작성자 : 나카렌

$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ 형태의 점화식에 관하여

1. 시작하며

이 글에서 살펴보고자 하는 점화식은 a_{n+2}, a_{n+1}, a_n의 실수배의 합만으로 좌변이 구성되어 있고, 우변이 0인 점화식입니다. 그런데 이러한 형태의 점화식은 조금 복잡하니까, 좀 더 간단한 형태의 점화식부터 차근차근 살펴보겠습니다. 바로, a_{n+1}과 a_n의 실수배의 합이 0인 꼴의 점화식입니다.

바로 $pa_{n+1}+qa_n=0$이겠지요. 이 때, p는 0이 아니라고 가정하여도 됩니다.(만약 0이라면, 너무 간단하지요) 그러므로 이는 $a_{n+1}-ra_n=0$이라는 형태로 쓸 수 있습니다.(이 때에도, r은 0이 아니라고 가정하겠습니다. 0인 경우 또한 아주 간단한 경우이기 때문입니다) 이제, 조금 **다른 방법**으로 이 점화식을 살펴보고자 합니다. 보통은 첫 항 a_1의 값을 준 뒤 a_n을 찾고자 하겠지요. 그렇지만 여기서는 **우선은 초항 a_1을 생각하지 않겠습니다.** 대신, 순수하게 **이 점화식을 만족하는 수열들이 어떤 성질을 가지는지** 살펴보겠습니다.

왜 이렇게 생각할까요? 그 단서는, 부정적분에 있습니다. $f(x)$의 부정적분은 애석하게도 한 개가 아닙니다. 그래서 우리는 $f(x)$의 부정적분을 **모두** 구해 보고 싶습니다. 어떻게 하면 될까요?

여기서 사고의 전환이 일어납니다. 하나씩 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것이 아니라, **$f(x)$의 부정적분이라면 어떠한 성질을 가지는지, 수많은 부정적분들이 어떤 성질을 가지는지** 살펴보자는 겁니다. $f(x)$의 부정적분 두 개를 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하겠습니다. 그러면,

$$\{F(x)-G(x)\}'=f(x)-f(x)=0$$

입니다. 그런데 평균값의 정리에 의하여 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로,

$$F(x)-G(x)=C$$

즉 $f(x)$의 부정적분들끼리는 상수항만 차이가 난다는 것을 알 수 있습니다. 그렇기 때문에, $f(x)$의 부정적분 하나만 구하면, 사실상 우리는 $f(x)$의 부정적분을 모두 구한 것입니다.(나머지 부정적분들은 $f(x)$ 더하기 상수일 테니까요)

위와 같은 **'사고방식'**이 부정적분뿐만 아니라 점화식에서도 유용할지도 모르기 때문에, 한번 시도해 보자는 것입니다. 글을 읽어 보시면 아시겠지만, 실제로 유용한 사고방식이었습니다.

2. 점화식 $a_{n+1}-ra_n=0$에서 생각해 보기 : 가능한 수열은 얼마나 많을까?

이제 시작합니다. 우선, 이 점화식을 만족하는 두 수열 f_n, g_n이 있고, **두 수열 중 하나가 다른 것의 실수배로 표현되지 않는다**[1]고 가정해 봅시다.

그러면, 모든 자연수 n에 대해서 2차원 벡터 $(f_n,\ g_n)$과 $(f_{n+1},\ g_{n+1})$은 평행하지 않게 됩니다. 이에서 뭔가 알 수 있는 것이 있을까요? 이제부터, 수학 1에서 배운 행렬과 기하와 벡터에서 배운 벡터를 '통합'해서, 새로운 것을 알아내어 보겠습니다.(사실, 기하와 벡터에 나오는 '일차변환'은 이러한 방법의 '예고편'입니다)

---

1) 말이 조금 길지요? 이를 대학교 수학에서는 일차독립이라는 용어를 써서, '두 수열은 일차독립이다'이라고 이야기합니다.

