

$$1. \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

2.

직선의 방정식 $= t$ 라 하면 직선 위의 점 (x, y, z) 는 $(2t, t, t+1)$ 로 표현된다. 평면의 방정식에 이를 대입하면 $t=1$ 이므로 $(a, b, c) = (2, 1, 2) \therefore a+b+c=5$

3.

오른쪽 3개의 점 중 위의 두 점을 이어 삼각형을 만들고, 삼각형 위의 세 점 중 한 점을 골라 연결되지 않은 나머지 두 점과 이으면 되므로 3가지이다.

4.

음함수의 미분법에 의해 $3x^2 + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = 0$ 이고,

$x=1, y=-3$ 을 대입하면 $3-6 + \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1, y=-3} = 0$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1, y=-3} = 3$$

5.

$y' = 2x\sqrt{x^2+1}$ 이고, 곡선의 길이는 $\int_3^6 \sqrt{1+(y')^2} dx$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_3^6 \sqrt{1+4x^2(x^2+1)} dx &= \int_3^6 \sqrt{4x^4+4x^2+1} dx = \int_3^6 (2x^2+1) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + x \right]_3^6 = \frac{2}{3}(216-27) + (6-3) = 129 \end{aligned}$$

6.

일차변환 f 를 나타내는 행렬을 X 라 할 때,

$$X \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{이므로, } X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이고}$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로 } X^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{이다.}$$

$$(2, -1) \text{과 } (1, -2) \text{사이의 거리를 구하면 } \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

7. (B에 관한 식) - (A에 관한 식)을 해주면

$$\frac{2}{10} = \frac{2}{3} \log \frac{X_b}{X_a} \text{ 이므로 } \frac{3}{10} = \log \frac{X_b}{X_a}, \quad \frac{X_b}{X_a} = 10^{\frac{3}{10}}$$

8. 조건부 확률에 의해

$$\frac{(A \text{과속})(B \text{과속안함})}{(A \text{과속})(B \text{과속안함}) + (A \text{과속안함})(B \text{과속})} = \frac{\frac{2}{100} \frac{99}{100}}{\frac{2}{100} \frac{99}{100} + \frac{98}{100} \frac{1}{100}} = \frac{\frac{99}{100}}{\frac{99}{100} + \frac{49}{100}} = \frac{99}{148}$$

9.

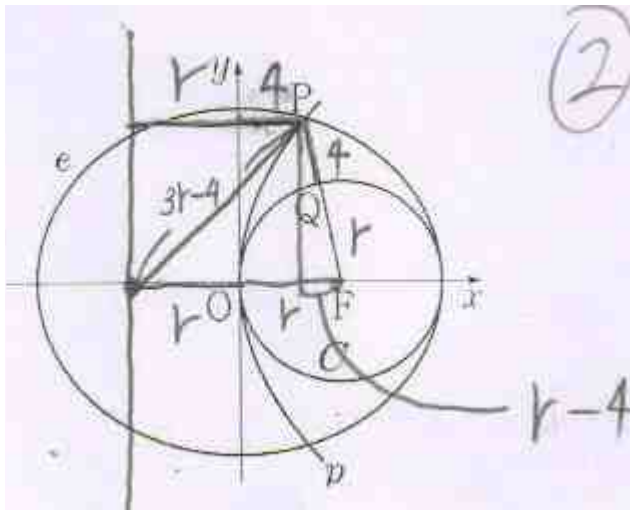
3개의 항목에서 중복을 허락하여 7자루를 고르면

$${}_3H_7 = \frac{9!}{7!2!} = 36$$

10.

$$\pi \int_{\ln \frac{\pi}{2}}^{\ln \pi} y^2 dx = \pi \int_{\ln \frac{\pi}{2}}^{\ln \pi} \sin(e^x) e^x dx = \pi [-\cos(e^x)]_{\ln \frac{\pi}{2}}^{\ln \pi} = \pi$$

11.



$$\begin{aligned} (3r-4)^2 - (r+4)^2 &= (r+4)^2 - (r-4)^2 \\ 4r(2r-8) &= 2r(8) \\ r-4 &= 2 \quad \therefore r=6 \\ \therefore \text{초점거리} &= 2r = 12 \end{aligned}$$

12.

