교과서 증명을 왜 할까요? (part. 1)

일반청의미 이원엽

어떤 사람들은 교과서 증명을 그저 외워야하는 대상으로 바라보곤 합니다.
저 또한, 많은 생각 없이 일단 교과서의 증명을 따라 공부해보았지요.

저는, 교과서의 증명을 스스로 하기 위해 교과서 자체를 이용하는 수밖에 없었습니다.
예를 들어, 삼각함수의 미분법을 증명하기 위해서 그 앞의 내용을 복습했어야 했지요.

지금 생각해보면, 제가 수학 실력을 빠르게 향상시킨 비법은 바로 이 증명 때문이었습니다.

오늘은 이 증명을 학습하는 방법에 대해서 몇 가지 예시를 간단하게 들겠습니다.
짤 칼럼이므로, 가볍게만 봐주시길 바랍니다!

①

삼각함수의 덧셈정리와 극한을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구하여 보자.
함수 $y=\sin x$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\begin{aligned}\Delta y&=\sin(x+\Delta x)-\sin x\\&=\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x\end{aligned}$$

이다. 이때 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}=0$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$이므로 함수 $y=\sin x$의 도함수는

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\&=\sin x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\cos x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\&=\cos x\end{aligned}$$

이다. 같은 방법으로 하면 함수 $y=\cos x$의 도함수는 $y'=-\sin x$임을 알 수 있다.

○ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{\cos h+1}$
$=1\cdot 0=0$

(출처 : 미적분 2 교과서)

이 도함수 유도 공식을 그저 따라 유도하는 것만으로는 실력이 늘지 않습니다.
삼각함수의 도함수를 유도하기 위해서 어떻게 해야 하는지에 대한 고민이 필요합니다.
첫째로 $\sin(x+\Delta x)$를 어떻게 해결할 지 생각해야합니다.
둘째로, 극한값을 어떻게 구할지 생각해야 합니다.
이 두 가지 문제에 대한 답은 다음과 같습니다.

삼각함수의 덧셈정리

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

② $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

③ $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

첫 번째 문제에 대한 답입니다 (출처 : 미적분 2 교과서)

삼각함수의 극한

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (단, x의 단위는 라디안)

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

두 번째 문제에 대한 답입니다 (출처 : 미적분 2 교과서)

기억하세요.

증명은, 기존에 배웠던 개념을 사용하여 이뤄지는 것입니다.

기존에 배웠던 개념을 지금 배우는 개념에 연결하기 위해 증명이 필요합니다!

이제, 여러 가지 예시를 한번 들어보면서 생각해보도록 합시다.

②

함수 $y=x^{\alpha}$ (α는 실수)의 도함수는 어떻게 구할까?

r가 유리수일 때, 함수 $y=x^r$의 도함수는 $y'=rx^{r-1}$이다.

이제 로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 α가 실수일 때, 함수 $y=x^{\alpha}$의 도함수를 구하여 보자.

$y=x^{\alpha}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln|x^{\alpha}|=\alpha\ln|x|$$

이다.

이때 $z=\ln|y|$라고 하면 z는 y에 대한 함수이고, y는 x에 대한 함수이므로 z를 x에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다. 그런데 $z=\ln|y|$, $z=\alpha\ln|x|$이므로

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{y},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{\alpha}{x}$$

이고, 이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

이다. 따라서

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha x^{\alpha}}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

이다.

(출처 : 미적분 2 교과서)

우리는 이 증명을 굳이 안합니다. 왜냐면, 어차피 형태는 똑같으니까요.

어차피 x^a를 미분하면, ax^{a-1}이 되고, 예전에 배웠던 형태와 똑같습니다!

그냥 실수도 되는구나.. 하고 생각하고 넘어가게 되는 것이지요.

하지만, 인내심을 갖고 저 내용을 증명해보려면, 우리는 다음의 개념이 필요합니다.