우선, xy평면 위의 두 직선

$$xf_n + yg_n = c_0,\ xf_{n+1} + yg_{n+1} = c_1$$

을 생각해 봅시다. 이 두 직선의 "법선벡터"는 각각

$$(f_n,\ g_n),\ (f_{n+1},\ g_{n+1})$$

이고, 서로 평행하지 않습니다. 따라서, 두 직선은 평행하거나 일치하지 않습니다.[2] 그렇다면, 연립방정식

$$\begin{cases} xf_n + yg_n = c_0 \\ xf_{n+1} + yg_{n+1} = c_1 \end{cases}$$

은 단 하나의 해를 가집니다. 이 연립방정식을 행렬로 표현한 것을 생각하면, 행렬 $\begin{pmatrix} f_n & g_n \\ f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix}$은 역행렬을 갖는다는 것을 알 수 있고, 이에서

$$f_n g_{n+1} - g_n f_{n+1} \neq 0$$

를 얻을 수 있습니다. 그런데, f_n과 g_n은 모두 점화식 $a_{n+1} - ra_n = 0$을 만족합니다. 따라서 $f_{n+1} = rf_n,\ g_{n+1} = rg_n$이고, $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{g_{n+1}}{g_n}$이고, 최종적으로

$$f_n g_{n+1} - g_n f_{n+1} = 0$$

입니다. 그런데 이는 위에서 얻은 결과와 모순됩니다. 결국, 최초의 가정인 **두 수열 중 하나가 다른 것의 실수배가 되지 않는다는 것이 거짓**이라는 것임을 귀류법에서 알 수 있습니다.

위와 같은 과정에서, 점화식 $a_{n+1} - ra_n = 0$를 만족하는 수열들끼리는 서로 실수배 관계에 있다는 것, 점화식 $a_{n+1} - ra_n = 0$를 만족하는 수열 하나만 찾으면, 이 점화식을 만족하는 수열을 모두 찾을 수 있다는 것을 알 수 있습니다.[3] 점화식을 잘 들여다보면, 이 점화식을 만족하는 수열 하나는 쉽게 찾을 수 있습니다. 바로 $a_n = r^n$이고, 따라서 점화식 $a_{n+1} - ra_n = 0$를 만족하는 수열은 임의의 상수 C를 도입하여 $a_n = Cr^n = (Cr)r^{n-1}$ 형태라는 것을 알 수 있습니다.

이제, 첫 항 a_1의 값이 주어진다면 이를 만족하는 수열은 어떻게 구할 수 있을까요? 간단합니다. $a_1 = Cr^1$를 만족하는 상수 C를 찾으면 됩니다. 처음에, $r \neq 0$이라고 하였으므로, $a_1 = Cr^1$를 만족하는 C는 항상 찾을 수 있습니다.

3. 점화식 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$에서 생각해 보기 : 가능한 수열은 얼마나 많을까?

이제, 이러한 방식으로 점화식 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$에 대해서도 생각해 봅시다. 위에서는 '항이 2개'였고 여기서는 '항이 3개'이니까, 이 점화식을 만족하는 수열 $f_n,\ g_n,\ h_n$이 있고, **세 수열 중 하나가 다른 두 수열의 실수배의 합으로 표현되지 않는다**고 가정해 봅시다.[4] 그러면 세 벡터 $(f_n,\ g_n,\ h_n)$, $(f_{n+1},\ g_{n+1},\ h_{n+1})$, $(f_{n+2},\ g_{n+2},\ h_{n+2})$ 중 하나는 다른

---

2) 위와 같이 벡터 개념을 이용하여 보일 수 있고, 벡터 개념을 이용하지 않아도 두 수열 중 하나가 다른 것의 실수배로 표현되지 않는다는 것에서 알 수 있습니다.

3) 덧붙이자면, 점화식을 만족하는 수열의 집합의 '차원'이 1이라는 의미, 그 집합에는 '독립적인 것'이 한 개 있다는 의미입니다. 이러한 의미는 대학교 수학에서 좀 더 구체적이고 명확하게 배우게 됩니다.

