내가 그린
그래프 그림

양현준

책 소개

초월함수의 그래프를 자유자재로 그리고

함수와 그래프에 관한 인식의 문제를 극복하자.

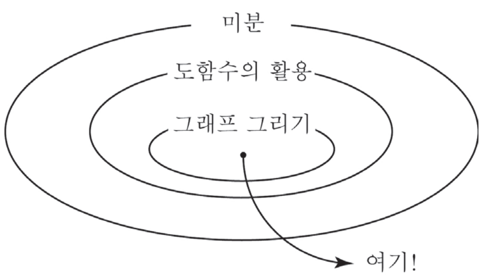
최종적인 이 책의 학습목표입니다. 그렇다면 어떤 책일까요?

1. 특정 하나의 행동에 관한 책

"내가 그린 그래프 그림" (이하 내그림)이라는 책 제목을 봅시다. 익숙한 어구죠. 그렇습니다. 반복적으로 발음하기 어려운 말인 "내가 그린 기린 그림"이라는 문장에서 영감을 받아 따온 제목입니다. 제목에서 알 수 있듯이 그래프와 관련된 책이겠죠?

저자는 수알못 이과생 시절, 문제를 푸는데 $f(x)=e^x(x^2+2x-3)$의 그래프조차 그리지 못한 채 시험 시간을 다 보내버린 경험이 있습니다. 또한 많은 학생들이 문제 풀이에서 [1]초월함수의 그래프를 그리는 것부터 어려워하는 모습을 많이 보게 되었죠.

그래서, 수학교육과를 진학한 저자는, 이를 연습할 수 있는 문항들을 자체적으로 다량 출제하였고 **"그래프를 그린다."**라는 행위만을 강조한 책을 준비하였습니다. 이 책의 내용영역은 미적분 II 에서 다음 그림과 같습니다.



그래프를 어떻게 파악하고 해석하고 그릴지는 다루는 소재가 좁아 보이지만 하나의 책으로 다루기엔 충분하고도 모자란 얘기입니다. 도함수의 활용 단원의 기본 학습 목표이기도 하죠.

결국, 함수와 그래프는 능수능란하게 다룰 줄 알아야 하는 친구들이고 그들을 대하는 법을 본 책에서 연습할 수 있습니다.

1) 지수함수, 로그함수, 삼각함수와 같이 유한번의 대수적인 연산으로 만들어질 수 없는 함수

2. 수학적 이미지를 형성

삼차함수

$y=x^3$의 그래프가 머릿속에 떠올려지시나요? 또는 이차함수 $y=x^2+a$가 a의 값이 변함에 따라 x축과 만나는 점의 개수가 어떻게 달라지는지 머릿속에 떠올려지시나요? 우리가 이러한 상황을 교과서, 문제집을 통해 본 경험이 있다면 그 때의 교과서, 문제집 속 이미지를 바탕으로 머릿속에 상황이 잘 그려질 겁니다.

이처럼 여러분은 이 책을 통해 많은 함수들의 그래프를 그려보고 그래프가 그려지는 과정을 머릿속에 인지시켜 결국 식만 봐도 함수의 그래프가 그려질 수 있어야 합니다.

또한 수능 수학에서는 더 많은 좌표평면상의 상황을 제시하고 해석하길 원하죠. 그렇기 때문에, 다양한 수학적 이미지를 형성하여 이를 바탕으로 사고할 수 있도록 이 책에서는 다양한 좌표평면상 그래프 상황과 그 이미지를 제공합니다.

3. 함수와 그래프, 변수에 관한 인식의 장애 극복

함수와 그래프의 차이가 무엇인지, 미분을 왜하는지, 변수가 무엇인지, 변하는 대상이 무엇인지와 같은 인식의 부분에서 어려움을 겪는 경우, 본 책을 통해 다양한 함수를 그려봄으로써 이러한 어려움들을 극복하고 함수와 그래프의 의미를 확장해나가는 데에 의의가 있는 책입니다.

4. 이러한 분들에게 도움이 됩니다.

1. 기출을 푸는데 그래프조차 제대로 그리지 못한다.
2. 그래프를 어느 선까지 그려야 할지 모르겠다.
3. 함수간의 관계, 그래프간의 위치관계를 제대로 파악하지 못한다.
4. 문제 상황에서 어떠한 부분이 변화하는지 파악하지 못한다.
5. 변수가 어떻게 작용하는지 파악하지 못한다.
6. 변수를 어떻게 관찰할지 모르겠다.
7. 미분을 왜하는지 모르겠다.

검토 후기

권대영 : 이 책은 4점짜리 함수 문항을 어떻게 풀지 감을 잡지 못하는 상위권 학생들에게 아주 적합합니다. 50개의 exercise를 모두 풀고 나면, 함수 문제를 두려워하지 않는 자신을 마주하게 될 것입니다.

(서울대학교 통계학과)

송웅찬 : 그래프를 그리는 기술을 제공함으로써 수식만으로 접근하는 풀이보다 간결하고 아름다운 풀이를 가능하게 합니다. 미적분에 대한 개념적인 부분은 완성되어 있지만 그래프를 그리는데 어려움을 느끼는 분들에게 진심으로 추천합니다.

