

WEEKLY EBS02

수능특강 미적분2

수능특강에서 꼭 봐야하는 문항과
그 문항의 의미, 그리고 유사기출까지
당신의 공부에 필요한 것들을 담았습니다.

UPHIGH 예감 (김성민)

Chapter02 (02+04 지수,로그,삼각함수의 미분)



선별된 문제의 출처

문제 선별의 의미는 가장 우수한 문항이 담고있는
그 문제의 의미와 또 기출과의 연관성을 알아보기 위함입니다.
절대로 이 문제만 풀면 다 끝난다라는 얕은 생각 하시지마시고
꼭 계산 연습용이든, 문제풀이용이든 EBS 전체교재를 살펴볼것을 권합니다.

2주차 진도 2020학년도 수능특강 미적분2

02. 지수함수와 로그함수의 도함수
04. 삼각함수의 미분

김성민T 수능특강 미적분2 선별&유사기출 자료 2주차

문제NO	선별 단원	EBS 원제 페이지
1	02. 지수함수와 로그함수의 도함수	Page19. 유제3
2	02. 지수함수와 로그함수의 도함수	Page25, Level2, 4번문항
3	02. 지수함수와 로그함수의 도함수	Page26, Level3, 1번문항
4	02. 지수함수와 로그함수의 도함수	Page26, Level3, 4번문항
5	04. 삼각함수의 미분	Page51, Level2, 3번문항
6	04. 삼각함수의 미분	Page52, Level3, 1번문항
7	04. 삼각함수의 미분	Page52, Level3, 2번문항
8	04. 삼각함수의 미분	Page52, Level3, 4번문항



선별된 문제의 분석

우수한 2020학년도 수능특강 EBS 문항에서 꼭 알고 있어야 할 수학적 내용을 정리해보고, 이와 유사한 기출문제가 있을 경우 같이 정리해봅시다.

001 |

[수능특강 Ch02. 유제 3번]

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{2}{x}\right)^{2x}}{4^{x-1} + 2^x}$ 의 값은?

- ① e^2
- ② $4e$
- ③ $2e^2$
- ④ $8e$
- ⑤ $4e^2$

[Comment] '극한은 '오직 그 꼴'로 해석한다.'

초월함수의 극한은 식의 형태를 보고, [미분계수의 정의] 혹은 [초월함수의 기본형 극한]으로 접근한다. 그리고 노피심에서 드리는 말씀인데, 우리는 교육과정 내에서 제시한 출제 의도에 맞는 풀이를 숙지한 뒤 '로피탈의 정리' 같은 것을 이용해야 합니다. (제발 부탁드립니다...)

유사기출문항 | [2010학년도 6월 평가원]

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{e}$
- ② $\frac{2}{e}$
- ③ 1
- ④ e
- ⑤ $2e$

유사기출문항 | [2011학년도 6월 평가원]

세 양수 a, b, c 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln\left(b + \frac{c}{x^2}\right) = 2$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

일차함수 $f(x) = ax + b$ 가 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\ln x + a + 1 \leq f(x) \leq e^{x-1} + a$$

를 만족시킬 때, $f'(1) + f'(2)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[Comment] ' $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 부등식의 해석은 기계적으로'

위와 같은 부등식은 정의된 구간 내에 있는 특수한 점 $x = k$ 에서 [함숫값] 확인과 [미분계수] 발견에 초점을 두고 해석한다. 주로 문제에서 요구하는 것을 보면, 특수한 점 k 에 대한 힌트가 있다. 한편, 미분계수를 알아내기 위해서는 미적분 I에서 배운 '샌드위치 정리'가 쓰인다.

유사기출문항 | [2013학년도 6월 평가원]

함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\ln(1+x) \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$ 을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유사기출문항 | [2015학년도 9월 평가원]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?

(가) $f(0) = -3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x - 6 \leq f(x) \leq 2x^3 - 20$ 이다.

- ① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 원소 a, b 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 \times (3a)^x + 15 \times (5b)^x}{(3a)^{x+1} + (5b)^{x+1}}$$

의 값이 자연수가 되도록 하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

[Comment] '지금까지 이런 문제는 없었다. 이것은 미적인가 확통인가'

미적분 I에서 배운 x^n 이 포함된 극한을 접근하는 법을 떠올려보자. 그리고 가장 먼저 해야 할 것은 식을 관찰한 후, Case를 분류하는 것이다. 그 기준은 각 항에 있는 함수의 힘의 세기를 비교하는 것에 있다. 이후, 힘이 가장 센 것으로 분자, 분모를 각각 나누어 극한 계산을 하면 된다.

한편, 이와 같이 평가원에서는 다양한 단원이 융합된 형태의 문제가 자주 출제된다. 최근 출제된 대표적인 융합형 문제를 예로 들자면, 2019학년도 6월 평가원 18번(삼각함수+확률) / 9월 평가원 21번(경우의 수+연속함수의 그래프) 문제가 있다. 문제의 난이도에 '표현의 낯설 정도'가 반영되기 때문에 위와 같은 문제를 절대 거르지 말고 연습해야 한다.

유사기출문항 | [2015학년도 수능]

자연수 k 에 대하여 $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n + 1}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} ka_k$ 의 값을 구하시오.

유사기출문항 | [2009학년도 9월 평가원]

$a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$ 일 때, 함수 $f(x) = \frac{b^x + \log_a x}{a^x + \log_b x}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $1 < a < b$ 이면 $x > 1$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x) > 1$ 이다.

ㄴ. $b < a < 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \log_a b$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

함수 $f(x) = kx^2 \ln x$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(2) - f(2)$ 의 값을 구하시오. (단, k 는 0이 아닌 상수이다.)

(가) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2n+1} + 1}{f(x+2)}$ 이다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} - a_n = 1$ 이다.

[Comment] 복잡한 식의 극한은 함수를 설정하고, 미분계수로 해석하자.

(가) 조건을 접근하는 방식에 따라 문제 풀이 시간에 큰 차이를 보인다. 분자를 인수분해할 수도 있지만, 이와 같은 복잡한 식의 극한은 [미분계수의 정의]로 해석하기 위해 적당한 함수를 설정한다. 이는 미적분 I '미분계수와 도함수' 단원의 '치환을 이용한 극한값의 계산'과 같은 유형이다.

(미적분 I 열심히 공부했죠?)

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4 + 3x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin x + \tan x)(1 - \cos x)} = 3$$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[Comment] 간단한 계산문제다. $x \rightarrow \infty$ 극한 / $x \rightarrow a$ 극한을 접근하는 방법이 체화되지 않았다면, 지금도 늦지 않았으니 양치기 합시다.

일반적으로 $x \rightarrow \infty$ 극한과 다항함수가 만나면 차수를 결정할 수 있다. 그리고 $x \rightarrow a$ 극한은 $\frac{0}{0}$ 꼴이 되는 경우가 많은데, [미분계수의 정의] 혹은 [초월함수의 기본형 극한]을 떠올리면 된다. (자주 나오죠? 그만큼 중요하다는 거예요!)

유사기출문항 | [2008학년도 06월 평가원]

다항함수 $g(x)$ 에 대하여 함수 $f(x) = e^{-x} \sin x + g(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

$$ㄱ. g(0) = 0$$

$$ㄴ. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 1$$

$$ㄷ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유사기출문항 | [2009학년도 수능]

다항함수 $f(x)$ 와 두 자연수 m, n 이 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = a$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = b$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 9$ 를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b 는 실수이다.)

< 보 기 >

- ㄱ. $m \geq n$
- ㄴ. $ab \geq 9$
- ㄷ. $f(x)$ 가 삼차함수이면 $am = bn$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

유사기출문항 | [2019학년도 사관학교]

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f(x)\sin x$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 0$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{x} = 6$

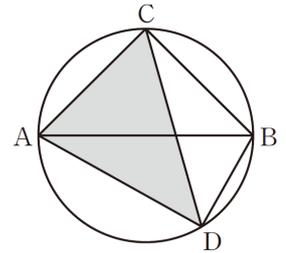
이때, $f(4)$ 의 값은?