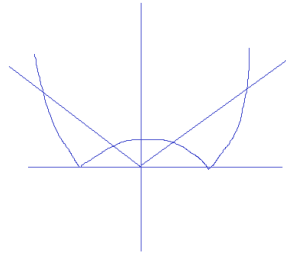
$$\hat{p} - 1.6 \sqrt{\frac{\frac{8}{10} \frac{2}{10}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.6 \sqrt{\frac{\frac{8}{10} \frac{2}{10}}{n}} \text{ 에서}$$

$$1.6 \sqrt{\frac{\frac{8}{10} \frac{2}{10}}{n}} \leq p - \hat{p} \leq 1.6 \sqrt{\frac{\frac{8}{10} \frac{2}{10}}{n}} \text{ 이고, 절댓값을 씌우면}$$

$$|p - \hat{p}| \leq 1.6 \sqrt{\frac{\frac{8}{10} \frac{2}{10}}{n}} = \frac{16}{10} \frac{4}{10} \sqrt{\frac{1}{n}} \leq \frac{4}{100} \text{ 따라서, } n \geq (16)^2 = 256$$

13.

좌변과 우변의 교점은 오른쪽 그림과 같이 4개이고, 무연근이 없으므로 주어진 방정식의 해의 개수는 4개이다.

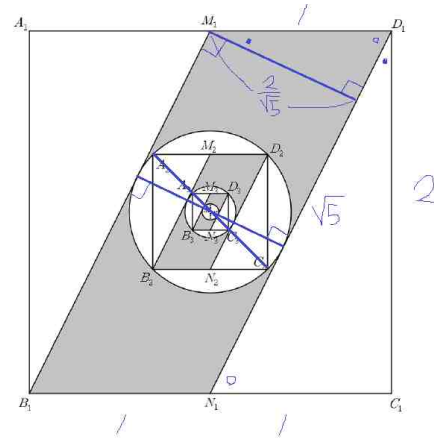


14.

$$\text{초항} = (M_1B_1N_1D_1 \text{의 넓이}) = (O_1 \text{의 넓이}) = 2 - \frac{\pi}{5}$$

$$\text{공비} = \left(\frac{A_2B_2C_2D_2 \text{의 대각선 길이} = O_1 \text{의 지름}}{A_1B_1C_1D_1 \text{의 대각선 길이}} \right)^2 = \frac{1}{10}$$

$$\therefore \frac{a}{1-r} = \frac{2 - \frac{\pi}{5}}{\frac{9}{10}} = \frac{2}{9}(10 - \pi)$$



15. $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OP}$ 에서 $\overrightarrow{CO}$ 는 정해진 벡터이므로 종점이 변하는 $\overrightarrow{OP}$ 가 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 값을 결정한다.

내적값이 최소하려면 $\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{AB}$ 의 방향이 반대여야 하므로

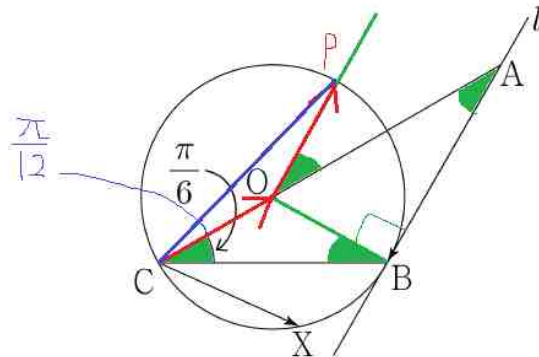
그림과 같이 $\overrightarrow{OP}$ 는 선분 AB 와 평행하며 원의 위쪽 부분을 향해야 한다.

