수학 3개년 기출에 대한 고찰 – 2017학년도 by Sorrowful

미적분]

2017 6월 모의고사 수학 가형

들어가며

5. 함수 $f(x) = (2x+7)e^x$ 에 대하여 $f'(0)$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

사소한 쉬운 문제지만 이 문제를 풀 때 어떻게 접근을 하는지가 중요합니다. 정석적인 풀이로

$$f'(x) = 2e^x + (2x+7)e^x = (2x+9)e^x$$

이렇게 풀 수도 있습니다. 하지만 5번 따위에서 시간을 단축하는 것이 목적이 아닌, 킬러 및 난이도 있는 비킬러에서 사소하게 시간을 단축할 수 있는 방법이 조금씩 쌓여가다 보면 그게 은근히 시간 단축에 기여한다는 것이죠.

$f(x) = g(x)e^x$일때, $f'(x) = \{g(x) + g'(x)\}e^x$임을 이용, 암산으로 위의 결과를 바로 도출하기 좋습니다.

일차식일 때는 별로 티가 나지도 않지만, 이차식 이상이라면 조금씩 격차가 벌어지겠죠.

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{일때}, f'(x) = \{ax^2 + (2a+b)x + (b+c)\}e^x$$

사소해 보이지만 이런 것이 쌓여가다 보면 시간 단축에 크게 기여하게 될 것입니다. 적분할 때도

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{일때}, f(x) = \{ax^2 + (-2a+b)x + (-b+c)\}e^x + C$$

이런 생각을 할 수 있겠습니다. 앞으로 제가 적어나갈 것은 말 그대로 '고찰' 수준의 미세먼지 급의 팁으로, 뭐 엄청 대단한 스킬은 없을 예정입니다. 다만 일관된 시야로 문제에 접근해 나가는 방식을 소개할 텐데, 조금이나마 도움이 되었으면 좋겠습니다.

15. 두 함수 $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=e^x$ 에 대하여

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x))-\sqrt{e}}{x-\frac{\pi}{4}}$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ 1 ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

로피탈을 별로 안 좋아하시는 분들도 있는데, 전 잘 써먹습니다. 다만 써서는 안 되는 경우도 있습니다만, 그런 경우는 왠지 미분을 하는 것 자체가 꺼려지게 생긴 식일 확률이 높습니다. 예를 들면 2010학년도 6모 27번이라던가. 그러니까 이런 가벼운 문제 정도에서만 사용하세요.

$$(\text{준 식}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} g'(f(x))f'(x)$$

분모와 분자를 각각 따로 미분해주는 것이 로피탈입니다(수능 선에서는 여기까지만). 그냥 대입하면 끝나죠? 더 자세하게 공부하고 싶으시다면 검색해보시길......

16. $\int_1^e x(1-\ln x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$

④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

$$\int lnx\ dx = xlnx - x + C$$

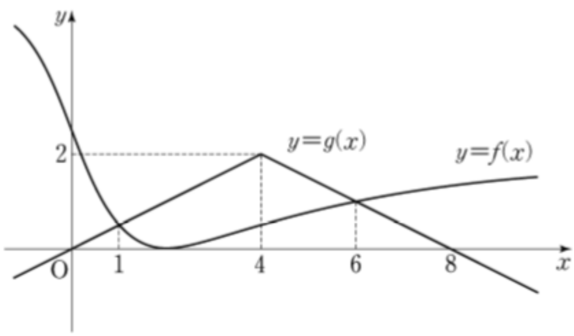
$$\int xlnx\ dx = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int x^nlnx\ dx = \frac{1}{n}x^nlnx - \frac{1}{n^2}x^n + C$$

마지막 식은 노파심에 적어놓았지만 웬만해선 둘째 줄 선에서 정리될 겁니다. 부분적분으로 손쉽게 풀 수 있는 문제지만 그것도 시간 아까워서 전 평소에 외워둡니다. 그러면 다음과 같은 풀이로 해결할 수 있습니다.

