

WEEKLY EBS03

수능특강 미적분2

수능특강에서 꼭 봐야하는 문항과
그 문항의 의미, 그리고 유사기출까지
당신의 공부에 필요한 것들을 담았습니다.

UPHIGH 예감 (김성민T)

Chapter03 (05+06. 여러가지 미분법, 도함수 활용)



선별된 문제의 출처

문제 선별의 의미는 가장 우수한 문항이 담고있는
그 문제의 의미와 또 기출과의 연관성을 알아보기 위함입니다.
절대로 이 문제만 풀면 다 끝난다라는 얕은 생각하시지마시고
꼭 계산 연습용이든, 문제풀이용이든 EBS 전체교재를 살펴보실것을 권합니다.

3주차 진도 2020학년도 수능특강 미적분2

05. 여러가지 미분법
06. 도함수의 활용

김성민T 수능특강 미적분2 선별&유사기출 자료 3주차

문제NO	선별 단원	EBS 원제 페이지
1	05. 여러 가지 미분법	Page67, Level3, 1번문항
2	05. 여러 가지 미분법	Page67, Level3, 4번문항
3	06. 도함수의 활용	Page75, 유제 6번문항
4	06. 도함수의 활용	Page79, 예제 5번문항
5	06. 도함수의 활용	Page82, Level3, 1번문항
6	06. 도함수의 활용	Page82, Level3, 2번문항
7	06. 도함수의 활용	Page82, Level3, 3번문항
8	06. 도함수의 활용	Page82, Level3, 4번문항

UPHIGH
WEEKLY EBS



선별된 문제의 분석

우수한 2020학년도 수능특강 EBS 문항에서 꼭 알고 있어야 할 수학적 내용을 정리해 보고, 이와 유사한 기출문제가 있을 경우 같이 정리해봅시다.

001 |

[수능특강 Ch05. Level3 1번]

정의역이 $\{x|x>0\}$ 인 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x>0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이다.

(나) $x>0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $3f(x)-xf'(x)=x(4\ln x+1)\times\{f(x)\}^2$ 이다.

함수 $g(x)=\frac{x^3}{f(x)}$ 에 대하여 $g'(e^2)$ 의 값은?

① e^7

② $6e^6$

③ $3e^7$

④ $9e^6$

⑤ $12e^6$

[Comment] '식의 형태에 주목하자.'

조건 (나)와 같이 미분방정식 혹은 함수방정식은 미분법/적분법에서 자주 출제되는 소재이다. 문제에서 구해야 하는 것을 보고, 식을 적절히 변형하면 된다. 주로 양변에 상수, x , x^2 , e^x 을 곱하거나 나누는 경우가 많다.

유사기출문항 | [2019학년도 수능]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$ 의 값은?

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$ 이다.

(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$

② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$

③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

유사기출문항 | [2018학년도 10월 교육청]

연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$ 인 실수 x 에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 (나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$ 의 값은?

- ① $2\ln 2$ ② $3\ln 2$ ③ $1 + 2\ln 2$ ④ $4\ln 2$ ⑤ $1 + 3\ln 2$

유사기출문항 | [2019학년도 4월 교육청]

$\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고 $f'(x) = \frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$ 을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고

미분가능 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $g'(2) = -\frac{4}{7}$
 ㄴ. $g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$
 ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

최고차항의 계수가 1 이고 역함수가 존재하는 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 6x + 10$ 이다.
 (나) $f'(0)g'(0) = 3$

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 역함수를 각각 $F(x), G(x)$ 라 할 때, $F'(-2) \times G'(-2)$ 의 값은?

- ① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[Comment] '다항함수는 차수 결정부터'

미적분 II 에는 초월함수만 나오는 것이 아니다. 다항함수가 출제되는 경우가 종종 있는데, 차수에 따라 함수의 개형이 달라지기 때문에 차수를 결정하는 것이 우선이다. 그리고 일대일대응이어야 역함수가 존재하므로 역함수가 존재하는 다항함수는 극값이 존재하지 않아야 한다.