삼각형 OCB 는 이등변이므로 각 OBC 도

$\frac{\pi}{6}$ 이고, 삼각형 ACB 에서 내각의 합이 π 이므로

각 CAB 는 $\frac{\pi}{6}$ 이다. 각 POA 는 각 CAB 와 엇각 관계이므로 $\frac{\pi}{6}$ 이고,

각 PCO 는 중심각 POA 의 반값이므로 $\frac{\pi}{12}$ 이다.



16.

ㄱ. 좌측 조건식에서 $(A - E)(B - E) = 2E$ 이므로 참.

ㄴ. ㄱ에서 $(B - E)(A - E) = (A - E)(B - E)$ 이므로 $AB = BA$

$AB = A + B + E$ 를 우측 조건식에 대입하면 참.

ㄷ. ㄴ에서 $A - 2B = E$ 라고 했으므로 $2B^{-1} - A^{-1} = A - 2B = E$

A^{-1}, B^{-1} 에 관한 식을 A, B 에 관한 식으로 바꾸기 위해

A, B 를 곱해주면 $A(2B^{-1} - A^{-1})B = 2A - B = AB$ 이고

이는 우측 조건식과 동일한 식이므로 참.

(나) 조건은 방정식 $f'(x)=6$ 의 해가 2개 존재한다는 말과 동치이므로

방정식 $f'(x) - 6 = 3x^2 + 2ax + b - 6 = 0$ 에서

판별식 $D/4 = a^2 - 3(b-6) > 0$ 이다. $b < \frac{1}{3}a^2 + 6$ 이므로

$b < \frac{1}{3}a^2 + 6$, $0 < a < 3$, $b > 3$ 을 만족하는 (a, b) 의 영역의 넓이는

$$\int_0^3 (\frac{1}{3}a^2 + 6)da - 9 = 12$$

18.

구 C 에 포함된 AB 를 지름으로 하는 원의

정사영의 넓이가 원래 넓이의 $\frac{3}{5}$ 이므로,

원과 yz 평면이 이루는 이면각의 $\cos$ 값은 $\frac{3}{5}$ 이다.

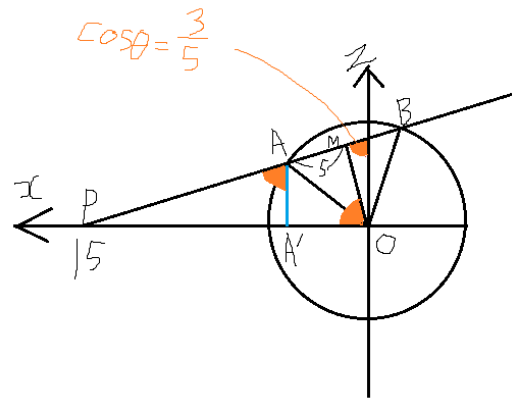
AB 의 중점 M , 점 P , 원점 O 에 대해서
삼각형 POM 에서 PO 의 길이가 15이므로

3:4:5 비율에 의해 PM 의 길이는 12이고,

$AM=5$ 이므로 $PA=7$ 이다.

문제에서 구하라고 한 값은 A 와 A 를 xy 평면에 내린 정사영 A' 을 반지름으로 하는 원의 둘레의

길이이므로, $2\pi\overline{AA'} = 2(7 \times \frac{3}{5})\pi = \frac{42}{5}\pi$



19.

간단한 대입을 통해 (가)= n , (나)= $\frac{2}{n+1}$ 임을 알 수 있고

(나)에 관한 식 $a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_n$ 에서

$$a_n = \frac{2}{n} a_{n-1} = \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} a_{n-2} = \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \frac{2}{n-2} a_{n-3} = \dots$$

$$= \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \frac{2}{n-2} \dots \frac{2}{n-(n-2)} a_2 = \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \frac{2}{n-2} \dots \frac{2}{n-(n-2)} \frac{2}{1} = \frac{2^n}{n!}$$