$$(\text{준 식}) = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2lnx + \frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{3}{4}(e^2-1) - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{4}(e^2-3)$$

20. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$ 인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$ 의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

처음 봤다면 거지 같다고 생각할 수 있겠지만 알고 보면 그냥 점수 주는 문제입니다. 주어진 발문에서 a에 따라 식이 변화한다는 점에 유의한다면, 그냥 a에 대해 미분하면 된다는 것을 알 수 있습니다. 간단하게 풀이를 적어보자면 다음과 같습니다.

a에 대해서 주어진 식을 미분. $f(a)-g(a)$가 된다. 해당 식이 0이 되는 값을 찾으면

$x=1$, 또는 $x=6$일 때. 이 중 더 작은 값은 $x=6$일 때이다. ($x=1$일때는 계산 생략)

$$\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\int_6^8\frac{4-|x-4|}{2}dx$$

$$=\left[\frac{5}{2}x-5\ln(x^2+4)\right]_0^6+1=15-5\ln 40+5\ln 4+1=16-5\ln 10$$

그림이 살짝 복잡하다고 바로 쫄지 마시고, 문제에서 요구하는 바가 무엇인지 차분하게 생각하시길 바랍니다.

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$ (나) $f(x)+f(-x)=0$ (다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

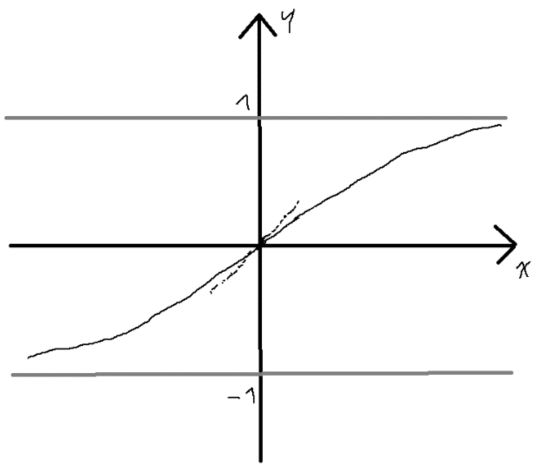
<보 기>
ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다. ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다. ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

처음으로 다루게 되는 킬러네요. 이런 문제에서 저는 거의 무조건 풀이 순서를 문제가 제시된 순서로 풀어나가고자 합니다. '평가원에서 괜히 가나다 순서를 이렇게 주진 않았겠지!' 이런 마인드로요. 일단 (가) 조건은 함수의 값을 제한시켜줍니다. 그리고 (나)를 보면 f(x)가 **기함수**라는 것을 알 수 있습니다. (가)와 (나)를 조합하여 f(x)의 값으로 -1 또한 제한된다는 것을 알아야 합니다. (나) 조건에서 f(0)=0이라는 것도 당연히 구할 수 있고요.

(다) 조건에서 x=0을 대입합시다. f'(0) = 1입니다. 그리고 f(-x)=-f(x)를 대입합시다.

$$f'(x) = \{1 + f(x)\}\{1 - f(x)\} = 1 - \{f(x)\}^2$$
$$f''(x) = -2f(x)f'(x)$$



그럼 다음과 같은 그래프를 그릴 수 있습니다. 1사분면에서 f(x)의 값이 커짐에 따라 기울기는 점점 작아져야 하면, (가)에서 구한 조건에 따라 1에 수렴하게 됩니다. 기함수니까 3사분면에 대칭되게 그리면 되겠죠? 선지를 보면 ㄱ 선지는 당연히 맞고, ㄴ 선지는 당연히 틀리겠네요. ㄷ 선지는 f''(x)=0인 x의 값이 x=0일 때 밖에 없으므로 틀린 선지입니다. 답은 1번입니다.

보시면 풀이에 수식적인 부분은 거의 없고, 사색이 대부분입니다. 글로 풀어서 쓰니까 거창해 보이지, 실제로는 그리 복잡한 문제가 아님을 알 수 있습니다.

