01

기하와 벡터

2018년 11월 수학능력시험 가형 29번

1 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2018년 09월 평가원 가형 29번

2 좌표공간에서 점 $\mathrm{A}\left(3,\ \frac{1}{2},\ 2\right)$와 평면 $z=1$ 위의 세 점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$이

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\frac{11}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=-\frac{7}{4}$$

을 만족시킨다. 점 $(0,\ k,\ 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1,\ -6,\ 0)$인 직선을 l이라 하고, 직선 l에 의해 나누어지는 xy평면의 두 영역을 각각 $\alpha,\ \beta$라 하자. 세 점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$에서 xy평면에 내린 수선의 발이 모두 α에만 포함되거나 모두 β에만 포함되도록 하는 양의 정수 k의 최솟값을 m, 음의 정수 k의 최댓값을 M이라 할 때, $m-M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

2018년 06월 평가원 가형 29번

3 좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\cos(\angle \mathrm{CAB})=\dfrac{3}{5}$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

2017년 11월 수학능력시험 가형 20번

4 좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

> (가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
> (나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> 보기
> ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
> ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
> ㄷ. 세 점이 A$(2,\ 3,\ 0)$, B$(0,\ 1,\ 0)$, C$(2,\ -1,\ 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2017년 11월 수학능력시험 가형 29번

5 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$의 최댓값을 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

2017년 09월 평가원 가형 29번

6 좌표공간에 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$가 있다. 점 P가
$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le 4$를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자.
$M + m = a + b\sqrt{5}$ 일 때, $6(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

2017년 06월 평가원 가형 29번

7 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$
>
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 20$

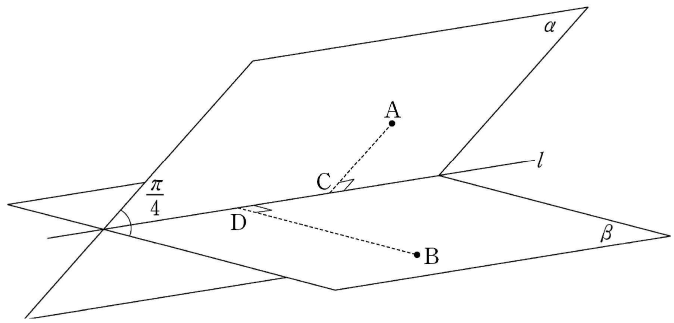
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = k$이다. $m + k^2$의 값을 구하시오. [4점]

2016년 11월 수학능력시험 가형 29번

8 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2016년 9월 평가원 가형 29번

9 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



2016년 6월 평가원 가형 29번

10 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$ 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 t $(t \geq 1)$ 에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P 가 점 $(0,\ f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s 가 될 때 시각 t 는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, $t=2$ 일 때 점 P 의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$ 이다. 시각 $t=2$ 일 때, 점 P 의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$ 라 할 때, $60a$ 의 값을 구하시오. [4점]

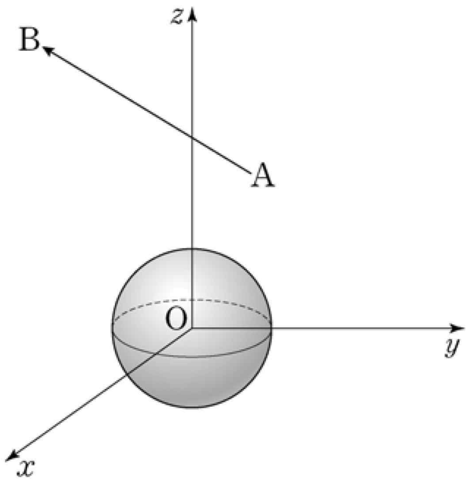
2015년 11월 수학능력시험 가형 29번

11 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 구 위의 점 Q 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$ 이다. $16(a^2+b^2)$ 의 값을 구하시오. (단, a , b 는 유리수이다.) [4점]