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

006 |

[수능특강 Ch04. Level3 1번]

그림과 같이 길이가 5인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{AD} = 4$ 인 두 점 C, D가 있다. 삼각형 CAD의 넓이는? (단, 선분 AB와 선분 CD는 한 점에서 만난다.)



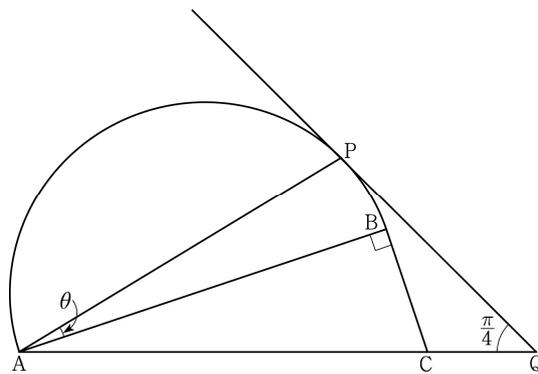
- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[Comment] '무작정 덤비지 말고, 뭘 묻는지 봐야 한다.'

문제에서 구하고자 하는 삼각형 CAD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin(\angle CAD)$ 이다. 선분의 길이는 문제 조건에 있기 때문에 결국 이 문제는 $\sin(\angle CAD)$ 만 구하면 되는 것이다. 전체에 대한 값이 보이지 않는다면 부분으로 나눠서 생각하면 된다. 각을 나눠서 생각해보자. (복습. 전체 = 부분의 합)

유사기출문항 | [2013학년도 10월 교육청]

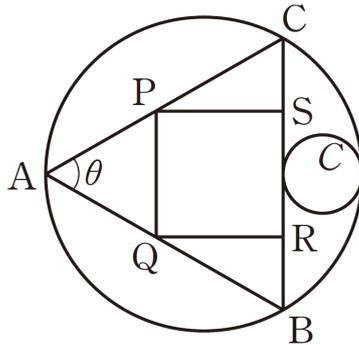
다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 1$ 이고 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에서의 접선과 AC의 연장선이 만나는 점을 Q라 하자.



$\angle PQA = \frac{\pi}{4}$ 이고 $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, $60 \tan 2\theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다. 두 변 AC, AB 위에 각각 두 점 P, Q와 변 BC 위에 두 점 R, S를 사각형 PQRS가 정사각형이 되도록 잡는다. 또, 변 BC에 접하고 호BC와 한 점에서 만나는 원 중에서 넓이가 가장 큰 원을 C라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 정사각형 PQRS의 넓이를 $f(\theta)$, 원 C의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 원 C의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)



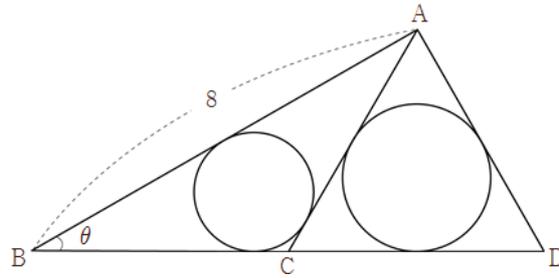
- ① $\frac{\pi}{4}$
- ② $\frac{\pi}{8}$
- ③ $\frac{\pi}{16}$
- ④ $\frac{\pi}{32}$
- ⑤ $\frac{\pi}{64}$

[Comment] 사골 주의, 공부하면 무조건 푸는 전형적인 유형.

이등변삼각형 / 정사각형 / 원 !!! 각 도형에서 무엇이 중요한지 기출문제를 분석하며 알아냈어야 합니다. 정리했어야 합니다. 우직하게 계산할 줄도 알아야 합니다. 연습합시다.