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$ (나) $\int_{x}^{x+a} f(t)\,dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 $b,\ c$에 대하여

$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

마찬가지로 한 줄씩 해석해보도록 하겠습니다. 일단 미분이 가능하고요, 상수의 범위가 있습니다. (가) 조건에서 f(x)는 우함수라는 것을 알 수 있으면, **미분 가능한 함수이므로** f'(x) = 0입니다. (나)를 보면 기분이 나빠지기 시작하지만, 그렇다고 다음 줄로 바로 넘어가면 안되고 뽑아낼 수 있는 정보는 최대한 뽑아내야 합니다. 일단 0을 대입해봅시다.

$$\int_0^a f(t)dt = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

우함수의 정적분에 대한 성질을 아신다면, x=-a를 대입했을 때, 즉 -a부터 0까지의 정적분 값 또한 같아야 한다는 것을 알 수 있을 것입니다. 따라서 다음이 성립합니다.

$$\sin(-a+\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = \frac{5}{3}\pi \ \left(0 < a < 2\pi\text{이므로}\right)$$

이제 (다) 조건을 활용해보도록 합시다. (나) 식에 –a/2를 대입하면 정적분의 구간은 –a/2~a/2겠네요. 다시 우함수라는 조건을 써먹을 수 있습니다.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = 2\int_0^{\frac{a}{2}} f(t)dt = 2\int_0^{\frac{a}{2}} (b\cos 3x + c\cos 5x)dx = 2\left[\frac{b}{3}\sin 3x + \frac{c}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$= 2\left(\frac{b}{3}+\frac{c}{10}\right) = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, 10b + 3c = -15$$

b, c의 조건식을 하나 더 구하면 답을 알 수 있습니다. 적분 자체로는 정보를 구하기 힘들 것 같으니, (나) 식을 미분해보겠습니다. a값도 아니까 미리 대입하겠습니다.

$$f\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$$

별로 도움이 될 것 같은 식은 아니네요. 무슨 값을 대입해봤자 우함수라는 성질 때문에 상쇄됩니다. 한번 더 미분합시다.

$$f'\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

함수가 우함수이면 도함수는 기함수입니다. 고로 –a/2에 해당하는 값을 대입해 주면 됩니다.

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\left[0,\frac{a}{2}\right]\ f'(x)=\ -3b\sin 3x-5c\sin 5x\,,f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2},6b+5c=-1$$

$$a=\ \frac{5}{3}\pi,b=-\frac{9}{4},c=\frac{5}{2},abc=\ -\frac{75}{8}\pi$$

따라서 답은 83입니다.

생각보다 긴 호흡의 문제이지만, 그렇게까지 복잡하지는 않습니다. 어차피 수능 수학에서 풀이법은 그렇게까지 다양하게 나오지 않습니다. 다만 풀이를 이어나가는 과정이 얼마나 효율적이고 매끄러우냐에 따라서 걸리는 시간이 달라지기 때문에, 저는 수학을 풀 때 '한 줄씩' 읽었습니다. 평가원이 조건을 주는 순서에도 의도가 있다고 생각하고요. 추상적인 개념이라 잘 전달되었는지는 모르겠네요.