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구하여 보자.

x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면 다음이 성립한다.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} \ (\text{단, } \Delta u\neq 0)$$

이때 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$는 미분가능하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du}=f'(u), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}=g'(x)$$

합성함수 미분법의 개념입니다. (출처 : 미적분 2 교과서)

로그함수 $y=\ln|x|$의 도함수는 어떻게 구할까?

로그함수 $y=\ln|x|$의 도함수를 구하여 보자.

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로 $\quad y'=\frac{1}{x}$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로 $\quad y'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{1}{x}$

(i), (ii)에 의하여 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$이다.

또한, $y=\log_a|x|$ $(a>0, a\neq 1)$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=\left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}(\ln|x|)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그함수의 도함수 (2)

① $y=\ln|x|$의 도함수는 $\quad y'=\frac{1}{x}$

② $y=\log_a|x|$의 도함수는 $\quad y'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0$, $a\neq 1$)

로그함수의 도함수 개념입니다. (출처 : 미적분 2 교과서)
그래서 교육과정에 들어있는 개념의 위치 또한 저는 중요하다고 생각합니다.

앞쪽의 개념을 알고 나서야 증명할 수 있는 개념들이 있으니까요.

우리가 교과서를 공부할 때 주의 깊게 보아야할 것은,
방금 배운 개념이 어떻게 이 사실을 아는데 쓰이냐는 것입니다.

증명과정을 아는 것 보다, 개념과 개념을 연결하는 작업이 더 중요합니다!

③

무게중심은 세 중선의 교점으로 정의합니다.
무게중심이 중선을 2:1로 내분하는 과정은 다음과 같습니다.

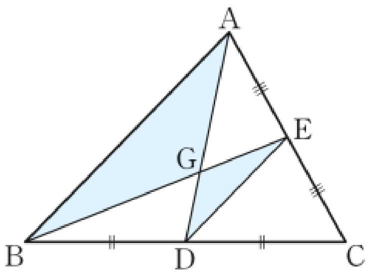
이 성질이 항상 성립하는지 알아보자.

오른쪽 그림의 △ABC에서 두 중선 AD, BE의 교점을 G라고 하자.

두 점 D, E는 각각 두 변 BC, AC의 중점이므로

$$\overline{AB} /\!/ \overline{DE},\ \overline{AB} : \overline{DE} = 2 : 1$$

이다.

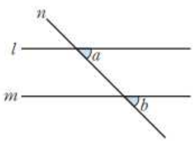


따라서 삼각형에서 평행선과 선분의 길이의 비에 대한 성질에 의하여 $\overline{AG} : \overline{GD} = \overline{BG} : \overline{GE} = 2 : 1$이다.

(출처 : 중학교 2학년 수학 교과서)

이것을 증명하기 위해선, ①평행선의 성질, ②닮음 조건 의 개념이 필요합니다!

일반적으로 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 다른 한 직선 n과 만날 때, 두 직선 l, m이 평행하면 동위각 $\angle a$와 $\angle b$의 크기는 서로 같다. 즉, $l /\!/ m$이면 $\angle a = \angle b$이다.



또, 한 직선 n에 대하여 동위각의 크기가 같도록 두 직선 l, m을 그으면 두 직선 l, m은 서로 평행하다. 즉, $\angle a = \angle b$이면 $l /\!/ m$이다.

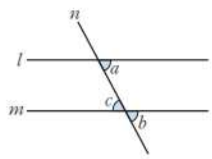
이상을 정리하면 다음과 같다.

평행선과 동위각

두 직선이 다른 한 직선과 만날 때,
① 두 직선이 평행하면 동위각의 크기는 서로 같다.
② 동위각의 크기가 같으면 두 직선은 서로 평행하다.

(출처 : 중학교 2학년 수학 교과서)

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m이 다른 한 직선 n과 만날 때, 두 직선 l, m이 평행하면 $\angle a$와 $\angle b$는 동위각이므로 $\angle a = \angle b$이다. 그리고 $\angle b$와 $\angle c$는 맞꼭지각이므로 $\angle b = \angle c$이다. 따라서 $\angle a = \angle c$이다. 즉, $l /\!/ m$이면 $\angle a = \angle c$이다.



