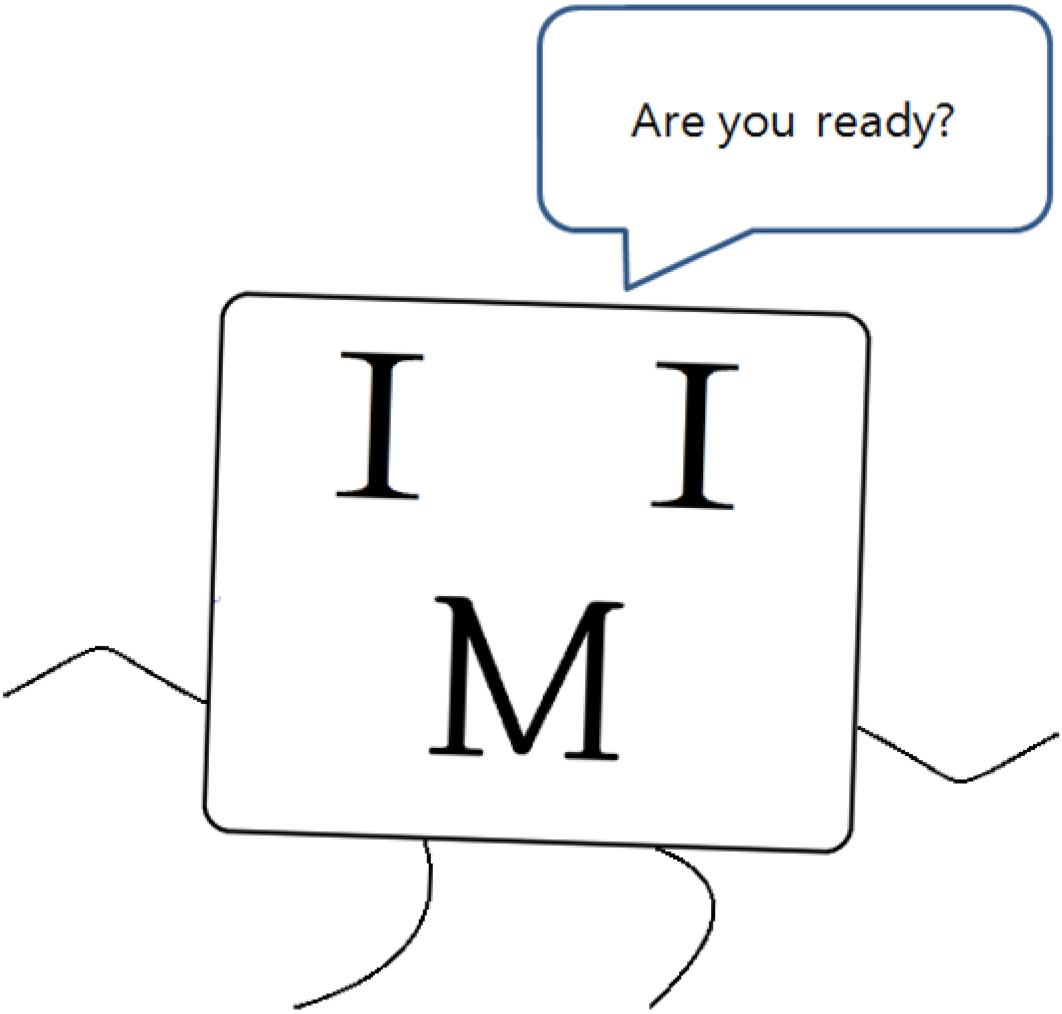


Inessential

Interesting Math Idea

Intuitive

서문

무슨 말을 써야 적당할까 고민했는데 아마 정상적인 머리말은 쓰지 못할 것 같네요.
일단 가장 중요한, 이 책의 identity부터 소개하고자 합니다. 그것이 이 책(이라고 하기에는 보잘 것 없긴 한데)를 유용하게 사용하는데 도움이 될 듯해서...