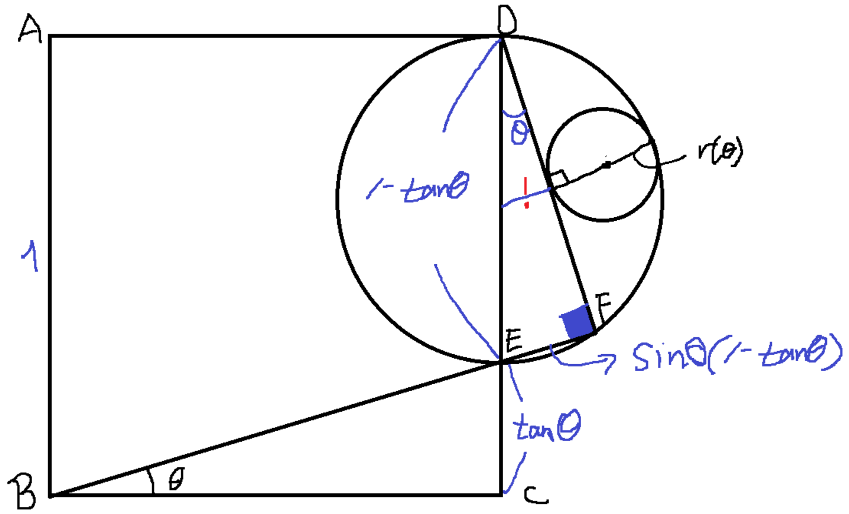
2017년 9월 모의고사 수학 가형

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle \mathrm{EBC} = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$ ④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

9월 모의 앞 문항은 다 문제가 풀이가 뻔하네요. 바로 도형의 극한 문제 풀이 들어가겠습니다. 저는 개인적으로 이런 유형에 대해서 야매 풀이를 지향합니다. 한 번 잘못 생각했다가 훅 가거든요. 검은 색을 주어진 문제고, 파란색은 제가 풀이를 하는 부분입니다.



느낌표가 있는 선분의 길이에 반지름의 두 배를 더한 것이 큰 원의 반지름이네요.

$$2r(\theta) + \frac{1}{2}\sin\theta\,(1-\tan\theta) = \frac{1}{2}(1-\tan\theta), r(\theta) = \frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{\frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$$

분자에서 0이 되는 부분은 탄젠트가 있는 괄호군요. 나머지는 그냥 계산하면 되고, 그 부분만 로피탈의 정리를 사용하면 됩니다. 답은 4번입니다.

참고) 생각해보니 그림을 캡처해서 그걸 그림판으로 옮겼으면 되는 거였는데…… 뭐한거지 ㅠ

21. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$
(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$ ④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

일단 양의 실수 전체가 범위이고, 미분 가능한 함수네요. (가) 조건에서는 무엇을 알 수 있을까요? 당장으로서는 명확한 정보를 얻을 수 없지만, 적어도 저 형태가 부분적분에서 사용될 것임은 짐작할 수 있어야 합니다.

(나) 조건을 봅시다. 일단 g(1) = 0이네요. 왠지 적분하는 식의 꼴이 (가)와 연관성이 있는 것 같지 않습니까?

$$g(x) = \frac{4}{e^4}\int_1^x te^{t^2}\frac{f(t)}{t}dt = \frac{4}{e^4}\left\{\left[\frac{1}{2}e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}e^{t^2}t^2e^{-t^2}dt\right\} = \frac{4}{e^4}\left\{\left[\frac{1}{2}e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{2}t^2dt\right\}$$

장황해 보일 뿐 별거 없습니다. x=2를 대입해서 정리해줍시다.

$$g(2) = \frac{4}{e^4}\left\{\left[\frac{1}{2}e^{t^2}\frac{f(t)}{t}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t^2dt\right\} = \frac{4}{e^4}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{f(2)}{2}e^4 - f(1)e\right\} - \frac{7}{6}\right] = f(2) - \frac{2}{e^3}f(1) - \frac{14}{3e^4}$$
$$= f(2) - \frac{20}{3e^4}, f(2) - g(2) = \frac{20}{3e^4}$$

