A_1M_1의 교점을 N_2, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 $\overline{D_1M_1}$인 원과 선분 C_1N_1의 교점을 M_2이라 하자. 색칠된 도형 $N_1N_2M_1M_2$의 넓이를 S_1이라 하자.
[그림2]와 같이 점선 M_1N_1을 기준으로 좌우의 합동인 도형 $A_1B_1N_1N_2$와 도형 $C_1D_1M_1M_2$에 $\overline{A_2B_1}:\overline{B_1E}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 A_2B_1EF 와 $\overline{C_2D_1}:\overline{D_1G}=\sqrt{3}:4$ 인 직사각형 C_2D_1GH 을 그리고 그림 S_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 얻은 합동인 두 도형의 넓이의 합을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림의 색칠되어 있는 부분의 넓이의 합을 S_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림1]



[그림2]

① $\frac{19}{10}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$ ② $\frac{19}{11}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$
③ $\frac{19}{9}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$ ④ $\frac{19}{11}\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$
⑤ $\frac{19}{11}\left(2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi\right)$

20. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{(a,\ b)\mid \log_3 m=a+\log_3 b,\ a,\ b\text{는 자연수}\}$$

라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보 기 |

ㄱ. $A_{27}=\{(1,\ 9),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)\}$
ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=9^k$이면 $n(A_m)=2k$이다.
ㄷ. $n(A_m)=2$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m은 8개이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{1}{2}-x\right)+f\left(\frac{1}{2}+x\right)=1$

(나) $f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{f(x)}{2}$

(다) $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$

$f\left(\frac{19}{20}\right)+f\left(\frac{31}{32}\right)$의 값을 구하면? [4점]

① $\frac{41}{24}$ ② $\frac{43}{24}$ ③ $\frac{41}{64}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{47}{64}$

단답형

22. 첫째항이 2이고 공비가 -3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5의 값을 구하시오. [3점]

23. $\log_3 7+\log_3 63-\log_3 49$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n - 3S_n)^2$의 값을 구하시오. [3점]

25. $\log_2 12$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $2^a \times 4^b$의 값을 구하시오. [3점]

26. 다음 조건을 만족시키는 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(A-B)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $n(U)=50$
(나) $A-(B^C\cap A)\neq\phi$
(다) $n(B-A)=25$

27. 어느 쇼핑몰에서 신제품 출시에 맞춰 우수 고객 120명을 대상으로 구매 의사가 있는지 사전 조사를 실시하였더니 이 중 80명이 구매 의사가 있다고 하였고, 실제로는 120명 중 60명이 신제품을 구매하였다. 구매 의사가 있다고 한 고객 중 실제로 구매한 고객의 수를 a, 구매 의사가 없다고 한 고객들 중 실제로 구매한 고객의 수를 b, 구매 의사가 없다고 한 고객 중 실제로 구매하지 않은 고객의 수를 c라 할 때, 부등식 $b \le c$를 만족시키기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n = p \times (-1)^n + q,\ b_n = \frac{(-1)^{n+1} - 2}{3}$$

이다.
두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴한다고 할 때, $\lim_{n \to \infty} \{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = \frac{\beta}{\alpha}$이다. $\alpha + \beta$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p, q는 실수이고 α, β는 서로소인 자연수이다.)

29. 실수전체에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases} x^2-px-8q & (x \geq 4) \\ x-4 & (x<4) \end{cases}$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 p, q에 대하여 p^2+q^2의 최솟값은 m이라 할 때 $m=\dfrac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. [4점]
(단, a, b는 서로소인 자연수)

30. 4이하의 자연수 n에 대하여 함수 $f_n(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f_1(x)=-7(x-1)^2+7,$$
$$f_n(x)=\frac{9-2n}{11-2n}\{f_{n-1}(x-2)\} \quad (n=2,\ 3,\ 4)$$

함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ f_n(x) & (2n-2 \leq x \leq 2n) \\ 0 & (x \geq 8) \end{cases}$라 할 때,
방정식 $|g(x)-2k|=k$의 실근의 개수를 a_k라 하자.
집합 $P=\{k \times a_k \mid k$는 자연수$\}$의 모든 원소의 합을 구하시오.
(단, 중근은 1개의 근이다.) [4점]

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 모의고사 파트너쉽을 모집합니다.

저작권에 구애 받지 않는 모의고사가 필요한 학원장님, 교습소장님, 선생님들!!

랑데뷰 모의고사가 있습니다.