함수 $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 극값의 개수는 m 이고, 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 개수는 n 이다. $m+n$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[Comment] '초월함수의 그래프를 그리는 방법'

초월함수의 그래프를 그릴 때는 함수의 [대칭성], [정의역], [점근선], [도함수], [근]을 고려해야 한다. [대칭성], [정의역], [근]은 함수 식의 형태로 알 수 있고, [점근선]은 함수의 극한을 통해 알 수 있다. 그리고 미분가능한 함수에 대하여 [도함수]를 통해 증가와 감소, 극대와극소, 곡선의 볼록성, 변곡점 등을 알 수 있다. 이를 종합하여 함수의 그래프를 그리는 연습을 해야 한다.

유사기출문항 | [2012학년도 4월 교육청]

함수 $f(x) = 2\ln(5-x) + \frac{1}{4}x^2$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값을 갖는다.
 ㄴ. 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 2이다.
 ㄷ. 방정식 $f(x) = \frac{1}{4}$ 의 실근의 개수는 1이다.

< 보 기 >

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유사기출문항 | [2009학년도 수능]

함수 $f(x) = 4\ln x + \ln(10 - x)$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $13\ln 2$ 이다.
- ㄴ. 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ㄷ. 함수 $y = e^{f(x)}$ 의 그래프는 구간 $(4, 8)$ 에서 위로 볼록하다.

① ㄱ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = \sin 2x + 2x \cos 2x$, $g(x) = kx^2$ 에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 양수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{4\pi}$ ② $\frac{1}{2\pi}$ ③ $\frac{1}{\pi}$ ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{4}{\pi}$

[Comment] 도함수를 이용한 방정식의 풀이

- (1) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표와 같다.
 (2) 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.
 (3) 방정식 $f(x) = k$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 이와 같은 문제를 풀 때는 먼저 $y = f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 직선 $y = k$ 를 움직여본다.

유사기출문항 | [2017학년도 7월 교육청]

닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 x 에 대한 방정식 $\sin x - x \cos x - k = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합은?

- ① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

유사기출문항 | [2017학년도 4월 교육청]

다음은 모든 실수 x 에 대하여 $2x - 1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값을 구하는 과정이다.

$f(x) = (2x - 1)e^{-x^2}$ 이라 하자. 그러면 $f'(x) = (\text{가}) \times e^{-x^2}$ 이고, $f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 1$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 (나) 이다. 또한 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 (나) 이다. 따라서 $2x - 1 \geq ke^{x^2}$ 을 성립시키는 실수 k 의 최댓값은 (나) 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $g(2) \times p$ 의 값은?

- ① $\frac{10}{e}$ ② $\frac{15}{e}$ ③ $\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$ ④ $\frac{25}{\sqrt[4]{e}}$ ⑤ $\frac{30}{\sqrt[4]{e}}$

함수 $f(x) = \frac{8}{3(x^2+1)}$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점 중 x 좌표가 양수인 점 A에서의 접선을 l_1 이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선 l_2 와 점 A를 지나는 직선 m 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 직선 m 의 기울기는 0이 아니다.
 (나) 세 직선 l_1, l_2, m 으로 둘러싸인 도형은 정삼각형이다.

세 직선 l_1, l_2, m 으로 둘러싸인 정삼각형의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[Comment] '정삼각형의 특징', '변곡점에서 그은 접선'

이 문제에서 조건 (나)를 만족하는 순간은 유일함을 알아야 하고, 정삼각형이 출제되었을 때는 [세 변의 길이가 같음.] [한 내각의 크기가 60°] 등 기하적인 특징이 풀이의 실마리가 된다. 한편, 이 문제는 변곡점에서 그은 접선에 대해 깊게 다루고 있지 않지만, 매우 중요한 내용이므로 꼭 알고 가자. 변곡점은 곡선의 오목과 볼록이 바뀌는 지점이다. 그러므로 변곡점에서 그은 접선은 곡선을 관통하는 접선이다. 그러므로 변곡점은 접선의 개수, 접선과의 교점의 개수 등 접선과 관련한 문제에 꼭 쓰이는 개념이다.