기본적으로 이 책은 수학 모의고사 1등급, 또는 2등급 이상의 상위권에게 추천 드리는 책입니다. 이유는 내용의 난이도죠. 단원별로 편차가 크긴 하지만, 대체적으로 쉽지 않습니다. 생소하다는 표현이 적절하겠네요.

제목에서도 강조되듯이 이 내용들이 수능에 있어서 꼭 필요한 것이 아닙니다. 또한 다소 직관적인 부분이 있기 때문에 이해가 힘들 수도 있습니다.

수능에 꼭 필요하지 않은데 왜 해야 하냐!

재밌으니까 하죠... 애초에 재미도 뭣도 없는데 제가 왜 이 책을 쓰고 있겠습니까

물론 수학 문제 풀 때 시간 단축이 효과적이라는 장점이 있습니다.
근데 그거는 이 스킬들은 체화해야 좀 가능한 거고(어떤 건 보자마자 체화 가능하긴 해요 ㅎ), 이 책 2회독하면 비킬러 50분 컷 ㅆㄱㄴ? 물어보신다면 아니라고 답하겠습니다. 저도 잘 못해요 그건

수능에 도움이 되려면 실모 푸세요 ㅎㅎ 그게 사실 더 공부에 효과적입니다.

이 책의 존재 의도는 그냥 수능 수학을 잘해야겠다! 가 아니라 수학적 사고를 키우고 싶다!라고 생각하시는 분들께 추천합니다.
논술 수학을 하면 수학적 사고력이 증가해서 실전 상황에서 킬러 풀이에 도전하여 성공할 수 있는 기반이 길러진다 뭐 이런 말이 있잖아요
그거랑 비슷합니다.

말이 번잡하긴 한데 요약하자면
1. 이 책 어렵따 최상위권~상위권이 읽어달라
2. 풀면서 재미를 추구해라 그러다 보면 수학적 사고력이 길러질 것이다
이 두 가지입니다.

머리말 쓰기 귀찮네요. 시작합니다.

2018.12.9.
오르비 ID 테플로탁슬

0. 이 책 구성 및 사용법

잠만요 할말 아직 더 있음

각 단원마다 *문제 미리보기 라는 부분이 있을 거고 그 부분을 통해 이번 단원에서 배우는 ~~야매~~기술을 적용할 수 있는 기출 문제 혹은 자작 문제를 드릴 겁니다.
아직 그 기술을 모른 상태에서 한번 풀어 보세요.

그 다음에 제가 간직해두었던 비급을 전수해 드릴 건데 그 기술을 통해서 *문제 미리보기에 나온 문제들을 직접 풀어드릴 겁니다.

여러분 감탄만 하면 이 기술이 여러분 것으로 체화될 수가 없습니다. 직접 써봐야죠.

그래서 그 단원 끝에는 그 풀이가 적용되는 문제들을 따로 놔둘 겁니다.

제가 그 단원에서 언급한 풀이 방식으로 풀지 않으면 안 풀리는 문제도 있습니다... 일반적인 방법으로 풀려고 하지 마세요

해설은 생략하고 답만 달아둘게요 ㅎ 정말 모르겠다 싶으면 오르비 아이민 789614 닉 테플로 탁슬에게 쪽지 주세요!

사실 해설 쓰다가 힘들어서 죽을지도 몰라서... 책 집필이 이렇게 어려울 줄이야 ㅠㅠ

쨌든 본격적인 내용 이제 시작합니다!

1. 음함수 미분? 편미분!

* 문제 미리보기
솔직히 이번 부분은 자작문제가 필요 없는 챕터입니다.
기출문제만 넣을게요!