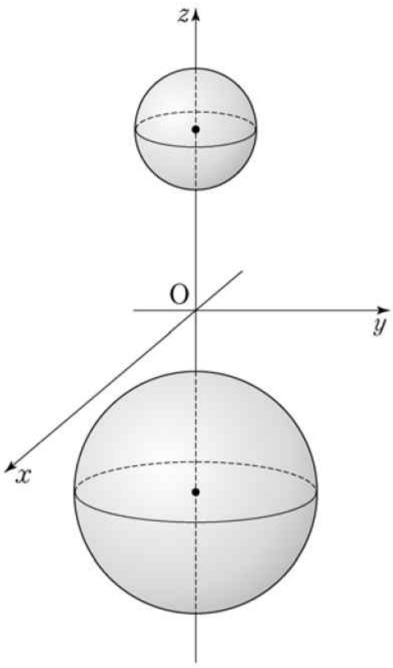
2015년 9월 평가원 가형 29번

12 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 4$$

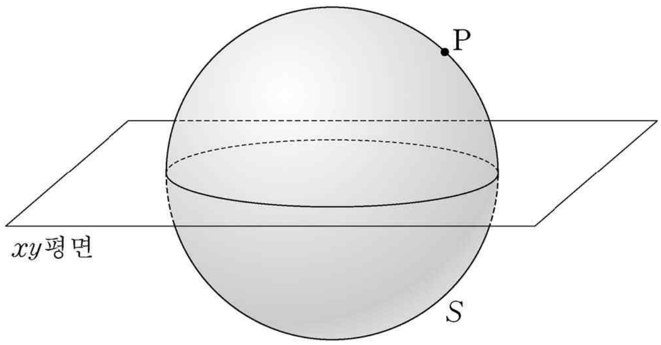
가 있다. 점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6},\ 0\right)$을 포함하고 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자. 점 $\mathrm{Q}(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오. [4점]



2014년 11월 수학능력시험 가형 29번

13 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0,\ 5,\ 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다.
(나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.

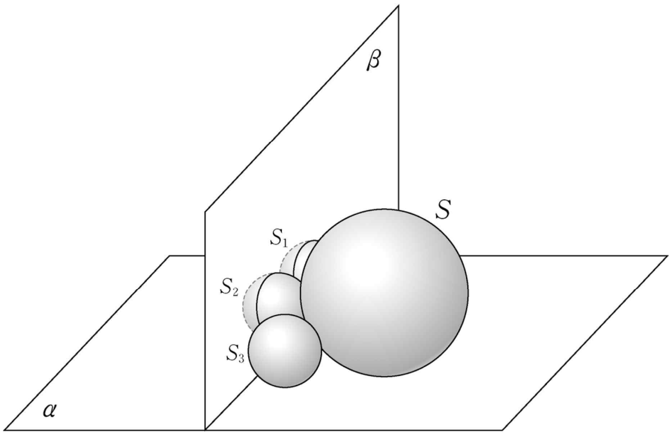


2014년 09월 평가원 가형 29번

14 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

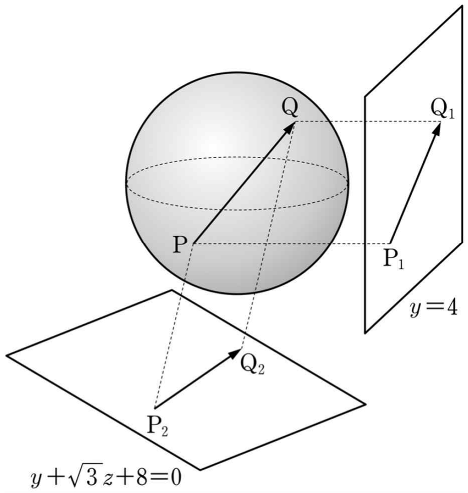
> (가) S 의 반지름의 길이는 3 이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1 이다.
> (나) S_1, S_2, S_3 은 모두 S 에 접한다.
> (다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β , 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\dfrac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2013년 11월 수학능력시험 가형 29번

15 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}\right|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



2013년 06월 평가원 가형 29번

16 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A 가 원점이면 점 B도 원점이다.
(나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $(3,\ 0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{\mathrm{PQ}} = 20$일 때, 두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

2012년 11월 수학능력시험 가형 20번

17 좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC 는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭지점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 3)$일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

2012년 09월 평가원 가형 29번

18 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}| = |\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}| = 2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi \quad (k = 1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

2011년 11월 수학능력시험 가형 21번

19 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 ABC의 넓이는 6 이다.
> (나) 삼각형 ABC의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3 이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

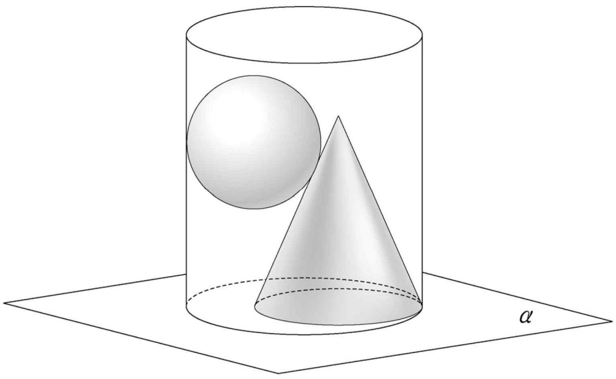
① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$
④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