모의고사 워드, 그림 등의 외면상 퀄리티는 다소 떨어질 수 있습니다.
그러나 문제의 퀄리티는 어떤 모의고사와 비교해도 자신 있습니다.
랑데뷰와 파트너쉽을 체결해 주시면 감사하겠습니다.

1. 일반 연간 패스 (19만)
2019년 제작되는 모든 랑데뷰 모의고사 수학 가형(28~30회), 수학 나형(12~16회)을 모두 다운 받을 수 있습니다.

2. 프리미엄 연간 패스 (60만)
① 2019년 제작되는 모든 랑데뷰 모의고사 수학 가형(28~30회), 수학 나형(12~16회)을 모의고사 제목에 랑데뷰-ㅇㅇㅇ 모의고사로 수정하여 보내드립니다.
② 2019년 제작되는 EBS 주요문항 변형 문제 한글 파일을 완성되는 대로 보내 드립니다.
현재 미적분2 lev3 변형문제 완성되었습니다.
③ 2019년 실시되는 주요 모의고사 킬러문항 변형문제를 제공해 드립니다.

랑데뷰 수학 황보백 선생
[카톡 : hbb100] [연락처 : 010-5673-8601]
3월 모의고사 대비 ⇨ 3월 가형 1회차, 나형 1회차 무료 배포 합니다.

1	2	3	4	5
⑤	②	④	④	⑤
6	7	8	9	10
⑤	④	④	①	①
11	12	13	14	15
②	②	⑤	②	②
16	17	18	19	20
①	③	③	②	②
21	22	23	24	25
①	162	2	36	18
26	27	28	29	30
24	40	19	21	50

모의고사 검토 및 출제에 도움주신 선생님
김은수 선생님[대구] 010.5687.5722
유승희 선생님[서울] 010.5298.1393
임수영 선생님[울산] 010.8732.8804

출제
랑데뷰 수학 황보 백 선생

카톡 : hbb100
010-5673-8601

1) 정답 ⑤

2) 정답 ②

3) 정답 ④

4) 정답 ④
3, -6, a가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$-6=\frac{3+a}{2}$에서 $a=-15$

5) 정답 ⑤
$f(x)=2x-3$, $g(x)=2\sqrt{x+1}-1$ 에 대하여
$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(3)=2\times\sqrt{4}-1=3$

6) 정답 ⑤
$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,7,8,9,10\}$이고
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,6,7\}, B=\{2,\ 4,\ 6\}$이므로
$A\cap B^C=A-B$
$=\{1,3,5,7\}$
따라서 집합 $A\cap B^C$의 모든 원소의 합은
$1+3+5+7=16$

7) 정답 ④
점근선이 $x=-1$, $y=3$이므로 $a=1$, $c=3$이다.
따라서 $y=\frac{b}{x+1}+3$에서 $(0,0)$을 대입하면
$b=-3$
따라서 $a+b+c=1+3+(-3)=1$

8) 정답 ④
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+1}{3a_n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{a_n}}{3-\frac{2}{a_n}}$
$=\frac{2}{3}$

9) 정답 ①
등차중항의 성질에 의해 $a_k=a_9$이다. 따라서 $k=9$
따라서 $a_2=a_1+4$, $a_9=a_1+32$
등비중항의 성질에 의해
$(a_1+4)^2=a_1\times(a_1+32)$
$a_1^2+8a_1+16=a_1^2+32a_1$
$24a_1=16$
따라서 $a_1=\frac{2}{3}$
$k\times a_1=9\times\frac{2}{3}=6$

10) 정답 ①
$a_1=S_1=1^2+2^1=3$
$a_5=S_6-S_5=(6^2+2^6)-(5^2+2^5)=100+57=43$
$\therefore a_1+a_5=46$

11) 정답 ②
x가 정수일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x-2}{5}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\frac{3x-2}{5}$인 등비급수이다.
그러므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3x-2}{5}\right)^n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은 $-1<\frac{3x-2}{5}<1$이다.
$-5<3x-2<5$
$-3<3x<7$
$-1<x<\frac{7}{3}$
따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 3개다.