7. 곡선 $e^{x}-xe^{y}=y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

➢예상 풀이 시간 20초~30초 ➢2019 수능 가형 7번 문제

11. 곡선 $e^{y}\ln x=2y+1$ 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{e}$

➢예상 풀이 시간 30초~40초 ➢2019 9월 가형 7번 문제

9. 곡선 $e^{x}-e^{y}=y$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $1+\ln(e+1)$ ② $2+\ln(e^{2}+2)$ ③ $3+\ln(e^{3}+3)$
④ $4+\ln(e^{4}+4)$ ⑤ $5+\ln(e^{5}+5)$

➢예상 풀이 시간 30초~40초 ➢2019 6월 가형 9번 문제

솔직히 말하자면 이 단원의 내용은 그렇게 필수적으로 알아야 하는 내용이 아닙니다. 왜냐? 그냥 일반적인 방법으로도 잘 푸니까. ~~사실 제 책 대부분의 내용이 그렇습니다~~

하지만 한번 이 새로운 방법을 쓰게 되면 무척 편하다는 것을 알게 될 겁니다.

방법도 간단하고, 빠르고, 계산 도중 틀릴 가능성도 적어지는 게 아주 개꿀이죠.

어떻게 하는가 하면...

음함수 미분 문제를 대학에서 쓰는 편미분이라는 방법을 통해서 좀 더 계산을 단축하는 방법입니다.

편미분 소개를 먼저 해야겠네요. 어떤 문자 x에 대해서 편미분을 한다는 것은 x를 제외한 다른 모든 변수들을 상수 취급한 채로 x에 대해서만 미분을 한다는 겁니다. 기호로는 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)$정도?

말로 하면 복잡한데 직접 보여드리죠.

$f(x,y)=x^2y+1$이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)=2xy$입니다. x만 미분된거죠.

하나 더

$f(x,y)=x^3y^2+xy+2x+1$이면 $\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)=3x^2y^2+y+2$입니다.

여기서 질문. y에 대해서만 편미분할 수도 있나요?

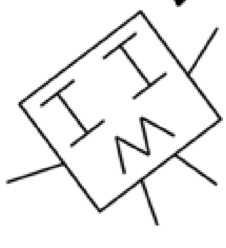
당연하죠!

$f(x,y)=x^3y^2+xy+2x+1$이면 $\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)=2x^3y+x$입니다.

이걸로 어떻게 음함수 문제를 푸느냐...

자 공식 보여드립니다.

➢ $f(x,y)=0$이라는 식에 대해서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)}$이다.



잠만 쫄지 마세요... 이거 간단합니다

직접 풀어보면서 합시다

7. 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $3-e$ ② $2-e$ ③ $1-e$ ④ $-e$ ⑤ $-1-e$

자 이 문제에서 $f(x,y)=0$의 형태로 바꾸면 $e^x - xe^y - y = 0$입니다.

즉 $f(x,y) = e^x - xe^y - y$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{e^x - e^y}{-xe^y - 1} = \dfrac{e^x - e^y}{xe^y + 1}$입니다.

0,1을 대입하면 답은 4번임을 알 수 있죠.

11. 곡선 $e^y \ln x = 2y+1$ 위의 점 $(e,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=ax+b$라 할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $-2e$ ② $-e$ ③ -1 ④ $-\dfrac{2}{e}$ ⑤ $-\dfrac{1}{e}$

저는 이 문제 현장에서 응시할 때
모양 보고 순간 '아 극혐 자연로그 씌워야지'라는 생각이 바로 나서
자연로그 씌워서 정리했습니다. 그러면 $f(x,y) = y + \ln(\ln x) - \ln(2y+1)$가 되므로

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{1-\frac{2}{2y+1}}$이므로 여기에 바로 e,0을 대입해주면 기울기가 나옵니다. $\dfrac{1}{e}$가 기울기죠. 따라서 접선의 방정식이 구해지고 답은 5입니다.