[서울대학교 수리과학부]

은정민 : 삼각함수, 다항함수 등의 카테고리가 아니라 직관적으로 합 또는 곱의 형태, 도함수의 접근성 정도 등에 따라 함수를 분류하여 그래프를 그리는 방법론을 다룬다는 점에서 학습할 가치가 있는 책입니다. 적절히 분류된 기출문제와 고난이도의 자작 문제들을 통해 그래프 그리기를 실전에 활용하는 연습을 할 수 있습니다. 즉 개념과 실전, 두 마리 토끼를 한 번에 잡을 수 있는 책이라고 소개할 수 있습니다.

(서울대학교 수리과학부)

김선용 : 그래프에 대한 기본 이론부터, 수많은 미적분 관련 그래프 기출문제 분석과 더 나아가 모의고사 및 수능에 킬러 문제로 충분히 나올 수 있는 자작 문제들로 정점을 찍습니다. 그만두고 싶다는 유혹을 뿌리치고 하나하나 열심히 그리고 분석하면서 책을 충실히 따라간다면 그래프에 대한 실력과 그에 대한 자신감은 노력 이상으로 보답 받으리라 생각합니다.

(고려대학교 의과대학)

김시온 : 단순히 문제를 식으로 해결하려고 하는 학생들에게 아주 좋은 지침서가 될 것 같습니다. 문제를 풀 때 꼭 그래프를 그려서 풀어야 되는 것은 아니지만, 그래프 스킬을 배우면 자기만의 방법이 추가되는 것이기에 한 문제를 풀어도 더 쉽고 빠르게 풀 수 있을 것입니다. 이런 스킬을 이 책을 2~3번 정도 정독하면 마스터 할 수 있으리라 생각합니다. 뒤에 있는 문제들은 시중에 볼 수 없는 고퀄리티의 그래프 문제이어서, 문제들도 해설까지 완벽히 숙지하면, 좋은 성적을 거둘 수 있을 거라 생각합니다.

(울산대학교 의과대학)

최민혁 : 함수의 그래프를 그릴 때 어떻게 해야 할지 막막하시거나 "닥치고 미분만 하면 되는거 아니야?"라고 생각하시는 분들은 이 책을 완벽히 공부하시면 그래프를 그리는 것은 마스터하실 수 있다고 자신합니다. 이 책을 통해 2130뿐만이 아닌 모든 미적분 문제풀이의 토대를 쌓으시길 바랍니다.

(건국대학교 수학교육과)

김선욱 : 검토를 하면서 계속 느꼈지만, 문제들이 난이도가 있으면서도 얻어갈 것이 많다는 것을 느꼈습니다. 수험생 여러분께서 문제를 푸시게 되면 앞에서 배운 개념들을 충분히 연습문제를 통해 익히고 문제에 그 관점들을 적용해보려 한다면 문제를 더 쉽게 풀 수 있으리라 생각됩니다.

[고려대학교 의과대학]

송은민 : 깔끔하고 반복적인 그래프 그리기 연습을 통해 그래프 문제에 대한 대처법을 체득할 수 있었습니다.

[부산대학교 수학교육과]

책 속 용어

MANUAL(지침) : 이 책에서 가장 중요한 부분으로, 함수를 해석하고 그래프를 그리는 과정에서 생각해야 할 것들을 앞서 얘기하고 이것을 지침으로 정리한 것 입니다.

EXPLAIN : 지침으로 얘기한 것을 구체적인 함수의 식과 그래프를 예시로 재설명하는 부분입니다.

DEFINITION : 지침 설명에 필요한 교과개념의 정의를 나타내는 부분입니다.

EXAMPLE : 지침 학습 이후에 지침을 적용해보기 위해서 기본 예제를 풀어보는 파트입니다. 3점에서 4점 난이도의 기출문항들과 자작 문항들로 구성되어 있습니다.

EXERCISE : Chapter 단위에 걸쳐 학습한 지침들과 예제문항들을 바탕으로 복합적인 문항을 풀어보는 파트입니다. 어려운 기출 4점 정도의 난이도를 가진, 그래프 연습용 자작문항들로 구성되어 있습니다.

목차
contents

Chapter 0

도입

: 그래프란?

그래프에 대해서 공부하는 데
그래프가 무엇인지 정확하게 모르면
안되겠죠?

그래프의 정의와
그래프의 개형, 위치의 의미차이에 대해서
짚어보고 책을 공부합시다.

Chapter 0. 도입

그래프란?

함수의 그래프는 정의가 다음과 같습니다.

DEFINITION – **함수의 그래프**

> 함수 $f: X \rightarrow Y$에 대하여 집합
> $$\{(x, f(x)) | x \in X\}$$
> 을 함수 f의 그래프라고 한다.