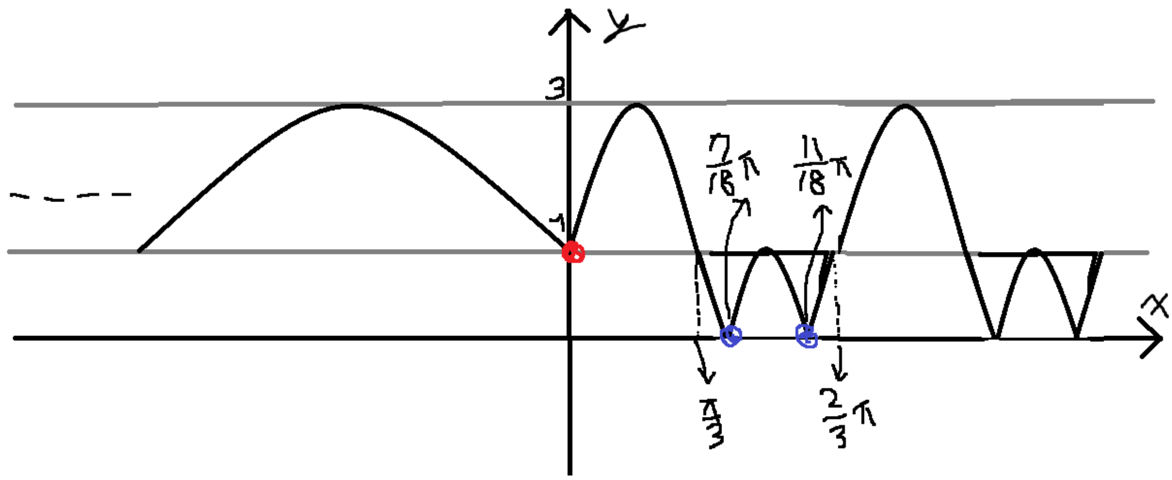
답은 3번입니다. 이런 유형의 문제는 흔히 말하는 '알면 더럽게 쉬운데 포인트를 잡지 못하면 한없이 헤매는 문제'입니다. '포인트'를 잡고 싶다면 발문에서 식의 형태 등에 유의하는 게 좋습니다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

이계도함수 h″(x)가 실수 전체의 집합에서 연속이라고 하니 h′(x)는 미분 가능, 그럼 당연히 h′(x)도 연속이어야 합니다.



요지는 빨간색 점과 파란색 점이 g(x)가 미분이 불가능하다는 점인데, 빨간색 점과 파란색 점은 차이가 있다는 것은 인지해야 합니다. 파란색 점은 도함수의 좌극한과 우극한이 부호만 다르지만, 빨간색 점은 값 자체가 다릅니다.

$$h'(x)=f'\big(g(x)\big)g'(x), h''(x)=f''\big(g(x)\big)\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)$$

h′(x)가 연속이 아니게 된다면 그 원인은 g′(x)입니다. f′(x)가 연속이므로 연속함수인 g(x)가 안에 있어도 여전히 f′(g(x))는 연속입니다. x=0, x=7π/18, x=11π/18에서 g′(x)가 불연속이겠네요. 이 x값을 f′(g(x))에 대입했을 때 0이되면 h′(x)가 연속이 됩니다. 고로 f′(0)=0, f′(1)=0입니다.

h″(x)가 연속이 아니게 된다면 그 원인은 마찬가지로 g′(x)......입니다만 앞의 항의 제곱이 변수를 만듭니다. 빨간색 색 점에서는 g′(x)의 좌극한과 우극한 값 자체가 다르기 때문에 고민의 여지도 없이 불연속입니다. 고로 f″(1)=0입니다. 하지만 파란색 점에서는 앞의 항에 제곱이 있기 때문에 좌극한과 우극한이 일치하게 되고, 뒤의 경우에는 h′(x)에서 조사했듯이 f′(g(x))이 0으로 수렴하기 때문에 상관이 없습니다. 식 3개가 있고, 사차함수 f(x)의 최고차항이 1이므로 f′(x)의 경우 4겠죠?

$$f'(0)=0, f'(1)=0, f''(1)=0\text{이므로 } f'(x)=4x(x-1)^2, f'(3)=48$$

식이 거의 없죠? 수식을 사용하는 게 정밀하지만 깊이 있는 생각의 중요성을 보이고 싶었습니다.

2017년 대수능 수학 가형

20. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_{0}^{x}\sin(t^2)\,dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$ 을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$ 을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

전형적인 사잇값/평균값 정리를 사용하는 문제입니다. 일단 f(0)=0은 쓰던 안 쓰던 기억하고 들어가야 하는 것은 아시죠?