두 벡터의 실수배의 합(일차결합)으로 표현되지 않습니다.5)

그런 다음, 이번에도 세 개의 평면의 방정식

$$xf_n + yg_n + zh_n = c_0,\ xf_{n+1} + yg_{n+1} + zh_{n+1} = c_1,\ xf_{n+2} + yg_{n+2} + zh_{n+2} = c_2$$

을 생각할 수 있습니다. 이번에도 각각의 법선벡터는 위의 세 벡터들입니다. 그리고 연립방정식

$$\begin{cases} xf_n + yg_n + zh_n = c_0 \\ xf_{n+1} + yg_{n+1} + zh_{n+1} = c_1 \\ xf_{n+2} + yg_{n+2} + zh_{n+2} = c_2 \end{cases}$$

을 생각할 수 있습니다.

이 때에도, 연립방정식은 단 하나의 해를 가짐이 **알려져 있습니다.**(이는, 고등 학교 과정에서 증명할 수 없거나 보이기 힘든 것을 이야기합니다.6)) 그런데 위의 연립방정식은

$$\begin{pmatrix} f_n & g_n & h_n \\ f_{n+1} & g_{n+1} & h_{n+1} \\ f_{n+2} & g_{n+2} & h_{n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

의 형태로 쓸 수 있으므로, 미지수가 2개인 연립일차방정식의 경우와 마찬가지로 행렬

$$\begin{pmatrix} f_n & g_n & h_n \\ f_{n+1} & g_{n+1} & h_{n+1} \\ f_{n+2} & g_{n+2} & h_{n+2} \end{pmatrix}$$

가 역행렬을 **가진다는 것이 알려져 있습니다.** 그런데, 이번에도 2절의 경우와 마찬가지로 f_n, g_n, h_n이 점화식 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$을 만족한다는 것과 위의 행렬이 역행렬을 가진다는 것이 모순이 됩니다.7)(이것도 고등 학교 과정에서는 보이기 힘듭니다. 보이려면, 3

---

4) 수열이 세 개가 되면서, 말이 조금 더 길어졌습니다. 마찬가지로, 대학교 수학에서는 간단하게 '세 수열이 일차독립이다'라고만 하면 됩니다. 수학이란, 어느 정도는 단어 공부이기도 합니다.

5) 세 벡터 중 한 벡터가 다른 두 벡터의 실수배의 합으로 표현되지 않는다는 것은, 세 벡터를 위치벡터로 보았을 때 세 위치벡터가 가리키는 점이 원점을 포함하는 한 평면 위에 있지 않다는 것을 의미합니다.

만약 위의 세 벡터 중 한 벡터가 다른 두 벡터의 실수배의 합으로 나타난다면, 점 $(f_{n,}\, g_{n,}\, h_n)$, $(f_{n+1,}\, g_{n+1,}\, h_{n+1})$, $(f_{n+2,}\, g_{n+2,}\, h_{n+2})$과 원점을 포함하는 평면의 방정식 $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$이 존재하고, 이는 세 수열 중 한 수열이 다른 두 수열의 실수배의 합으로 표현되지 않는다는 것과 모순이 됩니다. 이에서, 위의 세 벡터 중 한 벡터가 다른 두 벡터의 실수배의 합으로 표현되지 않음을 알 수 있습니다.

6) 이를 **'연립방정식의 관점'**에서 다음과 같이 대략적으로 설명할 수 있습니다. 미지수가 3개인 연립일차방정식이 있을 때, x, y, z의 계수들의 비가 세 개의 방정식에서 일치한다면, $u = ax + by + cz$, $v = a'x + b'y + c'z$로 치환하여 세 개의 방정식을 **두 개의 미지수** u, v에 대하여 표현할 수 있습니다. 간단하게 치환하려면, x는 그대로 두고, $w = ay + bz$로 두면 세 개의 방정식을 **두 개의 미지수** x, w에 대하여 표현하면 됩니다. 결국 미지수가 2개이면서 방정식이 3개 주어진 경우가 되어 연립방정식을 만족하는 해가 존재할 수도 있고, 존재하지 않을 수도 있습니다. 위에서 세 수열 중 하나가 다른 두 수열의 실수배의 합으로 표현되지 않는다고 한 것은, 위의 연립방정식에서 이와 같은 일이 일어나는 것을 방지해 줍니다. 결국 미지수가 3개이고, 방정식이 3개인 '좋은' 형태의 연립일차방정식이 되어서, 단 하나의 해가 존재하게 됩니다.