유사기출문항 | [2007학년도 수능]

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$ 에 대하여 점 $A(a, f(a))$ 를 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하자. 직선 $y=g(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 그래프와 점 $B(b, f(b))$ 에서 접할 때, 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a \neq b$ 이다.)

< 보 기 >

- ㄱ. $h'(b)=0$
 ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$ 은 3개 이상의 실근을 갖는다.
 ㄷ. 점 $(a, h(a))$ 는 곡선 $y=h(x)$ 의 변곡점이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유사기출문항 | [2015학년도 9월 평가원]

3 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^n e^{-x}$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right)$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x = n$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

① ㄴ

② ㄷ

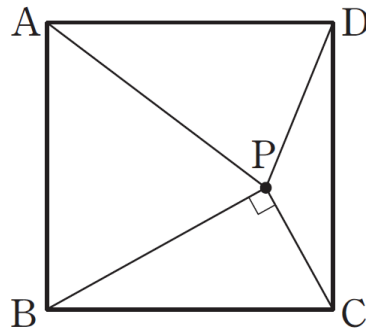
③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부의 점 P에 대하여 삼각형 PBC가 $\angle BPC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형일 때, $\frac{\overline{DP}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 최댓값은 $a + b\sqrt{5}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 유리수이다.)



[Comment] '함수의 최댓값과 최솟값에 관한 정리'

[최대 최소 정리] 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 연속이면, 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 이때 연속 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 극값을 가지면, $f(x)$ 의 최댓값은 극댓값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

x 에 대한 방정식 $x e^{1-\frac{x}{n}} = k$ (n 은 자연수)가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의 값은?

(단, $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{1-\frac{x}{n}} = 0$)

- ① 41 ② 42 ③ 43 ④ 44 ⑤ 45

[Comment] 도함수를 이용한 방정식의 풀이 2

4번 문제와 동일한 유형이다. 방정식 $f(x) = k$ 의 실근은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 이와 같은 문제를 풀 때는 먼저 $y = f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 직선 $y = k$ 를 움직여본다.

유사기출문항 | [2019학년도 7월 교육청]

자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 $f(x)=x^n-1$, $g(x)=\log_3(x^4+2n)$ 이다. 함수 $h(x)$ 가 $h(x)=g(f(x))$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >	
$\neg$. $h'(1)=0$	
$\angle$. 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $h(x)$ 는 증가한다.	
$\sqsubset$. $x > 0$ 일 때, 방정식 $h(x)=n$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.	

- ① $\neg$ ② $\angle$ ③ $\neg, \sqsubset$ ④ $\angle, \sqsubset$ ⑤ $\neg, \angle, \sqsubset$

유사기출문항 | [2015학년도 4월 교육청]

함수 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ 의 극댓값을 α 라 하자. 함수 $f(x)$ 와 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)-\frac{\alpha}{n}x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.

함수 $f(x) = 12 - \frac{kx^2}{x^2 + 2x + 3}$ 에 대하여 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 12가 되도록 하는 모든 자연수 k 의 값의 합은?

- ① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

[Comment]

k 값에 따라 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 달라진다. 3번 문제에서 학습한 초월함수의 그래프 그리는 법과 6번 문제에서 학습한 최댓값에 관한 정리를 이용하면 쉽게 이해가 될 것이다. k 값에 따라 케이스를 분류한 후, 등호가 되는 순간에 조건을 만족하는지 직접 확인해보는 것이 안전하다.



정답

3주차 진도 2020학년도 수능특강 미적분2

05. 여러가지 미분법
06. 도함수의 활용

01	④	01 유사기출문제	④ ② ⑤
02	③	02 유사기출문제	X
03	①	03 유사기출문제	③ ③
04	③	04 유사기출문제	⑤ ③
05	31	05 유사기출문제	⑤ ③
06	2	06 유사기출문제	X
07	⑤	07 유사기출문제	③ 34
08	⑤	08 유사기출문제	X

UPHIGH
WEEKLY EBS