또, 두 직선 l, m이 다른 한 직선 n과 만날 때 생기는 엇각 $\angle a$와 $\angle c$에 대하여 $\angle a = \angle c$이면 $\angle a = \angle b$가 된다. 따라서 동위각의 크기가 같으므로 두 직선 l, m은 서로 평행하다. 즉, $\angle a = \angle c$이면 $l /\!/ m$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평행선과 엇각

두 직선이 다른 한 직선과 만날 때,
① 두 직선이 평행하면 엇각의 크기는 서로 같다.
② 엇각의 크기가 같으면 두 직선은 서로 평행하다.

삼각형의 닮음조건

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 닮음이다.

(1) 세 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같을 때

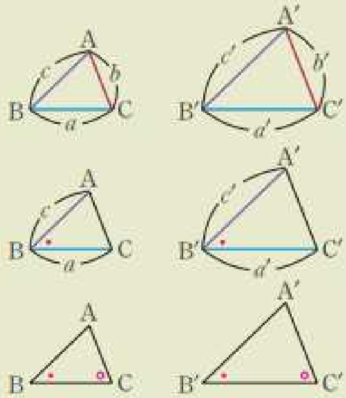
$a : a' = b : b' = c : c'$

(2) 두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때

$a : a' = c : c'$, $\angle B = \angle B'$

(3) 두 쌍의 대응하는 각의 크기가 각각 같을 때

$\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$



(출처 : 중학교 2학년 수학 교과서)

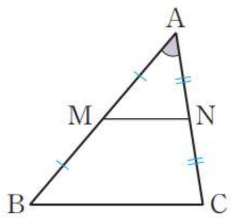
교과서에는, 무게중심의 내분을 증명하기 전에, 다음과 같은 정리를 적어놓습니다.

삼각형의 두 변의 중점을 이은 선분과 나머지 한 변은 어떤 관계가 있는지 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$의 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라고 하면 $\triangle ABC$와 $\triangle AMN$에서

$$\overline{AB} : \overline{AM} = \overline{AC} : \overline{AN} = 2 : 1$$

$\angle A$는 공통



두 쌍의 대응하는 변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$$\triangle ABC \backsim \triangle AMN$$

이다.

따라서 $\angle ABC = \angle AMN$이므로 동위각의 크기가 같게 되어

$$\overline{MN} /\!/ \overline{BC}$$

이다.

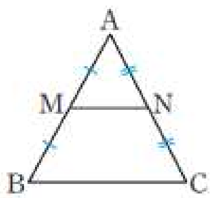
또 $\overline{BC} : \overline{MN} = 2 : 1$이므로

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$

이다.

이상을 정리하면 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분은 나머지 한 변과 평행하고, 그 길이는 나머지 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$과 같음을 알 수 있다. 즉,

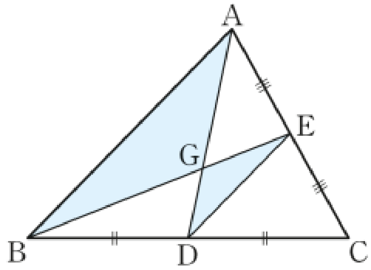
$$\overline{MN} /\!/ \overline{BC},\ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$$



(출처 :중학교 2학년 수학교과서)

즉, SAS 닮음이라는 개념을 이용한 것이네요. 이것을 중점 연결 정리라는 말로 설명하기도 합니다!
중점 연결에 의해 동위각이 같으므로, 오른쪽 그림에서 AB선분과 ED선분은 평행합니다.
그렇다면, 엇각도 같으므로 각 ABG와 각 DEG가 같으며, 각 AGB와 DGE도
맞꼭지각으로 같습니다. 그러므로 AA 닮음이 성립하며, 닮음비는 2:1이 되겠죠.

대응하는 변이 BG는 EG와 대응되기에 2:1의 길이 비를 가지며
BE는 중선이기에, 중선을 2:1로 내분하는 것이 증명되었습니다.
AD도 마찬가지의 방법으로 내분함을 보이면 됩니다.