ㄱ 선지는 계산을 시도하는 것도, 식을 쓰는 것도 불필요한 선지에요. 정적분 앞의 수는 당연히 양수죠. sin함수이니 0부터 파이까지는 양수죠. 그걸 정적분 하면 양수죠. 이걸 양수랑 곱하면 양수죠. ㄱ은 당연한 옳은 선지이니까 눈으로 풀되 차분히 생각하면서 넘어가도록 합시다.

ㄴ 선지도 마찬가지입니다. f(0)=0이죠. f(루트파이)는 값은 모르지만 양수죠. 평균값 정리 사용하면 당연히 기울기가 양수인 부분이 존재하겠죠.

ㄷ 선지가 문제입니다만...... 일단 f(x)를 미분을 해볼까요?

$$f'(x)=-e^{-x}\int_{0}^{x}sin(t^2)dt+e^{-x}\,sin(x^2),f'(\sqrt{\pi})=-f(\pi)<0$$

ㄴ 선지에서 f′(x)>0인 임의의 값이 범위 내에 존재하는데, 범위의 끝에서 도함수의 부호가 음수네요. 그러면 이 두 값 사이에는 사이값 정리에 의해 f′(x)=0인 지점이 분명히 존재할 것입니다. 따라서 ㄷ은 참입니다. 역시 약속의 ㄱㄴㄷ 문제, 답 5번이네요. 여담이지만, 이러한 유형의 문제에서 선지를 틀리게 해버리면 반례를 하나만 찾으면 금방 판별할 수 있어서 평가원에서 틀린 선지를 내기 어려워하는 것 같습니다.

21. 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2\,,\ \int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$$

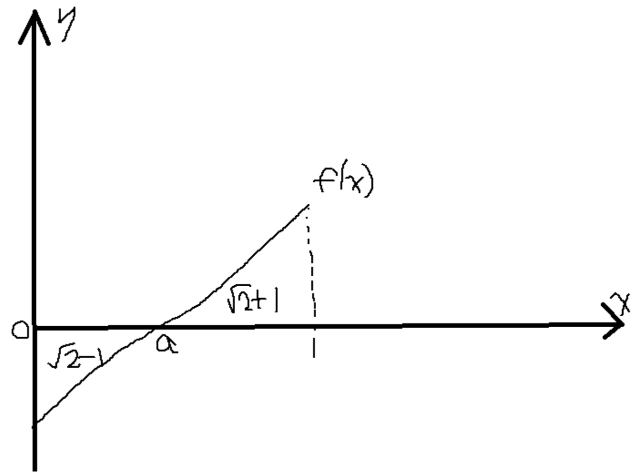
를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

별 다른 조건이 없는 정직한 부분적분 문제입니다. 증가하는 함수 f(x)라고 했으니 이렇게 그릴 수 있습니다.



문제 둘째 줄의 두 개의 정적분 값에서 그림의 두 삼각형의 넓이를 다음과 같이 구할 수 있습니다.

이제 F(x)가 **절대값** 함수를 정적분 한 함수라는 것을 유의하며 부분적분을 해봅시다.

$$\int_0^1 f(x)F(x)dx = \int_0^a f(x)F(x)dx + \int_a^1 f(x)F(x)dx$$

0부터 a까지는 F(x)를 미분하면 –f(x)가 되고(음수이기 때문), a부터 1까지는 f(x)입니다.

$$(\text{준 식}) = \left[-\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^a + \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_a^1 = -\frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) + 4 - \frac{1}{2}\left(3-2\sqrt{2}\right) = 1 + 2\sqrt{2}$$

계산은 무난한 문제였습니다. 답은 4번입니다.

30. $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.
(단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여
$(x-a)f(x)=g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는
$x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다.
(단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는
함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다
많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

'그' 문제입니다. 당시에 충격적인 정답률을 선보였죠. 이때 수능과 그 다음 년도 수능이 30번이 다 이 모양으로 나와서 이번 수능도 불일 줄 알았으나, 아시겠지만 뭔가 애매한 난이도의 수능이 출제되었습니다.