유사기출문항 | [2015학년도 7월 교육청]

$\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC = \theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 그림과 같이 선분 BC 의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$ 인 점 D 를 잡는다.



삼각형 ABC 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1 , 삼각형 ACD 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r_1 r_2}{\theta^2}$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

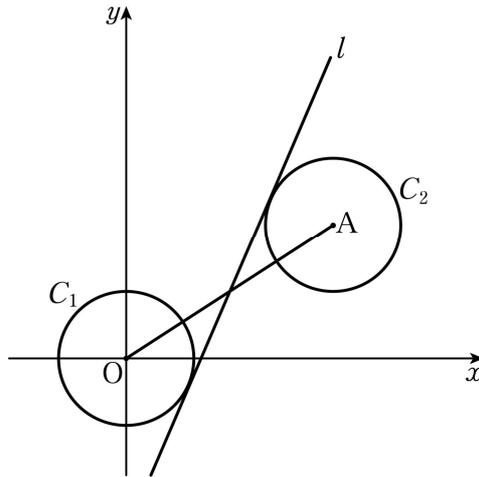
실수 t 에 대하여 함수 $y = \sin x$ 의 그래프 위의 점 $(t, \sin t)$ 에서의 접선과 함수 $y = \cos x$ 의 그래프 위의 점 $(t, \cos t)$ 에서의 접선이 이루는 예각의 크기를 $\theta(t)$ 라 하자. 함수 $f(x) = \cos x + \sin x$ 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow \frac{3}{4}\pi} \left\{ \frac{\tan(\theta(t))}{4t - 3\pi} \right\}^2 = \frac{q}{p} \left\{ f' \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right\}^2$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[Comment] '좌표평면에서 두 직선이 이루는 예각이 정의되면'

삼각함수의 덧셈정리는 계산 유형 / 좌표평면에서의 활용 / 도형에서의 활용으로 구분할 수 있다. 이 중 좌표평면에서의 활용의 두 직선이 이루는 예각에 관한 문제에서는 탄젠트함수의 덧셈정리가 압도적으로 많이 쓰인다. 보통 두 직선이 축과 이루는 각의 크기 또는 직선의 기울기를 알 때, 각의 크기의 관계식에서 탄젠트함수를 취하여 덧셈정리로 계산을 마무리한다. (각의 크기의 관계식이 항상 뺄셈으로 나오는 건 아니에요!)

유사기출문항 | [2017학년도 3월 교육청]

좌표평면에 중심이 원점 O 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1 과 중심이 점 $A(t, 6)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2 가 있다. 그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l 이 선분 OA 와 만나고, 두 원 C_1, C_2 에 각각 접할 때, 다음은 직선 l 의 기울기를 t 에 대한 식으로 나타내는 과정이다. (단, $t > 6$)



직선 OA 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α , 점 O 를 지나고 직선 l 에 평행한 직선 m 이 직선 OA 와 이루는 예각의 크기를 β 라 하면 $\tan\alpha = \frac{6}{t}$, $\tan\beta = \boxed{\text{(가)}}$ 이다. 직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\theta = \alpha + \beta$ 이므로 $\tan\theta = \boxed{\text{(나)}}$ 이다. 따라서 직선 l 의 기울기는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t), g(t)$ 라 할 때, $\frac{g(8)}{f(7)}$ 의 값은?

- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



정답

2주차 진도 2020학년도 수능특강 미적분2

02. 지수함수와 로그함수의 도함수
04. 삼각함수의 미분

01	⑤	01 유사기출문제	④ ①
02	④	02 유사기출문제	③ ①
03	8	03 유사기출문제	33 ③
04	4	04 유사기출문제	X
05	⑤	05 유사기출문제	③ ⑤ ②
06	③	06 유사기출문제	30
07	⑤	07 유사기출문제	③
08	37	08 유사기출문제	⑤

UPHIGH
WEEKLY EBS