1. 중점을 연결해봄으로 인해 생기는 SAS 닮음

2. 동위각이 같으므로 평행한 두 선분. 평행하므로 엇각이 같음.

3. 엇각이 같음을 이용한 (맞꼭지각 개념 이용할 수도 있음) AA 닮음.

이 개념들은 다 앞에서 배운 것들입니다.

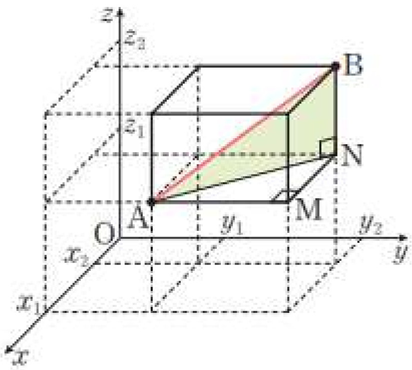
그저 증명을 외우기만 하는 것이 증명의 목적이 아니라는 것을 이제 아셨을 겁니다.

이 증명을 통해 여러분은 반드시, 예전 개념과 지금 개념의 연결을 하셔야 한다는 것입니다!

④

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB가 세 좌표평면 중 어느 것과도 평행하지 않을 때, 선분 AB를 대각선으로 하고 각 면이 어느 한 좌표평면과 평행한 직육면체를 만들면



$$\overline{MN}=|x_2-x_1|,\ \overline{AM}=|y_2-y_1|,$$
$$\overline{BN}=|z_2-z_1|$$

이다.

이때 삼각형 AMN이 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AN}^2=\overline{AM}^2+\overline{MN}^2$$

이고, 삼각형 ANB도 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AN}^2+\overline{BN}^2$$
$$=(\overline{AM}^2+\overline{MN}^2)+\overline{BN}^2$$

이다. 즉,

$$\overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

선분 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면과 평행한 경우에도 ㉠은 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

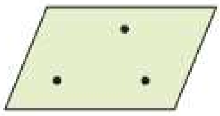
여러분은 이 개념을 그냥 평면에서 두 점 사이의 거리 구하는 공식에서 z 추가한다고 배웠을 겁니다. 그러나 그렇게 생각하시면 안 됩니다! 만약, 그게 맞다면, 좌표평면 단원에서 이것까지 다 배워야해요.

하지만, 굳이 공간도형을 배운 이후에 이것을 배우는 이유는 딱 한가지입니다!

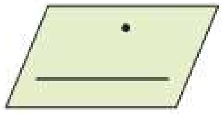
피타고라스의 정리를 쓸 수 있는가를 확실하게 보이기 위해서.

평면의 결정조건

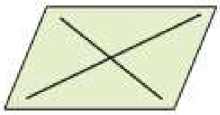
① 한 직선 위에 있지 않은 세 점



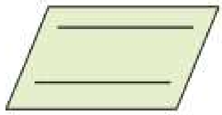
② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점



③ 한 점에서 만나는 두 직선



④ 평행한 두 직선

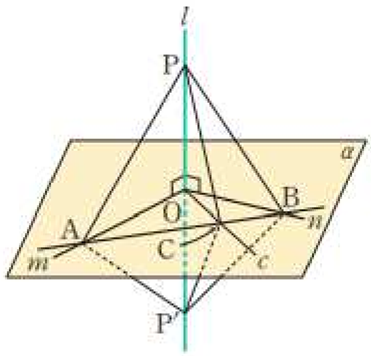


2

평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n의 교점 O를 지나고 m, n에 각각 수직인 직선 l은 평면 α와 수직임을 보여라.

풀이 평면 α 위의 점 O를 지나고 평면 α 위에 있으면서 두 직선 m, n과 다른 임의의 직선을 c라고 할 때, 직선 l과 평면 α가 수직임을 보이려면 $l \perp c$임을 보이면 된다.