일단 맨 위의 발문을 읽어보자면, 정의역이 x>a인 함수 f(x)와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 g(x)가 주어져 있네요. (가) 조건부터 심상치 않습니다. 여기서 f(x)를 다항함수로 착각한 사람도 있었다고 하네요. f(x)는 **분수함수**입니다, 엄밀히 따지자면.

(나) 조건을 볼까요? f(x)의 극대값에 대한 조건입니다. 극댓값이 동일하다고 하니, 식을 여러 개 세워 봅시다.

$$f'(\alpha)=f'(\beta)=0, f(\alpha)=f(\beta)=M$$

$$(\alpha-a)M=g(\alpha), (\beta-a)M=g(\beta)$$

$$f(x)=\frac{g(x)}{x-a}, f'(x)=\frac{g'(x)(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$$

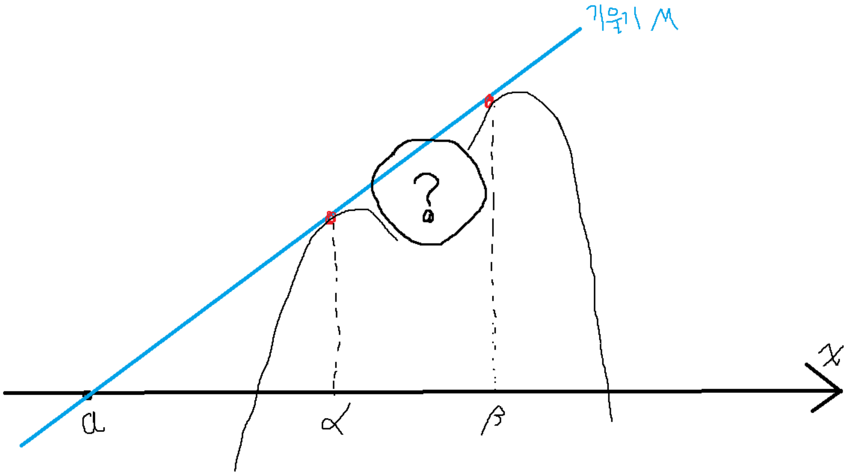
$$\alpha-a\neq 0\text{이므로 } g'(\alpha)(\alpha-a)-g(\alpha)=0, \text{마찬가지로 } g'(\beta)(\beta-a)-g(\beta)=0$$

$$g'(\alpha)(\alpha-a)=(\alpha-a)M, g'(\alpha)=M, \text{마찬가지로 } g'(\beta)=M$$

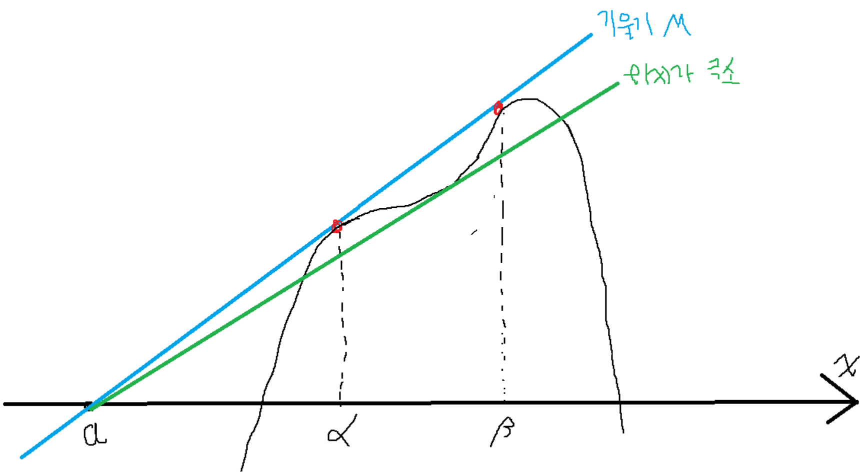
숫자 하나 보이지 않는 절망적인 수식의 나열이지만 일단 구할 수 있는 것은 여기까지 입니다. (다) 조건을 봅시다. 한 마디로 f(x)가 g(x) 보다 극값이 많다는 것입니다. 여기서 우리가 주목해야 하는 것은 f(x)입니다. f(x)의 값은 어떻게 유추할 수 있을까요? 바로 이 식을 통해서입니다.