12) 정답 ②
밑의 변환 공식에 의하여
$\frac{1}{\log_4 54}+\frac{3}{\log_9 54}=\log_{54}4+3\log_{54}9$
$=\log_{54}2^2+3\log_{54}3^2$
$=\log_{54}(2^2\times3^6)$
$=\log_{54}(2\times3^3)^2$
$=\log_{54}54^2$
$=2\log_{54}54$
$=2$

13) 정답 ⑤
명제 $p\to q$의 역이 참이므로 명제 $q\to p$가 참이다.
그러므로 $Q\subset P$가 성립해야 한다.
$9\in Q$이므로 $9\in P$이어야 한다.
$x^2=9$, 즉 $x=3$ 또는 $x=-3$

$P=\{1,\ 4,\ x^2\}$, $Q=\{9,\ x+1\}$

(i) $x=-3$일 때

$P=\{1,\ 4,\ 9\}$, $Q=\{-2,\ 9\}$이므로

$Q\not\subset P$

(ii) $x=3$일 때

$P=\{1,\ 4,\ 9\}$, $Q=\{4,\ 9\}$이므로

$Q\subset P$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $x=3$

14) 정답 ②

등식의 양변에 $(2-1)$을 곱하면

$(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\cdots\left(2^{2^{2018}}+1\right)$

$=(2-1)(2^a-1)$

$2^{2^{2019}}-1=2^a-1$, $a=2^{2019}$

$\therefore\ \log_2 2^{2019}=2019$

15) 정답 ②

$|x-3|<k$ 에서 $-k<x-3<k$

$\therefore -k+3<x<k+3$

두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x|-k+3<x<k+3\}, Q=\{x|-2\le x\le 6\}$

명제 $p\to q$가 참이 되려면 $P\subset Q$이어야 하므로

$-k+3\ge -3, k+3\le 5$

$\therefore k\le 2$

따라서 k의 최댓값은 2이다.

16) 정답 ①

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+1)^2=42$에서

$\sum_{k=1}^{10}\left\{4(a_k)^2+4a_k+1\right\}=42$

$4\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=42$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=8\ \cdots$ ㉠

또, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k-1)=12$에서

$\sum_{k=1}^{10}\left\{(a_k)^2-a_k\right\}=12$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=12\ \cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=20$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=10$

17) 정답 ③

우선 두 조건의 식을 인수분해 하면

$x^2-2x-8\ge 0\to(x+2)(x-4)\ge 0$에서

$\therefore\ x\le -2$ or $x\ge 4$이고

만족하는 오직 하나의 정수해는

$x=-2$ 또는 $x=4$임을 알 수 있다.

$x^2-3ax+2a^2+2a-4<0$

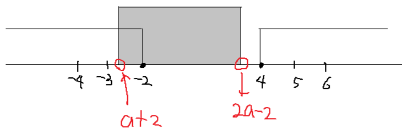
$\to\{x-(a+2)\}\{x-2(a-1)\}<0$에서

$\therefore\ a+2<x<2a-2$ or $2a-2<x<a+2$

(i) $a+2<2a-2$ 즉 $a>4$일 때

$a+2<x<2a-2$

㉠ 정수해가 $x=-2$이면 다음 그림과 같다.

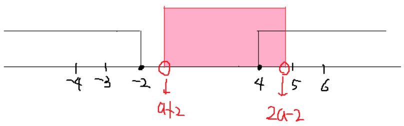


$-3\le a+2<-2$, $-2<2a-2\le 4$에서

$-5\le a<-4$, $0<a\le 3$이므로 동시에 만족하는

a는 존재하지 않는다.

㉡ 정수해가 $x=4$이면 다음 그림과 같다.



$-2\le a+2<4$, $4<2a-2\le 5$에서

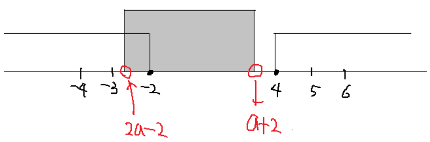
$-4\le a<2$, $3<a\le\frac{7}{2}$이므로 동시에 만족하는

a는 존재하지 않는다.

(ii) $a+2>2a-2$ 즉 $a<4$일 때

$2a-2<x<a+2$

㉠ 정수해가 $x=-2$이면 다음 그림과 같다.



$-3\le 2a-2<-2$, $-2<a+2\le 4$에서

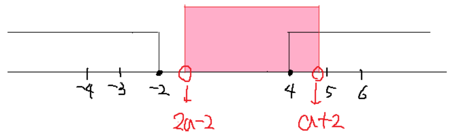
$-\frac{1}{2}\le a<0$, $-4<a\le 2$이므로 동시에 만족하는 a는 $-\frac{1}{2}\le a<0$이다.