대체로 그래프는 곡선 또는 직선 등으로 나타나는 “그림”이라고 생각하는데 웬걸 집합이네요? 맞습니다. 기본적으로 함수의 그래프는 순서쌍의 집합이기도 하고 그 모든 순서쌍을 좌표평면상에 올려서 나타낸다면 우리가 알고 있는 여러 형태의 그래프처럼 곡선 또는 직선 등으로 표현될 수 있는 것입니다. 정리하면 그래프는

1. **정의역의 원소와 이에 대응하는 함숫값의 순서쌍의 집합**
2. **직선 또는 곡선 등으로 시각적인 표현 가능한 것**

이라고 할 수 있습니다. 여기서 우리는 정의를 통해 다음의 의미를 파악할 수 있어야 합니다. 그래프는 함수 $f(x)$에 대하여 순서쌍 $(x, f(x))$의 집합이므로 좌표평면상에서 점의 위치를 나타내는 “좌표”의 집합이라고 할 수 있습니다. 그렇다면 그래프라는 용어 속에는 다음 두 의미가 존재하게 됩니다.

1. **좌표평면상에서 “위치”가 존재**
2. **직선 또는 곡선 등으로 형성된 “개형”이 존재**

여기서 개형이란 사전적 의미로는 “자세히 보지 아니하고 대체로 본 형상이나 모양”을 뜻합니다. 그러므로 개형은 좌표평면상에서 위치는 의미하지 않는 것입니다. 이 때, 개형에 좌표평면상 위치가 입혀지면 그것이 바로 그래프가 되는 것이죠.

그래프 = 위치 + 개형

결론적으로, 그래프에서 위치와 개형의 존재를 명확히 인식해주어야 하고 그래프를 그린다는 것은 구체적으로는 전반적인 곡선 또는 직선의 형태에 그 위치를 파악해주는 행위라는 걸 알아야겠죠?

그런데 위치를 엄밀하게 결정해주는 것에는 한계가 있습니다. 그래프 위의 모든 점의 위치를 정확하게 좌표평면에 표시할 수 있을까요? 불가능하죠. 그렇기 때문에, 좌표평면상에서 그래프의 위치를 결정하는 것은 다음과 같이 간소화된 과정으로 이루어집니다.

"좌표평면상에서 그래프의 위치를 결정하는 것은 그래프가 몇 사분면을 지나는지 확인하는 것이다."

최종적으로 그래프를 그리는 행위는 다음 순서로 진행 됩니다.

첫 번째. 개형파악
두 번째. 대입, 값 조사 등을 통한 위치파악

문제의 상황에 따라 첫 번째 과정까지만 진행할지 두 번째 과정까지 진행할지 달라지겠죠?
여기까지가 필수적인 그래프에 대한 이해입니다. 이를 바탕으로 책을 공부하시기 바랍니다.

Chapter 1

개형

: 개략적인 형태

우리에게 제일 중요한 topic은 그래프가 어떻게 생겼는지에 대한 것입니다.
그렇다면 개형을 파악할 때, 가장 중요한 것은 무엇일까요?

그래프를 그리는데, 누군가 우리의 옆에서, 특정 순간에 얼마만큼 그래프가 올라가고
또는 내려가는지에 대한 정보를 얘기해준다면
눈을 감은 상태에서도 그래프의 대략적인 모습을 그릴 수 있을 것입니다.
이 때, 그래프가 올라가고 내려가는 정도, 즉, 증가와 감소에 대한 값은
수학적으로 미분계수를 통해 파악할 수 있죠.
그래서 미분계수는 우리의 입장에서 “**분석**”을 위한 “**정보**”에 해당됩니다.

조금 더 정확한 그래프의 모습을 그리기 위해, 정보(미분계수)는 많으면 많을수록
좋고, 효율적으로 미분계수를 찾고 해석하기 위해 우리는 도함수를 배웁니다.
그러니까,
우리가 원하는 가장 중요한 정보를 가지고 있는 도함수를 잘 다룰 줄 알아야겠죠?

CHAPTER 1에서는 도함수를 정확하게 해석하고 효율적으로 관찰, 판단할 수 있는
MANUAL들을 살펴보겠습니다.

Chapter 1. **개형**

MANUAL 1: 증감그래프로 파악

MANUAL 1을 잘 흡수하기 위해 미분계수의 정의를 보겠습니다.

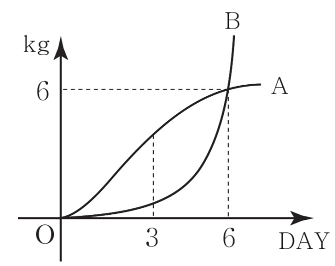
DEFINITION – **미분계수**

미분 가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

수학자들이 미분계수를 왜 이렇게 정의를 했는지 미분을 활용하는 데 이질감이 없도록 **발생적** 이유를 생각해봅시다.

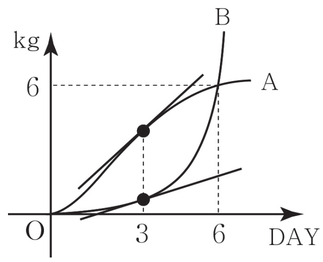
두 학생 "A"와 "B"가 몸무게에 대해 얘기를 하는 상황을 예로 들어봅시다.
A는 6일간 $6kg$만큼 몸무게가 늘었고, B도 6일간 $6kg$만큼 몸무게가 연속적으로 늘었습니다. 두 학생의 증가한 몸무게 변화 그래프는 그림과 같습니다.