9. 곡선 $e^x - e^y = y$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 기울기가 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $1+\ln(e+1)$ ② $2+\ln(e^2+2)$ ③ $3+\ln(e^3+3)$
④ $4+\ln(e^4+4)$ ⑤ $5+\ln(e^5+5)$

$f(x,y) = e^x - e^y - y$이므로 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\delta}{\delta x}f(x,y)}{\frac{\delta}{\delta y}f(x,y)} = -\dfrac{e^x}{-e^y-1} = \dfrac{e^x}{e^y+1}$이며 따라서

$\dfrac{e^x}{e^y+1}=1$이고 $e^x-e^y=1$이므로 y=1, x=$\ln(e+1)$이므로 답은 1번입니다.

직접 해보시면 빠르다는 게 체감될 겁니다.
물론 체화를 위해서는 노오력이 약간 필요하지만 그나마 체화가 쉬운 기술 중 하나기 때문에 가장 먼저 소개합니다 ㅎㅎ
자 아래 문제 2개로 연습해봅시다

24. 곡선 $2x+x^2y-y^3=2$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

➢예상 풀이 시간 20초~30초 ➢2018 수능 가형 24번 문제

24. 곡선 $5x+xy+y^2=5$ 위의 점 $(1,-1)$에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

➢예상 풀이 시간 20초~30초 ➢2018 9월 가형 24번 문제

다음 챕터로 넘어갈게요.

2. 미분방정식

* 문제 미리보기

21. $\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

➢예상 풀이 시간 3분~5분　　➢2018 4월 가형 21번 문제

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

➢예상 풀이 시간 8분~10분 ➢2016 수능 B형 30번 문제

자 이번에는 킬러급 문제들이라 공간 좀 많이 줬습니다 ㅎㅎ
사실 2019 수능 21번도 아주아주 간단한 형태의 미분방정식 문제입니다
그런데 그건 난이도가 비킬러급이라서...
이 문제입니다.

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x)=\{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

(가)에서 주어진 것이 미분방정식입니다. 딱 봐도 양변 적분하고 싶게 생겼죠?
저런 미분방정식은 너무 풀기가 쉽습니다. 그렇게 풀라는 의도가 보이기에...

아 미분방정식이 뭐냐고요?
어... 사전에 있는 정의를 가져오면 좀 복잡하기 때문에 간단히 말하자면 x, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$...등으로 이루어진 방정식입니다.

제가 정의롭지 못한 사람이라 정의같은 거 엄밀하게는 기억 안하고 삽니다... 게다가 여기서 미분방정식의 정의가 중요한 것도 아니기 때문에 ㅎㅎ 어떻게 푸는가가 중요한거죠!

자 여기 간단한 미분방정식들 보여드립니다.
①$f'(x)=3$ ②$f'(x)=3f(x)$ ③$f'(x)=3(f(x))^2$
다 비슷해 보이는 아이들이랄까... 그죠?
제가 한 번 풀어보겠습니다.
① 이건 뻔하죠? 양변 적분하면 $f(x)=3x+C$(단, C는 적분상수)입니다.
② 잠시 다른 얘기 좀 하죠 ㅎ $f'(x)=f(x)$ 이건 뭘까요?
뭐 이런 형태라면 $f(x)=ke^x$의 꼴임이 짐작 갑니다.
자 이제 $f'(x)=3f(x)$ 요걸 정석적으로 풀어드릴게요. 식을 변형하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=3$으로 나타낼 수가 있습니다. 그런데 여기서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln f(x))'$이네요
따라서 $(\ln f(x))'=3$이므로 ①에 의해서 $\ln f(x)=3x+C$입니다.
즉 $f(x)=e^{3x+C}$입니다.
③ 이것도 비슷하게 변형하면 풀립니다. $-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}=-3$로 변형하면 $(\frac{1}{f(x)})'=-3$임을

알 수 있고 따라서 $f(x)=\dfrac{1}{-3x+C}$ 입니다.