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 세 직선 m, n, c와 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어 그 교점을 각각 A, B, C라고 하자.



또, 직선 l 위에

$$\overline{OP}=\overline{OP'} \quad \cdots\cdots ㉠$$

인 서로 다른 두 점 P, P'을 잡으면 두 직선 m, n은 모두 선분 PP'의 수직이등분선이므로

$$\overline{AP}=\overline{AP'},\quad \overline{BP}=\overline{BP'}$$

$\triangle PAB$와 $\triangle P'AB$에서 $\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\overline{BP}=\overline{BP'}$, $\overline{AB}$는 공통이므로

$$\triangle PAB \equiv \triangle P'AB \text{ (SSS 합동)}$$

따라서 $\angle PAB = \angle P'AB$이므로

$$\angle PAC = \angle P'AC$$

$\triangle PAC$와 $\triangle P'AC$에서 $\overline{AP}=\overline{AP'}$, $\angle PAC=\angle P'AC$, $\overline{AC}$는 공통이므로

$$\triangle PAC \equiv \triangle P'AC \text{ (SAS 합동)}$$

따라서 $\quad \overline{CP}=\overline{CP'} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에 의하여 $\triangle PCP'$은 이등변삼각형이고 점 O는 $\overline{PP'}$의 중점임을 알 수 있다.

따라서 $\overline{PP'} \perp \overline{OC}$, 즉 $l \perp c$이므로

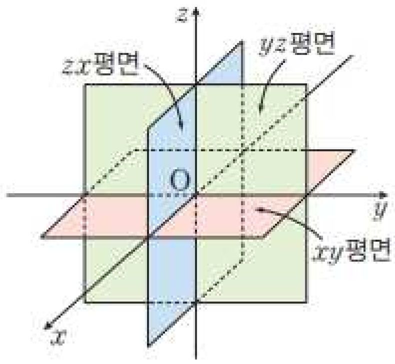
$$l \perp \alpha$$

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 x축, y축, z축이라 하고, 이들을 통틀어 좌표축이라고 한다. 이때 점 O를 원점이라고 한다. 또,

x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면,

y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면,

z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면



이라 하고, 이들을 통틀어 좌표평면이라고 한다. 이와 같이 좌표축과 좌표평면이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

이제, 우리는 z축이 x축, y축과 원점에서 만나면서 동시에 수직한 것을 압니다.
x축과 y축은 원점에서 만나므로 만나는 두 직선의 조건에 의하여 xy평면을 이룹니다.
x축, y축 두 직선에 동시에 수직한 z축은 x축, y축이라는 두 직선을 포함하는 평면에 수직입니다.

그러므로 xy평면에 평행한 평면 위의 선분과, z축에 평행한 선분은 수직인 것이 이젠 자명한거에요!

우리는, 그래서 수직인 두 선분에서 피타고라스 정리를 이용할 수 있는 것입니다.

이 사실을 우리가 완벽하게 알기 위해서는

1. 평면의 결정조건

2. 평면과 직선의 수직 개념

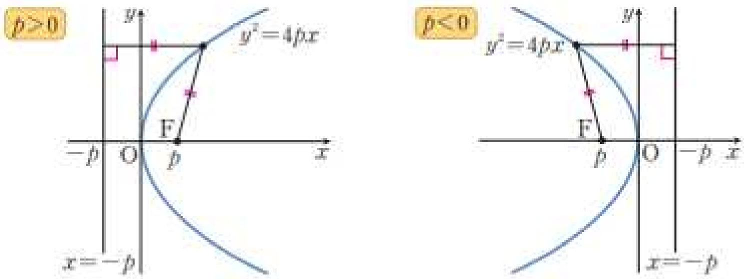
3. 좌표공간의 정의

를 알아야 한다는 것입니다!

★

증명은 아니지만, 한번 써보도록 할게요.

포물선 $y^2=4px$에서 $y^2\geq 0$이므로 $x\neq 0$이면 $px>0$이다. 따라서 $p>0$이면 포물선은 y축의 오른쪽에 있고, $p<0$이면 포물선은 y축의 왼쪽에 있다.