두 학생이 서로 얘기를 하는데 A가 이렇게 말합니다. "난 6일 동안 $6kg$정도 늘었으니까 하루에 평균적으로 $1kg$만큼 늘었네." 이 때, B학생이, "나도 평균적으로는 하루에 $1kg$정도씩 늘었는데, 3일째부터 빨리 찐 것 같아"라고 합니다. 그래서 A학생이 승부욕이 생겨 "누가 3일째에 더 빨리 쪘는지 볼까?"라고 제안합니다. 평균적으로는 두 학생의 몸무게는 하루에 $1kg$씩 변화했습니다. 그런데, 3일째의 순간! 그때의 두 학생의 몸무게 변화정도는 어떻게 판단할까요?

간단하게, 그래프가 3일째에 대응되는 부분에서 얼마나 빠르게 증가하는지, 그러니까 얼마나 그래프의 **경사가 가파른지** 시각적으로 보면 되겠죠. 얼핏 보니 A가 더 빨리 찐 듯 합니다. 하지만, 몸무게가 아닌 다른 중요한 사항에 관한 변화율을 판단할 땐, 얼핏 보고 판단해선 안 되겠죠. 그러면, 어떤 도구를 도입해야 정확하게 판단할 수 있을까요? 그것이 바로 **접선**입니다.

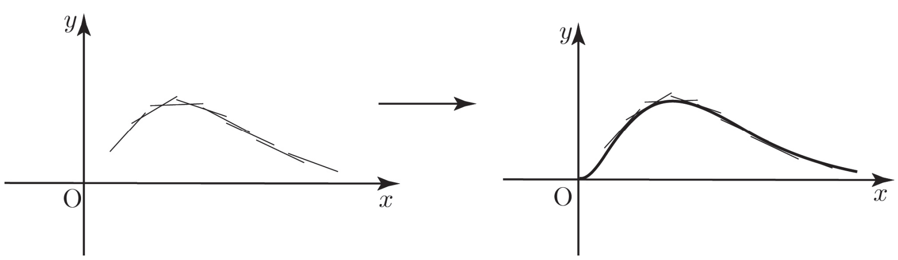
접선은 접점이라는 한 점에서 발생하는 현상이므로 접선을 통해 “접한다.”라고 하는 순간의 정보를 알 수 있지 않을까요? 우리는 3일째의 몸무게의 변화정도를 알고 싶은 것이므로 두 그래프의 3일째에 대응되는 부분에 접선을 그어보겠습니다.



두 접선의 기울기를 비교해보니 A가 3일째에 더 빨리 쪘다는 것이 정확해졌습니다.
결국, 내가 원하는 지점에서 접선의 기울기를 알면 그래프가 그 순간 **얼마나 빠르게 올라가고(증가) 내려가는지(감소)**, 수치를 바탕으로 정확하게 알 수 있는 것입니다. 그런데,
Chapter 1 도입부에서 그래프의 증가와 감소는 그래프의 개형을 결정하는 중요한 요소라고 했었죠?

“즉, 미분계수는 순간적인 변화 정도를 알기 위해 기하학적 측면에서 접선의 기울기라는 의미를 담도록 정의된 것이고, 그래프의 증감정도로서, **개형을 형성하는 데 중요한 역할**을 하는 것입니다.”

만약 어떤 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선들이 주어져 있다면 이 접선들만으로도 다음 그림과 같이 대략적인 함수의 그래프가 충분히 그려질 수 있습니다.



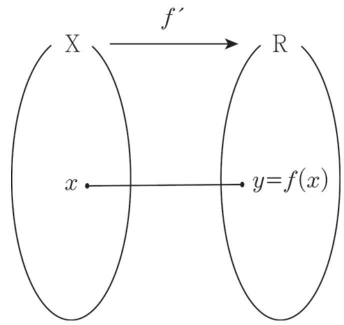
미분계수가 그래프의 개형형성에 얼마나 중요한 역할을 하는지 느낌이 오시나요? 그런데
미분계수의 정의대로라면, 미분계수는 평균변화율의 극한값이므로, 위의 접선들의 기울기인 미분계수들은 극한 계산을 여러 번 반복해서 얻어진 값들이겠죠?
우리는 더 많은 미분계수가 있어야 그래프를 더 정확하게 그릴 수가 있습니다. 하지만 함수식이 복잡하다면 미분계수의 정의대로 극한의 계산을 반복하는 것이 쉬운 일 같아 보이진 않습니다. 그래서
labor-saving tool인 **도함수**를 사용합니다. 왜 도함수가 노동력 절약형 도구일까요?
도함수의 정의를 보겠습니다.

DEFINITION – **도함수**

함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에 대하여
미분가능 할 때 **모든 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응**시킨 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 **도함수**라 한다.



도함수는 미분계수의 정의에 따라 임의의 x값에 대한 미분계수를 표현해줍니다. 그 말은 곧, 한 번 극한계산을 통해 도함수를 구해놓으면, 그 이후엔 적절한 x값을 **대입**하여 원하는 미분계수를 잔뜩 얻을 수 있다는 것이죠. **편리함이 이점**입니다. 심지어 도함수 역시 극한계산을 하지 않아도 미분법을 통해 구할 수 있습니다.