㉡ 정수해가 $x=4$이면 다음 그림과 같다.

$-2\le 2a-2<4$, $4<a+2\le 5$에서

$0\le a<3$, $2<a\le 3$이므로 동시에 만족하는

a는 $2<a<3$



(i), (ii)에서

$-\frac{1}{2} \le a < 0$ 또는 $2 < a < 3$

18) 정답 ③

$9^{2^a} = b \times 2^{100} + 1 \to 9^{2^a} - 1 = b \times 2^{100}$에서

$9^{2^a} - 1$

$= (9-1)(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1)$

$= b \times 2^{100}$ 에서 양변을 8로 나누면

$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1) = b \times 2^{97}$

에서 9^k+1꼴은 8로 나눌 때 나머지가 2이다.

따라서

$(9+1)(9^2+1)(9^4+1)(9^8+1)\cdots(9^{2^{a-1}}+1)$

$= (8+2)(8\times 10+2)(8\times\square+2)\cdots(8\times\square+2)$

$= \cdots + 2^{(\ )\text{의 개수}}$

이고 이 수가 2^{97}의 배수가 되기 위해서는 ( )의 개수가 97 이상이어야 한다.

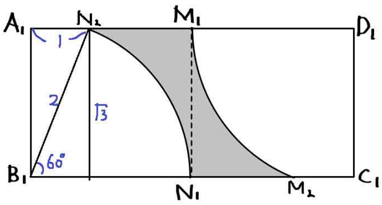
따라서 a의 최솟값은 97

따라서 $p=8,\ q=97,\ r=2$이다.

$p+q+r=107$

19) 정답 ②

S_1은 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이 $4\sqrt{3}$에서 도형 $A_1B_1N_1N_2$의 넓이 2배를 빼면 된다.



$A_1B_1N_1N_2 = \triangle A_1B_1N_2 +$ 부채꼴 $N_2B_1N_1$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi(2)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi$

따라서

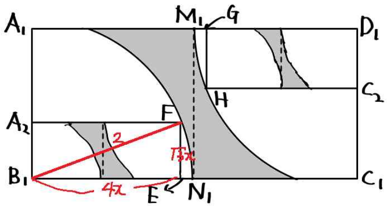
$S_1 = 4\sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{3}\pi\right)$

$= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$

다음 그림과 같이 $\overline{B_1F} = 2$이고

$\overline{A_2B_1} : \overline{B_1E} = \sqrt{3} : 4$ 이므로

$\overline{A_2B_1} = \sqrt{3}x,\ \overline{B_1E} = 4x$ 라 두자.



직각 삼각형 FB_1E에서

$(\sqrt{3}x)^2 + (4x)^2 = 2^2 \Rightarrow 19x^2 = 4,\ x = \frac{2}{\sqrt{19}}$

따라서 $\overline{A_2B_1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

직사각형의 닮음비가 $\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_1} = \sqrt{3} : \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

따라서 넓이비는 $3 : \frac{4\times 3}{19} = 19 : 4$

개수가 2배씩 증가하므로 공비는 $2 \times \frac{4}{19} = \frac{8}{19}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{8}{19}} = \frac{19}{11} \times \left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)$$

20) 정답 ②

ㄱ. $A_{27} \to \log_3 27 = 3 = 1+2 = 2+1 = 3+0$이므로

$\log_3 27 = 1 + \log_3 9$,

$\log_3 27 = 2 + \log_3 3$,

$\log_3 27 = 3 + \log_3 1$

이므로 $A_{27} = \{(1,\ 9),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)\}$ (참)

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 9^k$이면

$A_{9^k} \to \log_3 3^{2k} = 2k$이므로

$2k = 1 + (2k-1) = 2 + (2k-2) = \cdots = 2k + 0$

$\log_3 3^{2k} = 1 + \log_3 3^{2k-1} = 2 + \log_3 3^{2k-2} = \cdots = 2k + \log_3 1$

따라서 $n(A_m) = 2k$이다. (참)

ㄷ. $a + \log_3 b$에서 $n(A_m) = 2$이기 위해서는

$a=1,\ a=2$ 가 될 수 있어야 하고 $a=2$일 때, $b \ne 3k$이어야 한다. 예를 들어 $m = 9\times 2 = 18$이면

$\log_3 18 = 1 + \log_3 6 = 2 + \log_3 2$ 이므로

$(1,\ 6),\ (2,\ 2)\ \therefore n(A_{18}) = 2$다.