2011년 11월 수학능력시험 가형 29번

20 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7 인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5 이고 높이가 12 인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A 라 하자. 중심이 B 이고 반지름의 길이가 4 인 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

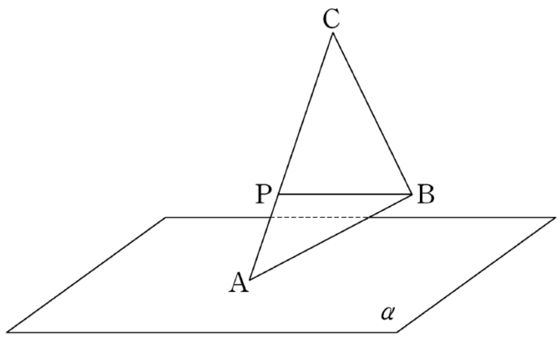
(가) 구 S 는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B 의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A′, B′일 때, $\angle \mathrm{A'OB'} = 180°$ 이다.

직선 AB 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A′은 일치한다.) [4점]



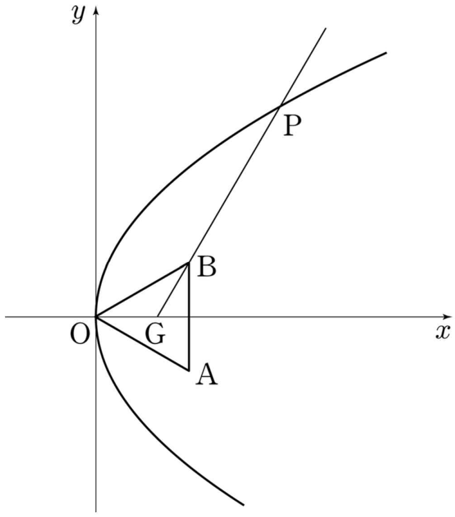
2011년 9월 평가원 가형 29번

21 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}} = 4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



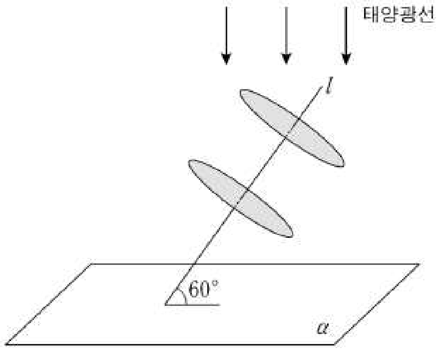
2011년 6월 평가원 가형 29번

22 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1 사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



2010년 11월 수학능력시험 가형 11번

23 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1 인 두 원판과 평면 α 가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l 은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α 와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α 에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α 에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.) [4점]

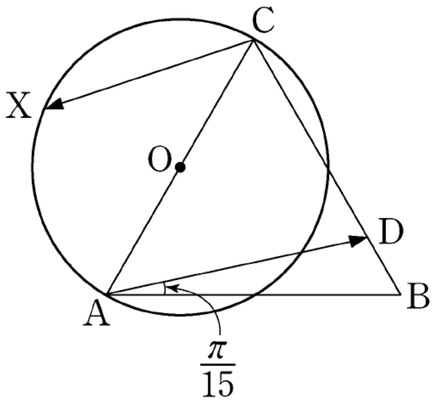


① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{8}$ ② $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{1}{8}$

④ $\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\dfrac{3}{4}$

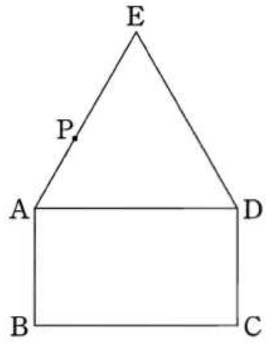
2010년 11월 수학능력시험 가형 22번

24 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP} = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



2010년 9월 평가원 가형 14번

25 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD 가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점