이러한 이유에서 도함수를 구하는 것 즉, 미분에 대한 목적의식을 가지면
우선적으로 도함수에서 집중해야 될 부분은 원함수의 미분계수, 즉 **도함수의 함숫값**입니다. 그리고 그 값들의 **부호**가 가장 중요하지 않을까요? 원함수의 증가와 감소를 결정하고 전반적인 개형을 형성하니까요. 그래서 미분계수의 변화추이를 도함수의 그래프를 통해 본다면, 부호에 집중해야 할 것입니다.

이제, 미분계수와 그 부호에 대한 중요성을 보았으니 도함수의 부호에 관한 지침을 MANUAL 1로 봅시다.

MANUAL 1- **기본적으로 도함수는 부호를 관찰한다.** : **증감그래프**

함수의 증가, 감소 또는 극점에 대해서 도함수의 부호가 결정적인 역할을 하므로 우선, 도함수는 부호를 따진다.

1^{st}. 증감표를 그리기보단, 도함수 역시 그래프를 그려서 부호변화를 한 눈에 확인하고 좌표평면 상에 부호를 간단히 표시한 **증감그래프**를 그리자.

<시각적 편리함>

삼차함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 증감조사를 해보겠습니다.

도함수 $f'(x)$를 구하면 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 입니다.

$f'(x)=0$인 x의 값을 구해보면 $3(x+1)(x-1)=0$, 그러므로 $x=1$ 또는 $x=-1$이죠.

$f'(x)=0$인 x값을 기준으로 함수 $f(x)$의 증감표를 나타낸다면, 그림과 같습니다,

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

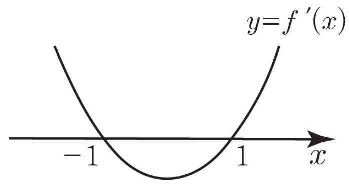
이렇게 증감표를 작성할 수 있지만, 기호들이 많다보니 도함수의 전체적인 함숫값 변화 추이가 한눈에 들어오지 않습니다. 표를 그리기 번거롭다는 생각도 듭니다. 그러면, 도함수 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$의 그래프를 한번 그려봅시다.

간단한 이차함수의 식입니다. 바로 그래프의 모습이 떠오르시나요?

교과서에서 이차함수의 그래프를 구체적으로 배우기 때문에, 바로 모습이 떠오르실 겁니다.

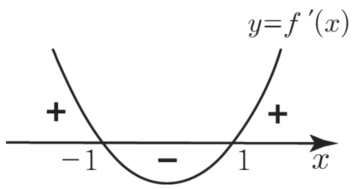
$x=1$, $x=-1$에서 x축과 만나며, 최고차항의 계수가 양수인 아래로 볼록한 그래프겠죠?

$f'(x)=3(x+1)(x-1)$의 그래프입니다.



함숫값의 부호변화가 잘 보이시나요? 그럼, 조금 더 한 눈에 확인해볼까요?

좌표평면상에 바로 함숫값의 부호를 표시해보겠습니다.



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

어느 것이 한 눈에 들어오시나요? 또는 어느 것이 그리기 더 편해 보이시나요? 이러한, 도함수의 그래프와 함께 좌표평면상에 도함수의 부호를 표시한 것을 이 책에서는 **증감그래프**라고 부릅니다. 좌표평면상의 그래프는 부호를 x축의 **위쪽**, **아래쪽**과 관련지어 볼 수 있기 때문에, 부호에 관한 **영역**이 한 눈에 들어온다는 특성이 있습니다.

하지만, **시각적 편리함**은 개개인의 차이가 있을 수 있는 부분입니다. 어떤 학생은 증감표가 더 그리기 편할 수도 있고 어떤 학생은 그 반대일 수도 있죠. 그렇기 때문에 이러한 이유만을 가지고 증감표와 증감그래프의 우선순위를 정하는 것은 모호합니다.

그래서 시각적 편리함도 좋지만, 보다 더 중요한 특성이 바로

"증감그래프는 도함수의 그래프"

라는 겁니다. 바로, 이계도함수와 관련이 있다는 것이죠.

<도함수와 이계도함수의 관련성>

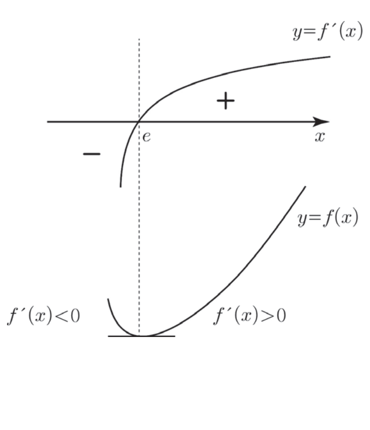
도함수 $f'(x)$는 원함수 $f(x)$를 미분하여 나왔습니다. 그러면 $f(x)$가 낳은 $f'(x)$를 미분하면 무엇이 나올까요? **이계도함수** $f''(x)$입니다. 그렇다면, 앞서 배운 내용을 바탕으로 보면 도함수의 도함수는 이계도함수이기 때문에 도함수의 증감은 이계도함수가 결정하죠.
그러므로 도함수는 원함수를 위한 함수일 뿐만 아니라 이계도함수와도 관련이 있기 때문에, 증감표를 그리는 것 보다, 도함수를 그려놓는 것이 이계도함수를 파악해야 하는 문제 상황에서 도움이 될 수도 있습니다.