이런 게 바로 미분방정식입니다.
워밍업은 끝난 것 같네요. 사실 고교 과정에서 미분방정식를 정식적으로 배우는 것이 아니기에 직접적으로 미분방정식과 관련된 문제를 내려면 저 위의 문제처럼 대놓고 묻는 바를 드러내거나 미분방정식 풀이가 아닌 다른 풀이가 존재하는 경우가 대부분입니다.

하지만 미분방정식 풀이가 재밌거든요 ^^

21. $\dfrac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g'(2)=-\dfrac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\dfrac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\dfrac{5}{2}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이거 한번 $f(x)$를 구해 봅시다! 양변을 변형하면 $x^3(f(x))^2f'(x)+x^2(f(x))^3=1$입니다.
양변에 3을 곱하면 $3x^3(f(x))^2f'(x)+3x^2(f(x))^3=3$입니다.
어! 하시는 분들이 계셨으면 ㅎㅎ... 이제 다 좌우변 적분해 버리면 되거든요
양변 적분하면 $x^3(f(x))^3=3x+C$가 됩니다. 물론 C는 적분상수
$f(1)=2$니까 $C=5$입니다. 따라서 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x+5}}{x}$임을 알 수 있습니다.
문제 보니까 $g(x)$ 얘기만 엄청 하고 있네요 그럼 x에다 $g(x)$ 넣어버립시다
$x^3(g(x))^3=3g(x)+5$ 가 되네요
???? 이거 ㄴ 보기 아닙니까
변형하면 ㄴ이 되네요 ㄴ은 옳은 선지임을 알 수 있습니다!

나머지 선지는 스스로 해주세요! 귀찮아서 그러는 겁니다... ㅎㅎㅎ
ㄱ은 식에 대입하면 나올 것이고 ㄷ은 사잇값 정리 쓰시면 되죠

30. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

얘도 풀겠습니다

(나) 조건 정리를 해볼게요... 양변 미분하면 $f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$이므로 $f(x)=2$이거나 $\frac{f'(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}=1$임을 알 수 있습니다. 이 상태에서 잘 만져주면 $\frac{-2f'(x)}{2\sqrt{4-2f(x)}}=-1$입니다.

자 이러면 양변 적분 가능하죠? $\sqrt{4-2f(x)}=-x+C$가 됩니다! 또한 $f(0)=0$임을 (나) 조건에서 확인할 수 있습니다.

즉 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$이거나 $f(x)=2$임이 나왔습니다! $f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$이므로 $f'(x)$는 언제나 양수거나 0입니다.

따라서 $x<2$일 때 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$이고 $x \ge 2$일 때 $f(x)=2$입니다.

이제 적분해서 푸십쇼 ㅎ

미분방정식이 교육과정에 있진 않지만, 그 개념이 들어간 문제들은 정말 정말 많습니다!

교육과정에 나온 방식대로 풀어도 문제없지만, 미분방정식 풀이도 알아두면 유용하다는 거 다시 한 번 강조할게요!

다음 쪽에 있는 문제들로 연습해 봅시다!

(참고로 연습용 문제라서 제 자작문제는 괴랄할 수도 있어요)

정의역이 $x > 0$인 미분 가능한 함수 $y = f(x)$위의 점 P$(t, f(t))$에서 접하는 접선이 있다. 그 접선의 y절편이 $t\cos(\ln t)$으로 표현된다. $y = f(x)$는 $(e^{\pi}, 0)$을 지난다. 이때 $f(x)$를 구하시오.

➢예상 풀이 시간 3분　　　　　　➢테플로탁슬 자작문제

모든 실수에서 정의된 미분 가능한 함수 $y = f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $2f'(x) = f(x) - \dfrac{2}{f(x)}$

(나)$f(2) = \sqrt{3}$

이때 $f(x)$를 구하시오.

➢예상 풀이 시간 2분　　　　　　➢테플로탁슬 자작문제(교육청 기출 변형)

다음 챕터로 넘어갑니다!