보기

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

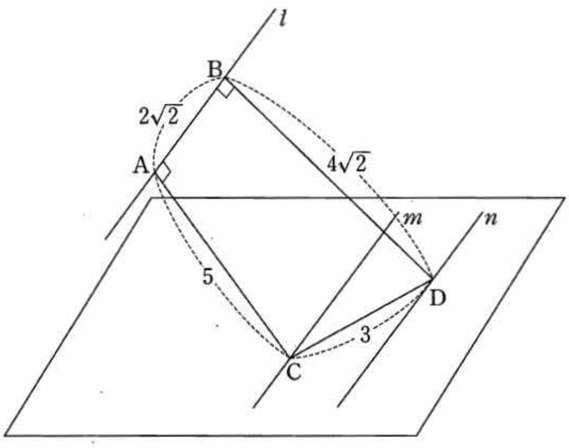
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2010년 9월 평가원 가형 25번

26 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

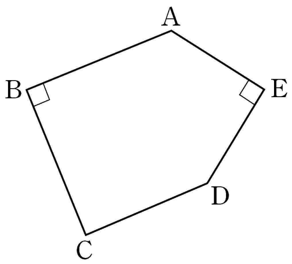
(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ [4점]

2009년 11월 수학능력시험 가형 14번

27 평면에서 그림의 오각형 ABCDE가 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B=\angle E=90°$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



보기

ㄱ. 선분 BE 의 중점 M 에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{AM}$ 은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

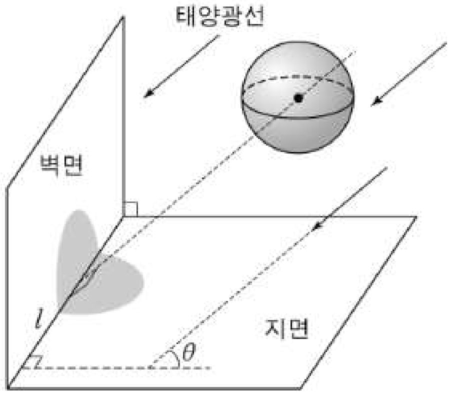
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009년 11월 수학능력시험 가형 25번

28 좌표공간에서 x 축을 포함하고 xy 평면과 이루는 각의 크기가 $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 인 평면을 α 라 하자. 평면 α 가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy 평면 위로의 정사영이 영역 $\{(x,\ y,\ 0) \mid x+3y-2 \leq 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$ 의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의 값을 구하시오. [4점]

2009년 9월 평가원 가형 15번

29 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ 인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l 과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 a 라하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 b 라 하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



보기

ㄱ. 그림자와 교선 l 의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다.

ㄴ. $\theta = 60°$ 이면 $a < b$ 이다.

ㄷ. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009년 9월 평가원 가형 23번

30 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$ 이 두 평면

α : $x+y+2z=15$

β : $x-y-4\sqrt{3}z=25$

와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2 라 하자.

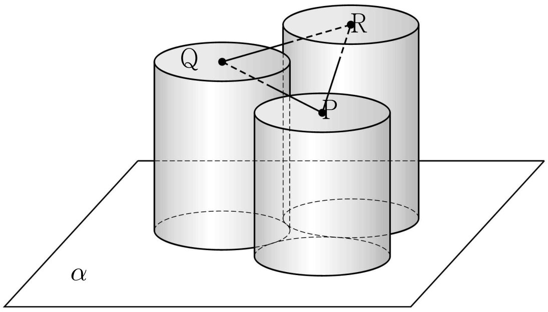
원 C_1 위의 점 P 와 원 C_2 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

2008년 11월 수학능력시험 가형 22번

31 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(3,\ 3,\ 3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$ 이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

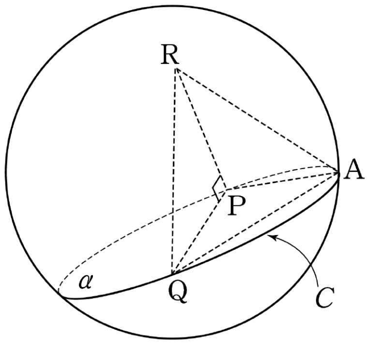
2008년 11월 수학능력시험 가형 24번

32 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α 와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $60°$ 이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, $8 < a < b$)[4점]



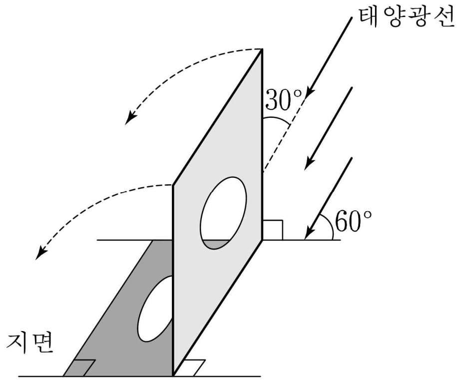
2008년 11월 수학능력시험 가형 25번

33 좌표공간에서 구 $S\ :\ x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha\ :\ y-\sqrt{3}\,z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오. [4점]