이계도함수에 대한 자세한 얘기는 MANUAL 3에서 공부하시기 바랍니다. 지금은 도함수의 그래프를 그리는 것에 대한 이유를 부여하기 위해 간략히 설명하도록 하겠습니다.
결론적으로, 도함수의 부호를 조사하는 과정에서 할 수 있는 행동에는 시각적 편리함과, 이계도함수와 관련성에 의해 다음 두 우선순위가 생깁니다.

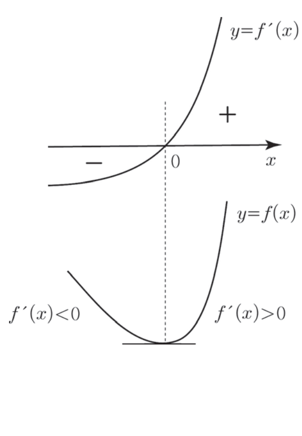
1^{st} **증감그래프 그리기**
2^{nd} **증감표 작성하기**

<증감그래프의 또 다른 예시>

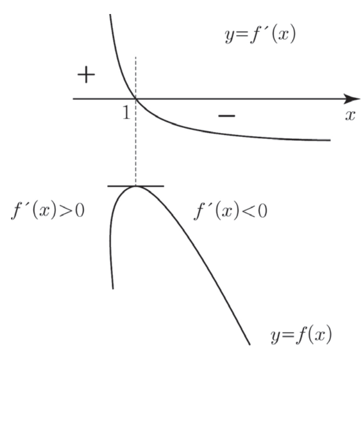
① $f(x) = x\ln\dfrac{x}{e} - x$



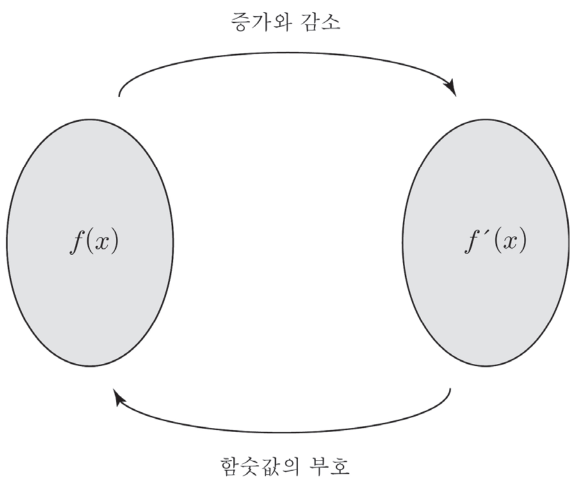
② $f(x) = e^x - x$



③ $f(x) = \ln(2x-1) - 2x$



여기까지 MANUAL 1의 EXPLAIN(설명)이었습니다.
우린, 한층 더 나아가, $f'(x)$의 그래프로 $f(x)$의 그래프를 추론하는 것뿐만 아니라, $f(x)$의 그래프로부터 $f'(x)$의 그래프도 추론할 수 있어야겠죠? 앞서 나온 내용을 정리해서 도식화하면 그림과 같습니다.



$f(x)$의 그래프에선 증가와 감소의 형태를 보고 $f'(x)$의 그래프를 유추할 수 있고,
$f'(x)$의 그래프에선 함숫값의 부호를 보고 $f(x)$의 개형을 유추할 수 있다.

FOCUS를 맞춰야할 부분을 잘 정립하시기 바랍니다.

여기서! 중요한 전제를 짚고 넘어가야 합니다. 이 전제가 나중에 행동방식의 판단 근거가 될 수 있기 때문입니다. EXPLAIN의 예시 도함수들을 보면 모두, 도함수의 식이 그 그래프를 쉽게 알 수 있는 꼴이라는 겁니다. 다항함수를 비롯해 $y=\ln x$, $y=e^x$ 등의 기본 꼴과 그 기본 형태에서 x축, y축 방향으로 평행이동 된 꼴들은 우리가 그 그래프를 교과서에서 배우고, 또 기억해 알고 있는 것들입니다.

예를 들어, $f(x)=e^x+2x^2$의 도함수인 $f'(x)=e^x+4x$의 그래프는 (지수함수 + 다항함수)의 결합 형태이기 때문에 그래프를 바로 떠올리기 쉽지 않습니다. 이러한 상황에 대해서는 다음 MANUAL 2에서 얘기하게 됩니다.

지금, MANUAL 1에선 증감그래프를 그리는 연습을 하는 초기단계이므로 도함수의 그래프를
바로 알 수 있는 식, 또는 문제에서 도함수의 그래프를 바로 알 수 있는 형태들로
EXAMPLE을 보도록 하겠습니다.