그런데 $m = 9\times 3$이면 $(1,\ 9),\ (2,\ 3),\ (3,\ 1)$에서

$\therefore n(A_{27}) = 3$이다.

따라서 두 자리 자연수 중 $n(A_m) = 2$을 만족하는

m은 $3^2 \times b$ (단, $b \ne 3k$)

따라서 18, 36, 45, 63, 72, 90, 99 이므로 m의 개수는 7이다. (거짓)

21) 정답 ①

(가)에서 $y=f(x)$는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$에 대칭이다.

(나)에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

따라서 $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f(1)=1$

(나)에서 $x=1$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{f(1)}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 (다)에 의해

$\frac{1}{4}\le x\le\frac{3}{4}$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}$

또한 (나)에 의해

$\frac{1}{16}\le x\le\frac{3}{16}$일 때 $f(x)=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{64}\le x\le\frac{3}{64}$일 때 $f(x)=\frac{1}{8}\cdots$㉠

㉠에서 (가)에 의해 $\frac{61}{64}\le x\le\frac{63}{64}$일 때 $f(x)=\frac{7}{8}$이다.

따라서 $f\left(\frac{62}{64}\right)=f\left(\frac{31}{32}\right)=\frac{7}{8}$

한편, (가)식에 $x=\frac{1}{2}-t$를 대입하면

$f(t)+f(1-t)=1$이고 (나)에서 $f(t)=2f\left(\frac{t}{4}\right)$이므로

$2f\left(\frac{t}{4}\right)+f(1-t)=1$이다.

$t=\frac{4}{5}$을 대입하면 $2f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)=1$

따라서 $f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{3}$

따라서 $f\left(\frac{1}{20}\right)=\frac{1}{6}$

따라서 $f\left(\frac{19}{20}\right)=\frac{5}{6}$

따라서 $f\left(\frac{19}{20}\right)+f\left(\frac{31}{32}\right)=\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{41}{24}$

22) 정답 162

첫째항이 2이고 공비가 -3인 등비수열의 일반항

$a_n=2\times(-3)^{n-1}$이다.

따라서 $a_5=2\times(-3)^4=162$

23) 정답 2

$\log_3 7+\log_3 63-\log_3 49$

$=\log_3\left(7\times7\times3^2\times\frac{1}{7^2}\right)=\log_3 3^2=2$

24) 정답 36

$\lim_{n\to\infty}S_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}(a_n-3S_n)^2=\left(\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}S_n\right)^2=(-6)^2=36$

25) 정답 18

$\log_2 8<\log_2 12<\log_2 16$이므로

$\log_2 12$의 정수 부분은 3이다.

따라서 $a=3$

소수 부분은 $\log_2 12-3=\log_2\left(\frac{12}{8}\right)$에서 $b=\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$이다.

따라서

$2^a\times4^b=2^3\times4^{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)}=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 4}=8\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$=8\times\frac{9}{4}=18$

26) 정답 24

(나)에서

$A-(B^C\cap A)=A\cap(B^C\cap A)^C$

$=A\cap(B\cup A^C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap A^C)$

$=A\cap B\neq\phi$

(가)에서 $n(U)=50$이고

(다)에서 $n(B-A)=25$이므로

$n(A\cap B)=1$, $n((A\cup B)^C)=0$일 때 $n(A-B)$의 최댓값 24이다.

27) 정답 40

구매 의사가 있는 고객들의 모임을 A

실제로 구매한 고객들의 모임을 B라 하면

다음 표를 생각할 수 있다.

	$n(B)$	$n(B^c)$	
$n(A)$	a		80
$n(A^c)$	b	c	40
	60		120

$a+b=60$, $b+c=40$에서

$c=40-b$이므로 $b\le 40-b$

$\therefore\ b\le20$

따라서 $60-a\le20$

$\therefore\ a\ge40$

따라서 최솟값은 40이다.

28) 정답 19

$a_n+b_n=\{p\times(-1)^n+q\}+\left\{\frac{1}{3}\times(-1)^{n+1}-\frac{2}{3}\right\}$

$=\left(p-\frac{1}{3}\right)(-1)^n+q-\frac{2}{3}$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면 $p-\frac{1}{3}=0$,

즉 $p=\frac{1}{3}$이어야 한다.