2008년 9월 평가원 가형 25번

34 그림과 같이 태양광선이 지면과 $60°$ 의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4 인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1 인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 $30°$ 의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S 라 하자. S 의 값을 $\dfrac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이고 판의 두께는 무시한다.) [4점]



2007년 11월 수학능력시험 가형 9번

35 좌표공간에서 중심이 C인 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$와 평면 $x+y+z=6$이 만나서 생기는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 최솟값은? [4점]

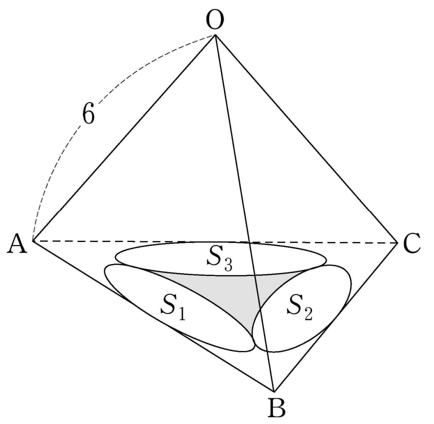
① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

2007년 11월 수학능력시험 가형 23번

36 좌표공간에 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(-3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c=\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

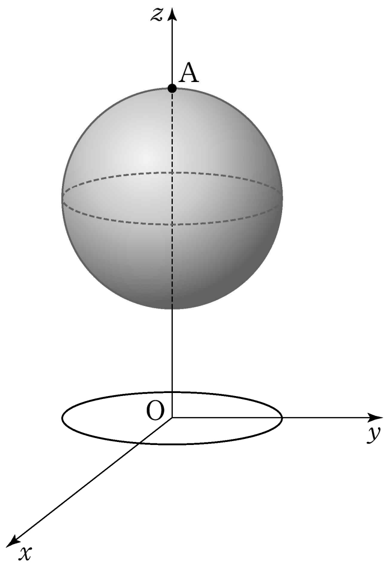
2007년 11월 수학능력시험 가형 24번

37 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 △OAB, △OBC, △OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오. [4점]



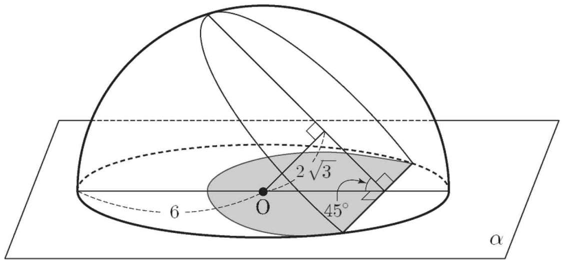
2007년 9월 평가원 가형 23번

38 좌표공간에서 xy 평면 위의 원 $x^2+y^2=1$을 C라 하고, 원 C 위의 점 P와 점 A $(0,\ 0,\ 3)$ 을 잇는 선분이 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P가 원 C 위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q 가 나타내는 도형 전체의 길이는 $\dfrac{b}{a}\pi$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, 점 Q 는 점 A 가 아니고, $a,\ b$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



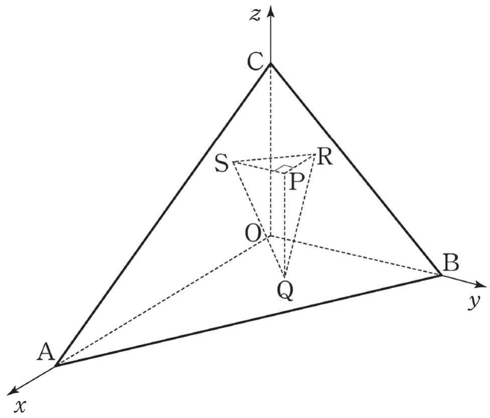
2007년 9월 평가원 가형 24번

39 반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α가 만나서 생기는 원의 중심을 O라 하자. 그림과 같이 중심 O로부터 거리가 $2\sqrt{3}$ 이고 평면 α와 $45°$의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.) [4점]