따라서 (다) = 2^n , 준식 = $16 \times \frac{2}{16} \times 2^{16} = 2^{17}$

22. $\cos 2\theta = \frac{1}{3} = 1 - 2\sin^2\theta$ 이므로 $60\sin^2\theta = 20$

23.

$$\frac{3(x-4)}{(x-2)(x-8)} \leq 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x-4)(x-8) \leq 0 \quad (x \neq 2, 8)$$

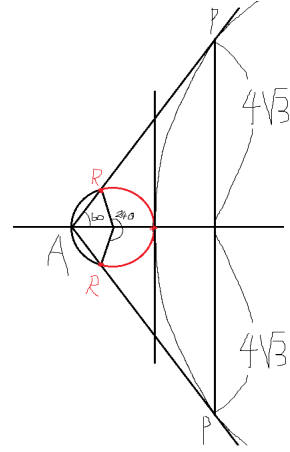
$$x = 1, 4, 5, 6, 7 \circ \mid \text{므로 } 1 + 4 + 5 + 6 + 7 = 23$$

24. $A(2,3), B(3,3), C(2,4)$ 에 대해 $f(A) = B, f(B) = C$ 이므로
 $f(2A + 2B) = 2f(A) + f(B) = 2(B + C) = (10, 14)$ 이므로 $a + b = 24$

25.

그림과 같이 P 의 x 좌표가 2일 때 OAP 의 각이
 60° 로 최대가 된다. 중심각과 원주각의 관계에
 의해 위쪽 R , 원점 O , 아래쪽 R 이 이루는 중심각은
 240° 이므로 R 이 그리는 도형의 길이는 $\frac{4}{3}\pi$ 이다.

따라서 $k = 4$



26. OA 와 x 축이 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 이므로, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi - \theta$

$OA = 4$ 이고, 사인법칙에 의해 $AB = 8\sin(\frac{5}{6}\pi - \theta)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{8\sin(\frac{5}{6}\pi - \theta) - 4}{\theta} \right)^2 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{8\sin\frac{5}{6}\pi\cos\theta + 8\cos\frac{5}{6}\pi\sin\theta - 4}{\theta} \right)^2 \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{4\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta - 4}{\theta} \right)^2 = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta - 4}{\theta} \right)^2 \\ &= \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{3}\sin\theta}{\theta} \right)^2 = 48 \end{aligned}$$

27. $\int_0^b ax^2 dx = 1$ 에서 $ab^3 = 3$ 이고, $\int_0^b ax^3 dx = 1$ 에서 $\frac{1}{4}ab^4 = \frac{3}{4}b = 1$ 이므로 $b = \frac{4}{3}$

$$V(X) = \int_0^b ax^4 dx - 1 = \frac{1}{5}ab^5 - 1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{15} \quad \text{따라서 } 15 + 1 = 16$$

$$28. \int_a^{2a} \frac{\{f(2x)+2\}^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \left[\{f(2x)+2\}^{\frac{3}{2}} \times \frac{-1}{x} \right]_a^{2a} + 3 \int_a^{2a} \sqrt{f(2x)+2} f'(2x) \frac{1}{x} dx$$

앞의 식을 계산해주기 위해 $f(4a)$ 의 값을 구하기 위해 $\sqrt{f(2x)+2}=f(x)$ 에

2a를 대입하면 $\sqrt{f(4a)+2}=2$ 이므로 $f(4a)=2$, 따라서 앞의 식은 $-\frac{8}{2a}+\frac{8}{a}=\frac{4}{a}$

뒤의 식을 간단히 하기 위해 조건을 활용하면, 조건에 의해 $\sqrt{f(2x)+2}=f(x)$ 이고,

$f'(2x)$ 를 $f(x)$ 혹은 $f'(x)$ 에 관한 식으로 고치기 위해 $\sqrt{f(2x)+2}=f(x)$ 를 양변 제곱 후 미분하면 $f(x)f'(x)=f'(2x)$ 이다.