(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

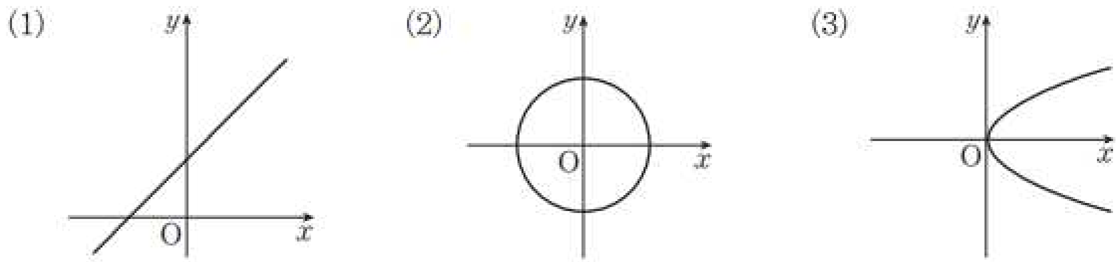
여러분은 이차곡선을 배울 때, 어떻게 배우시나요?

저는 이 개념을 배울 때, 문득 든 생각이 하나 있었습니다.

이런 거 앞에서 배운 것 같은데?

한번 살펴보겠습니다.

다음 그림에서 함수의 그래프가 될 수 없는 것을 찾고, 그 이유를 말하여라.



(출처 : 고등학교 수학 2 교과서)

원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$을 전개하여 정리하면 다음과 같이 x, y에 대한 이차방정식이 된다.

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

이와 같이 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 나타내어지는 곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

(출처 : 고등학교 기하와 벡터 교과서)

함수의 그래프가 될 수 없는 그래프는 2번과 3번 그래프입니다.

우리는 포물선과 타원, 쌍곡선, 그리고 원을 포함하는 명칭으로 이차곡선이라고 부릅니다!
그러나 이차곡선의 그래프를 떠올려보면, 한 가지 공통점을 발견할 수 있습니다!

함수가 아니구나!

그러면, 함수가 아닌 것들을 어떻게 우리는 해석해야 할까요?
이전에 함수에 대한 얘기만 끝도 없이 배웠던 학생들의 입장에서는 새롭게 생각해봐야하는 문제입니다!

함수가 아닌 것들을 해석하는 방법을 기하와 벡터 교과서에는 먼저 수록하고 있습니다.
이전에 배웠던 개념들과는 많이 다르겠구나! 생각하고 정리하는 것과, 단순히 외우는 것은 다릅니다!
개념을 단원별로 분할해서 외우는 것과, 연결 지으면서 이해하는 것은 반드시 차이를 낳습니다.

연결 짓는 학생의 경우, 기존 개념을 잊을 리가 없습니다!
그 다음 개념을 배우면서 예전 개념 수없이도 써먹었거든요!

하지만, 그렇지 못한 학생들은 다음과 같은 문제점이 발생합니다.

개념을 배웠는데 예전 개념을 까먹어서 다시 공부해야 할 것 같아...

저는 이 사실이 이해가 가지 않는다는 것입니다. 개념 공부를 정확하게 했는데 왜?
그리고 더불어서 저는 이렇게 생각한다는 것입니다.

개념을 공부해서 까먹을 방식이라면, 제대로 공부해서 까먹지 않도록 연결하면 안 될까?
그 연결을 교과서에서는 개념의 증명과, 개념의 논리적인 서술로써 도와주고 있다는 것입니다!

여기까지, 교과서 증명을 하는 이유에 관해서 정리해보았습니다.
많은 줄을 써가면서 얘기를 드렸지만, 사실 별거 없습니다!

개념과 개념의 연결 때문이에요!

이것만 기억하시면서 증명을 공부하시길 바랍니다!

(칼럼에 수록된 그림의 출처는 명시되어 있으며, 이 칼럼은 이원엽이 비영리적인 목적으로 작성하였습니다.)