$$f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$$

f(t)의 값은, (a, 0)과 (t, g(t))를 이은 직선의 기울기인 것입니다. 앞의 정보를 통해 g(x)와 f(x)의 대략적인 개형을 그려봅시다.



x값이 알파 또는 베타일 때 g(x)가 직선에 접하므로 f(x)는 극댓값이 됩니다. 이때의 기울기는 M입니다. 이제 (다) 조건을 통해 물음표 부분의 g(x) 개형을 유추합시다. 만약 g(x)가 극솟값이 존재한다면 g(x)의 극값은 3개입니다. 그런데 (a, 0)을 지나는 직선은 기울기에 따라 g(x)에 접할 수 있는 점이 무조건 3개입니다. 따라서 g(x)는 극솟값을 가지면 안 된다는 것을 알 수 있습니다. f(x)보다 극값이 무조건 적어야 하니까요.

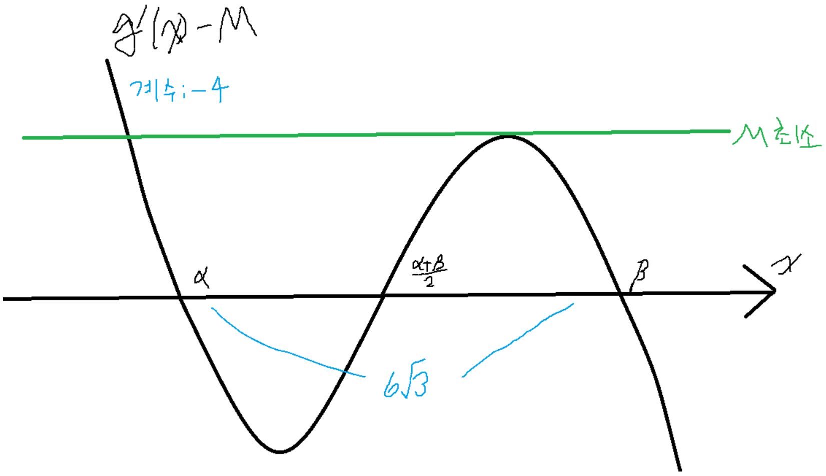


이제 g(x)를 구해봅시다. y=M(x-a)에 두 지점에서 접하므로, 다음과 같이 식을 세울 수 있습니다.

$$g(x)-M(x-a)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

$$g'(x)=M-2(x-\alpha)(x-\beta)\{2x-(\alpha+\beta)\}$$

g′(x)=0이 되는 값은 3개가 되어서는 안됩니다. 따라서 다음과 같은 그래프를 그려서 M의 최솟값을 유추할 수 있습니다.



$$h(x) = x(x^2 - 3)\text{일때 } h'(-1) = 0\text{이고}, h(-1) = 2$$

다음과 같은 일반형을 기억해두세요. 위 그림은 두 근 사이의 거리는 기본형의 3배이고 계수는 4배이니 다음과 같은 식이라 할 수 있습니다.

$$i(x) = -4x(x^2 - 27)\text{일때 } i'(3) = 0\text{이고 } i(3) = 216$$

상당히 호흡이 긴 문제입니다. 따져야 하는 요소도 많고, 끝까지 정확한 식은 구할 수가 없기 때문에 처음에는 당연히 식이 온갖 문자로 넘칠 수 밖에 없죠. 무작정 식을 어림잡아 세우기 보다는 주어진 조건을 바탕으로 자신이 아는 한도 내에서만 표현하고, 남은 미지수를 어떻게 채워나갈 것인지가 요구 사항인 훌륭한 문제였습니다. 어차피 이런 풀이를 죽어라 많이 보았을 텐데, 이걸 외우는 것이 중요한 것이 아니라 논리의 흐름을 수험장에서 낯선 문제를 대상으로 재현할 수 있는지, 그것이 관건입니다.