따라서, 준식 = $\frac{4}{a} + \int_a^{2a} 3\{f(x)\}^2 f'(x) \frac{1}{x} dx$ 이고, $g(x) = 3\{f(x)\}^2 f'(x)$ 이므로 뒤의 정적분식은

$\int_a^{2a} \frac{g(x)}{x} dx$ 와 같다. 따라서 준식 = $\frac{4}{a} + k$ 이므로 $4 + 1 = 5$

29.

삼각형 $BB'D$ 에서

$$153 - x^2 = 169 - (x + 2)^2$$

이므로 $x = 3, y = 12$

삼각형 ABC 에서 피타고라스

정리에 의해 $BC=13$

또, 삼각형 $BB'C$ 에서 피타고라스

정리에 의해 $B'C = 5$

BDC 는 이등변 삼각형,

그리고 BDC 의 정사영인 $B'CD$ 도

이등변 삼각형이므로

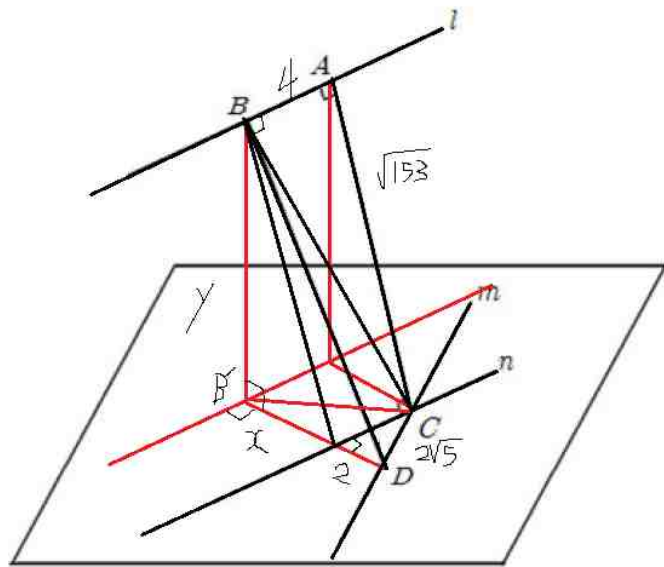
CD 의 중점 M 에 대해

BM 과 $B'M$ 을 그어주면

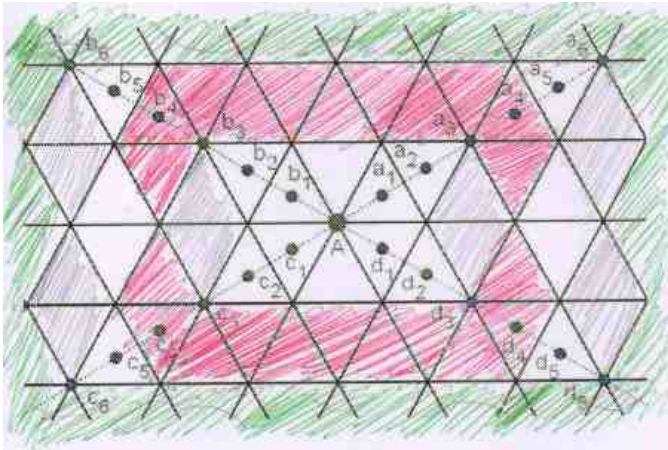
삼수선의 정리에 의해

BB' 과 $B'M$ 이 수직임을 알 수 있다.

$$\tan \theta = \frac{BB'}{B'M} = \frac{12}{2\sqrt{5}} \text{ 이므로 } 5 \tan^2 \theta = 36$$



30.



$$e_{3n} - e_{3n+1} = x_n = 2 \times 2n$$

$$e_{3n+1} - e_{3n} = y_n = 2 \times (2n + 3 \times (2n+1))$$

x_n 이 까만 색이고

y_n 이 빨 → 조입니다.

x_n 은 쉬냐?

$$y_n = x_n + \left(\text{위아래 매듭} \right) \text{인데}$$



이렇게 3개씩
헤아리면 쉽게 셀 수 있습니다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 4 \text{ 이므로 } 10 \times 4 = 40$$