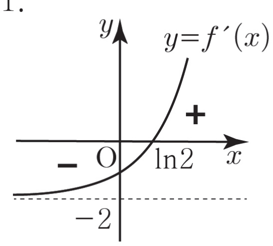
EXAMPLE
No. 1

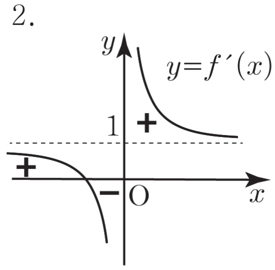
도함수의 부호 파악

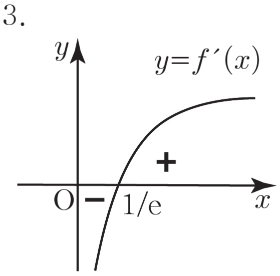
함수 $f(x)$가 다음과 같을 때, 도함수 $f'(x)$의 증감그래프를 그리시오.

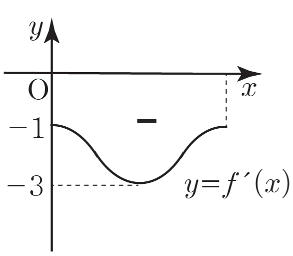
① $f(x)=e^x-2x$
② $f(x)=x+\ln x$
③ $f(x)=x\ln x+2$
④ $f(x)=\sin x-2(x-1)$ $(0\le x\le 2\pi)$
⑤ $f(x)=\sqrt{x^3}-x$

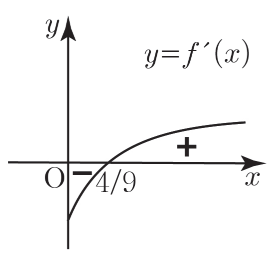
해설

1.


2.


3.


4.


5.


EXAMPLE
No. 2

2007학년도 수능 27번

---

27. 함수 $f(x) = x + \sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록하다.

ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, \pi)$에서 증가한다.

ㄷ. $g'(x) = 1$인 실수 x가 열린구간 $(0, \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설 답 : ⑤

열린구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x) = -\sin x \le 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, \pi)$에서 위로 볼록합니다. (ㄱ) : 참

$f'(x) = 1 + \cos x$는 항상 $1 + \cos x \ge 0$이므로 $f'(f(x))$역시 항상 $f'(f(x)) \ge 0$입니다. 그러므로 $g'(x) = f'(x)f'(f(x)) \ge 0$이고 함수 $g(x)$는 열린구간 $(0, \pi)$에서 증가합니다. (ㄴ) : 참

$g(x)$는 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 연속이고 열린구간 $(0, \pi)$에서 미분가능 합니다. 이 때, 평균값 정리에 의해 $\dfrac{g(\pi) - g(0)}{\pi} = 1 = f'(x)$인 x가 열린구간 $(0, \pi)$에 존재합니다. (ㄷ) : 참

GRAPH EXERCISE

No. 1 ~ No. 56

빠른 정답 : 마지막 페이지

EXERCISE
No. 1

개형과 위치의 파악

1. 함수 $f(x) = ax^2 - e^{ax}$에 대하여 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$의 교점의 개수를 $F(t)$라고 할 때, 함수 $F(t)$는 아래와 같다.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & (t > f(\beta)) \\ 1 & (t = f(\beta)) \\ 2 & (t < f(\beta)) \end{cases}$$

$2\beta = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\beta}$일 때, 점 $(0, f(0))$에서 $f(x)$의 접선의 방정식은 $y = px - q$이다.

pq의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

EXERCISE
No. 1

정답: $\ln 2$

주어진 함수식 $f(x) = ax^2 - e^{ax}$에서 상수 a의 값에 따라 그래프의 개형이 달라지겠죠? 어떤 개형을 가졌을 때, 함수 $g(t)$가 주어진 대로 정의되는지 파악해야 합니다.

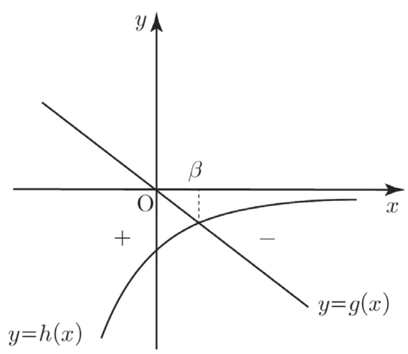
Ⅰ. 개형 파악

도함수를 구하면 $f'(x) = 2ax - ae^{ax}$ 이고 a의 값의 변화에 따라 도함수의 "부호변화"를 관찰해야 하죠. 식의 구조를 보니 차의 함수로 보기 좋습니다. $g(x) = 2ax$, $h(x) = ae^{ax}$라고 하면 $f'(x) = g(x) - h(x)$이고 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$의 위치관계에 따라 $f'(x)$의 부호가 결정됩니다.

$a < 0$일 때)

$g(x)$는 기울기가 음수이므로 감소하고 $h(x)$는 모든 실수에서 음수이므로 x축 아래에 있습니다. 또한 $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$입니다.

다음 그림과 같습니다.



교점의 x좌표를 β라 하면 자연스럽게 두 함수가 제 4사분면에서 교점을 갖는 것을 볼 수 있습니다.