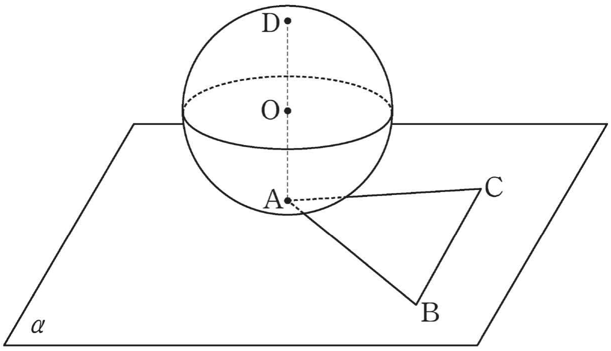
2006년 11월 수학능력시험 가형 23번

40 좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(54,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 27,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 27)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$가 있다. 점 P의 xy 평면 위로의 정사영을 Q, yz 평면 위로의 정사영을 R, zx 평면 위로의 정사영을 S라 하자. $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QS}}$ 일 때, 사면체 QPRS 의 부피의 최댓값을 구하시오. [4점]



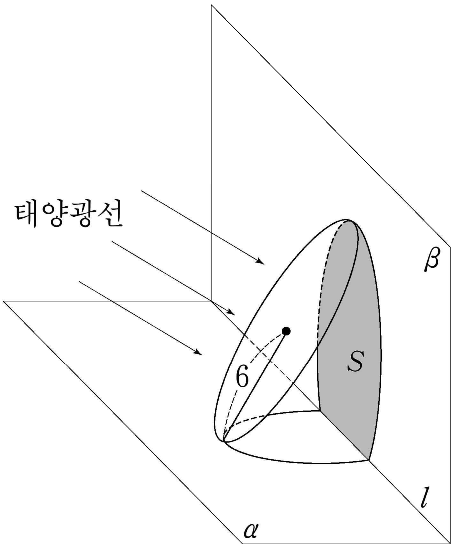
2006년 11월 수학능력시험 가형 24번

41 그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오. [4점]



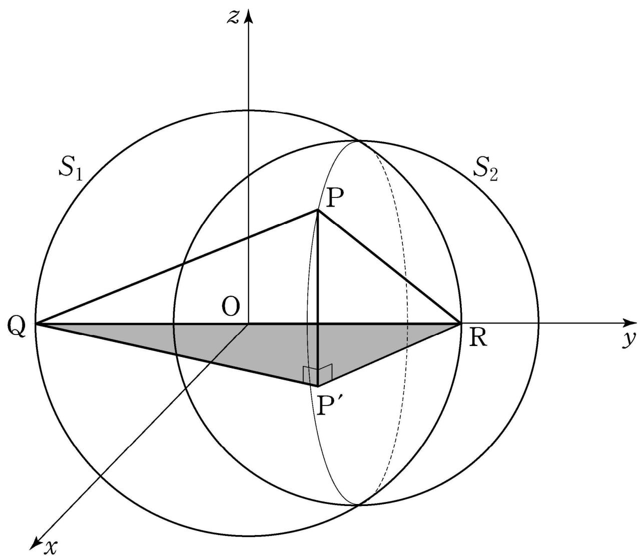
2006년 9월 평가원 가형 25번

42 서로 수직인 두 평면 α, β 의 교선을 l 이라 하자. 반지름의 길이가 6 인 원판이 두 평면 α, β 와 각각 한 점에서 만나고 교선 l 에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α 와 $30°$ 의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β 에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S 라 하자. S 의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.) [4점]



2005년 11월 수학능력시험 가형 21번

43 두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$ 을 각각 S_1, S_2 라 하자. 두 구 S_1, S_2 가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하고, 점 P 의 xy 평면 위로의 정사영을 P$'$ 이라 하자. 구 S_1 과 y 축이 만나는 점을 각각 Q, R 라 할 때, 사면체 PQP$'$R 의 부피의 최댓값을 구하시오. [4점]

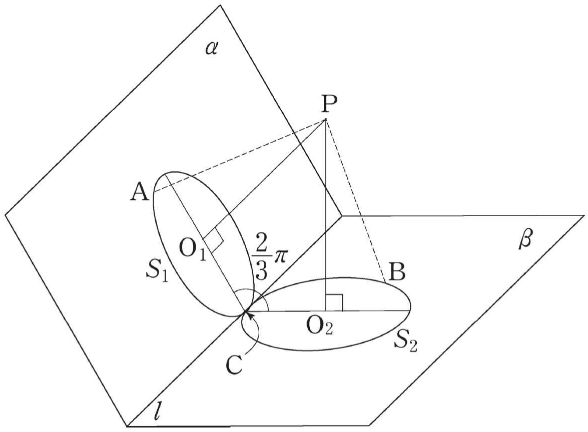


2005년 11월 수학능력시험 가형 24번

44 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 와 평면 $z=-1$ 이 만나서 생기는 원을 C 라 하자. x 축을 포함하는 평면 α 와 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 가 만나서 생기는 원이 C 와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α 의 한 법선벡터를 $\overrightarrow{n}=(a,\ 3,\ b)$ 라 하자. a^2+b^2 의 값을 구하시오. [4점]