$p=\frac{1}{3}$일 때,

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{3}\times(-1)^n+q\right\}\left\{\frac{1}{3}\times(-1)^{n+1}-\frac{2}{3}\right\}$

$=\left\{\frac{1}{3}\times(-1)^n+q\right\}\left\{-\frac{1}{3}\times(-1)^n-\frac{2}{3}\right\}$

$=-\frac{1}{9}\times(-1)^{2n}+\left(-\frac{2}{9}-\frac{1}{3}q\right)(-1)^n-\frac{2}{3}q$

$=\left(-\frac{q}{3}-\frac{2}{9}\right)(-1)^n-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}q$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면

$-\frac{q}{3}-\frac{2}{9}=0$, 즉 $q=-\frac{2}{3}$이어야 한다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=q-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{1}{9}-\frac{2}{3}q=-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$

$=\frac{16}{9}-\frac{6}{9}=\frac{10}{9}$

따라서 $\alpha=9$, $\beta=10$이므로 $\alpha+\beta=19$

29) 정답 21

(i) 실수 전체에서 정의되므로 $x=4$에서 연결되어야 한다.

따라서 $16-4p-8q=0$이므로 $p+2q-4=0$

$x<4$에서 $f(x)$가 증가함수이므로 $x\geq 4$일 때 아래로 볼록인 이차함수가 증가하는 부분이 되어야 한다. 따라서 이차함수의 축 $x=\frac{p}{2}$가 $x=4$보다 크지 않아야 하므로 $p\leq 8$

$p^2+q^2=r^2$이라 할 때 $p-q$평면에서 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 $p+2q-4=0$의 $p\leq 8$와 만나면 실수 p, q를 만족한다.

따라서 원이 직선에 접할 때 최솟값을 가지게 된다.

$r\geq\frac{4}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 $r^2\geq\frac{16}{5}$, $m=\frac{16}{5}$이다.

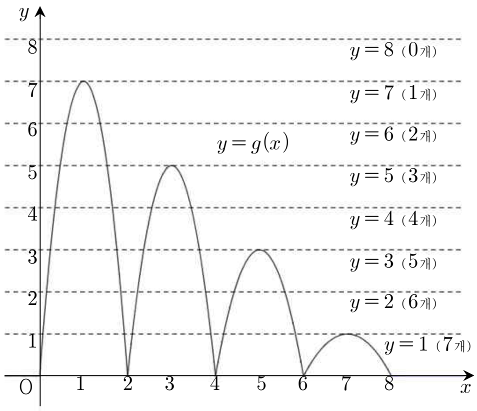
$a=5$, $b=16$에서 $a+b=21$

30) 정답 50

$f_n(x)$는 다음과 같다.

$$f_n(x)=\begin{cases}-7(x-1)^2+7 & (0\leq x\leq 2)\\ -5(x-3)^2+5 & (2\leq x\leq 4)\\ -3(x-5)^2+3 & (4\leq x\leq 6)\\ -(x-7)^2+1 & (6\leq x\leq 8)\end{cases}$$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $|g(x)-2k|=k$는

$g(x)\geq 2k$이면 $g(x)=3k$

$g(x)<2k$이면 $g(x)=k$

이다.

따라서 $y=g(x)$와 $y=3k$, $y=g(x)$와 $y=k$의 교점의 개수가 a_k이다.

(i) $k=1$일 때

$y=g(x)$와 $y=1$, $y=3$의 교점의 개수는 $7+5=12$

$\therefore\ a_1=12$

(ii) $k=2$일 때

$y=g(x)$와 $y=2$, $y=6$의 교점의 개수는 $6+2=8$

$\therefore\ a_2=8$

(iii) $k=3$일 때

$y=g(x)$와 $y=3$, $y=9$의 교점의 개수는 $5+0=5$

$\therefore\ a_3=5$

(iv) $k=4$일 때

$y=g(x)$와 $y=4$, $y=12$의 교점의 개수는 $4+0=4$

$\therefore\ a_4=4$

같은 방법으로 $a_5=3$, $a_6=2$, $a_7=1$, $a_8=0$이다.

$k\geq 8$일 때 모든 $a_k=0$이다.

k와 a_k를 순서쌍 (k, a_k)으로 나타내면

$(1, 12)$, $(2, 8)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$, $(8, 0)$, $(9, 0)$, $\cdots$

따라서 $k\times a_k$의 값은

12, 16, 15, 12, 7, 0만 나타난다.

따라서 $P=\{0, 7, 12, 15, 16\}$이므로

집합 P의 모든 원소의 합은 $0+7+12+15+16=50$