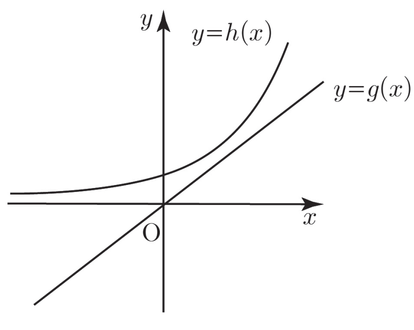
$x < \beta$일 때, $g(x) > h(x)$이므로 $f'(x) > 0$이고 $f(x)$는 증가

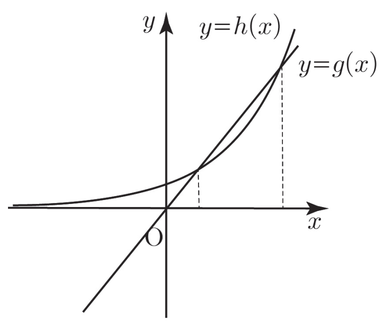
$x > \beta$일 때, $g(x) < h(x)$이므로 $f'(x) < 0$이고 $f(x)$는 감소

합니다. 그러므로 항상 극댓값을 가지는 것을 알 수 있습니다.

$a > 0$일 때)

$g(x)$는 기울기가 양수이므로 증가하고 $h(x)$는 모든 실수에서 양수이므로 x축 위에 있습니다. 또한 $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$입니다. 이 때, $a > 0$인 a값에 따라 위치관계는 다음 두 그림과 같습니다.





첫 번째 그림의 경우 모든 실수 x에서 $g(x) < h(x)$이므로 $f'(x) < 0$이고 $f(x)$는 항상 감소합니다. 그렇다면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=t$와 최대 한 점에서만 만납니다. $F(t)$가 주어진 대로 정의될 수 없겠죠? 두 번째 그림의 경우 두 극점을 가지므로 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=t$와 세 점에서 만나는 t가 존재하므로 $F(t)$가 주어진 대로 정의될 수 없습니다.

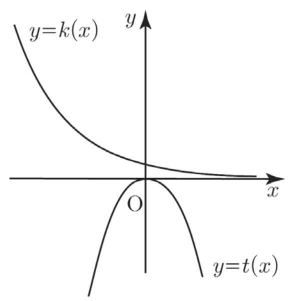
$a=0$일 때)

$f(x)=-1$이므로 $F(t)$가 주어진 대로 정의될 수 없습니다.

Ⅱ. 위치 파악

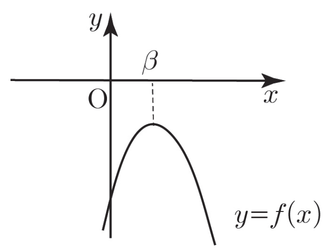
문제의 상황은 $a<0$일 때라는 것을 알았습니다. $a<0$일 때를 한정지어 $f(x)$의 부호를 파악해봅시다. $f(x)=ax^2-e^{ax}$를 차의 함수로 보고 $ax^2=t(x)$, $e^{ax}=k(x)$라고 하면 $f(x)=t(x)-k(x)$입니다. 모든 실수에서 $t(x) \le 0$이고 $k(x)>0$입니다. 또한 $\lim_{x \to \infty} k(x)=0$입니다. $t(x)$와 $k(x)$의 위치관계는 다음 그림과 같습니다.

모든 실수에서 $t(x)<k(x)$이므로 모든 실수에서 $f(x)<0$입니다.

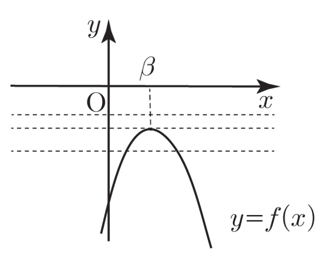


Ⅲ. $f(x)$의 그래프

파악한 모든 내용을 바탕으로 $f(x)$의 그래프를 그리면 다음 그림과 같습니다.



위의 그래프에서 $F(t)$가 주어진 대로 정의 될 수 있죠?



이제 답을 구해봅시다.

점 $(0, f(0))$에서 $f(x)$의 접선의 방정식은 $y = f'(0)x + f(0)$입니다.

$f'(0) = 2a \times 0 - ae^{a \times 0} = -a$

$f(0) = a \times 0 - e^{a \times 0} = -1$이므로

$y = f'(0)x + f(0) = -ax - 1$입니다.

또한 $f'(\beta) = 0$이므로

$2a\beta - ae^{a\beta} = 0$이고

$2\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}$이므로

$2a\beta - ae^{a\beta} = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} - ae^{a\beta} = 0$이고 $a \neq 0$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta} = e^{a\beta}$입니다. 즉, $e^{a} = \frac{1}{2}$이죠.

$a = \ln\frac{1}{2}$입니다.

$y = f'(0)x + f(0) = -ax - 1 = -\ln\frac{1}{2}x - 1 = \ln 2x - 1$이므로

$p = \ln 2, q = 1$입니다.

그러므로 $\therefore\ pq = \ln 2$