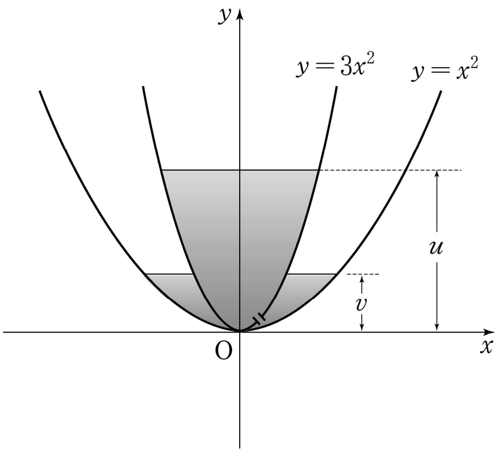
2005년 9월 평가원 가형 21번

45 두 평면 α, β 의 교선을 l 이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1 과 평면 β 위에 있는 원 S_2 는 반지름의 길이가 모두 2 이다. 그림과 같이 원 S_1 과 원 S_2 는 점 C 에서 직선 l 과 접한다. S_1 의 중심 O_1 을 지나고 평면 α 에 수직인 직선과 S_2 의 중심 O_2 를 지나고 평면 β 에 수직인 직선이 만나는 점을 P 라 하자. $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{C}\mathrm{O}_2 = \dfrac{2}{3}$ 일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A 와 S_2 위에 있는 임의의 점 B 에 대하여 $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|$ 의 최대값을 M, 최소값을 m 이라 하자. $M+m$ 의 값을 구하시오. [4점]



2004년 11월 수학능력시험 가형 29번

46 곡선 $y=3x^2$ $(0 \le y \le 10)$을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체 A 와 곡선 $y=x^2$ $(0 \le y \le 10)$을 y 축 둘레로 회전시킨 회전체 B 가 있다. 처음에는 물이 A 의 안쪽에만 차 있다가 원점 O 부근의 작은 구멍을 통하여 A 의 바깥쪽과 B 의 안쪽으로 둘러싸인 부분으로 흘러 나가기 시작한다. A 의 안쪽 수면의 높이를 u, A 의 바깥쪽 수면의 높이를 v 라 할 때, v 가 u 의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$ 의 값은?[4점]

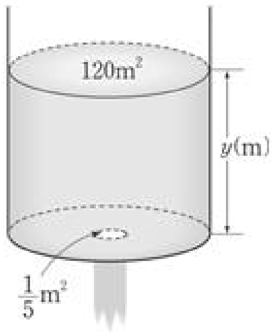


① -2　　② -1　　③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 2

2004년 9월 평가원 가형 29번

47 단면의 넓이가 120 (m^2) 로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 5 (m) 까지 차 있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(\mathrm{m}^2)$ 인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 y(m) 일 때, 빠져나가는 물의 속력 v(m/초) 는 $v=\sqrt{20y}$ 로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 5 (m) 에서 $\frac{5}{4}$(m) 로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.



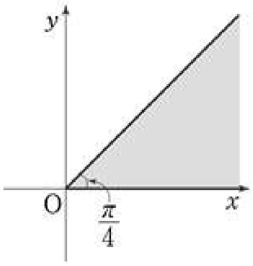
> v 와 y 가 시간에 따라 변하므로
> v 와 y 의 관계식 $v=\sqrt{20y}$ 를 t 에 관하여 미분하여
> v 와 y 의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면
> $$\frac{dv}{dt}=\frac{10}{\sqrt{20y}}\frac{dy}{dt}=\frac{10}{v}\frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots (1)$$
> 한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로
> $\boxed{\quad (가) \quad}$ …… (2)
> (2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$ 를 (1) 식에 대입하여 정리하면
> $$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{60}$$
> 따라서 구하는 시간은 $\boxed{\ (나)\ }$ (초)이다.

위의 풀이에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [4점]

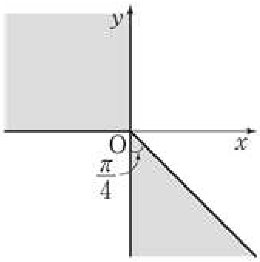
	(가)	(나)
①	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	240
②	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	300
③	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	180
④	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	240
⑤	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	300

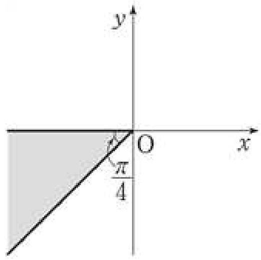
2003년 9월 평가원 가형 12번

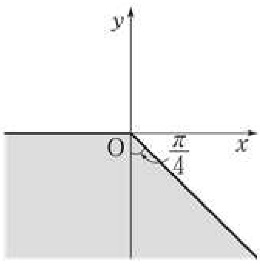
48 아래 그림의 어두운 영역에 속하는 모든 점 A 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{OB}$ 의 내적이 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 0$ 을 만족시키는 점 B 가 있다.

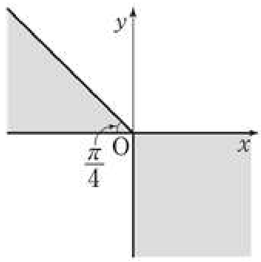


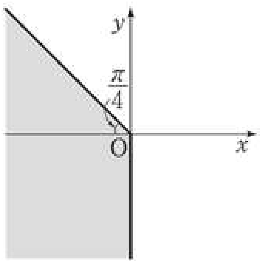
이러한 모든 점 B 의 영역을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은? (단, 어두운 부분의 경계선은 포함한다.) [3점]

①


②


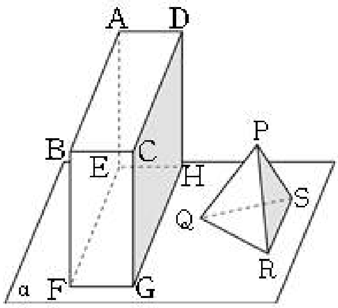
③


④


⑤


2003년 6월 평가원 가형 15번

49 그림과 같이 직육면체 ABCDEFGH 와 한 변의 길이가 1 인 정사면체 PQRS 가 평면α 위에 놓여있다. 변 GH 와 변 RS 가 평행할 때, 삼각형 PRS 의 평면 CGHD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]

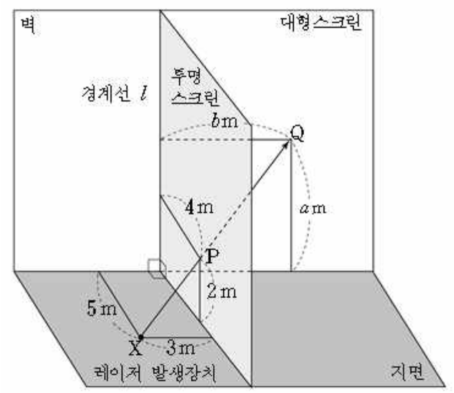


① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　③ $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

2003년 9월 평가원 가형 19번

50 그림과 같이 지면과 수직인 벽면에 대형 스크린을 붙여 세우고 투명 스크린을 벽면과 지면에 모두 수직이 되도록 설치하여 벽면과 투명 스크린이 만나는 경계선을 l 이라고 하자. 벽면으로부터 5m, 투명 스크린으로부터 3m 떨어진 지면 위의 점 X 에 레이저 발생장치를 설치하고, 경계선 l 로부터 4m, 지면으로부터 2m 떨어진 투명 스크린 위의 점 P 를 향해 레이저 광선을 비춘다. 점 P 를 통과한 레이저 광선이 지면으로부터 $a\text{m}$, 경계선 l 로부터 $b\text{m}$ 떨어진 대형 스크린 위의 점 Q 에 도달할 때, $a+b$ 의 값은? (단, 레이저 광선이 투명 스크린을 통과할 때의 굴절은 무시한다.) [3점]



① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

빠른 정답

01 기하와 벡터

1. 53	2. 12	3. 31	4. ⑤	5. 136
6. 27	7. 7	8. 19	9. 12	10. 15
11. 50	12. 40	13. 9	14. 11	15. 24
16. 14	17. ②	18.8	19. ①	20. 32
21. 45	22. 8	23. ⑤	24. 17	25. ⑤
26. 30	27.⑤	28. 20	29. ③	30. 40
31. 30	32. 25	33. 15	34. 30	35. ①
36. 11	37. 27	38. 11	39. 15	40. 216
41. 43	42. 34	43. 84	44. 27	45. 12
46. ②	47. ②	48. ⑤	49. ③	50.④