'법선벡터와 평면의 관점'으로 보면, 세 개의 법선벡터들이 '제각기 독립적인 세 개의 방향'을 가리키므로, 세 평면 중 두 평면 이상이 평행한 경우, 세 평면이 한 직선을 공유하는 경우, 세 평면 중 두 평면의 쌍이 반드시 직선을 공유하지만 이러한 방식으로 생성되는 세 개의 직선이 일치하지 않는 경우는 제외됩니다. 그러면, 세 평면은 한 점에서 만날 수밖에 없습니다.

'벡터의 관점'에서, $x(f_{n,}\, f_{n+1,}\, f_{n+2}) + y(g_{n,}\, g_{n+1,}\, g_{n+2}) + z(h_n,\, h_{n+1,}\, h_{n+2}) = (c_{0,}\, c_{1,}\, c_2)$이라고 보는 방법이 있으나, 이 방법을 통하여 위의 연립방정식이 단 하나의 해를 가짐을 설명하려면 추가적인 개념이 필요합니다.

7) 이번에도 **'연립방정식의 관점'**에서 다음과 같이 대략적으로 설명할 수 있습니다. 세 수열 f_n, g_n, h_n이 점화식 $pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n = 0$을 만족하면, 위의 연립방정식에서 첫 번째 방정식과 두 번째 방정식에 적절히 실수를 곱한 뒤 더하거나 빼 주면 세 번째 방정식이 됩니다. 결국 세 번째 방정식은 없는 것과 마찬가지가 되어,

차 이상의 정사각행렬에 관하여 조금 더 배워야 합니다.) 따라서, 처음의 가정이었던 **세 수열 중 하나가 다른 두 수열의 실수배의 합으로 표현되지 않는다**는 것이 거짓이 됩니다.

위와 같은 과정에서, 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$를 만족하는 수열들 세 개 이상을 생각한다면 이 중 하나는 다른 수열들의 실수배의 합(일차결합)이라는 것, 점화식 $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$를 만족하는 수열 두 개만 찾으면, 이 점화식을 만족하는 수열을 모두 찾을 수 있다는 것을 알 수 있습니다.(단, 그 두 개의 수열이 서로 실수배 관계에 있으면 안 됩니다)[8)]

이 때, 주어진 점화식의 양변을 p로 나누어서, 다음과 같은 형태가 되었다고 해 봅시다.

$$a_{n+2}-(s+t)a_{n+1}+(st)a_n=0$$

여기서의 s, t가 $px^2+qx+r=0$의 두 근이라는 것 또한 쉽게 알 수 있을 겁니다. 이 때, 두 근 s, t가 같지 않은 경우를 생각해 봅시다.[9)][10)] 그러면, 위의 점화식은 아래와 같은 방법으로 변형할 수 있습니다.

$$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$$

만약, $a_{n+1}-sa_n=0$이 항상 성립한다면, 위의 점화식도 성립합니다. 결국, $a_n=s^n$이 점화식 $a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)$을 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

그런데, 점화식 $a_{n+2}-(s+t)a_{n+1}+(st)a_n=0$은 다음과 같은 방법으로도 변형할 수 있습니다.

$$a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)$$

이 때에도 **만약 $a_{n+1}-ta_n=0$이 항상 성립한다면**, 위의 점화식도 성립합니다. 역시 $a_n=t^n$이 점화식 $a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)$을 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

위에서 살펴본 대로, 점화식 $a_{n+2}-(s+t)a_{n+1}+(st)a_n=0$를 만족하면서 서로 실수배 관계가 아닌 수열 두 개만 알아내면 점화식 $a_{n+2}-(s+t)a_{n+1}+(st)a_n=0$를 만족하는 임의의 수열은 알아낸 두 수열의 실수배의 합으로 표현할 수 있습니다. s^n, t^n은 서로 실수배 관계가 아니므로, 위의 점화식을 만족하는 임의의 수열은

$$a_n=C_1s^n+C_2t^n$$

의 형태가 되고, 첫 항과 둘째 항을 알면 C_1, C_2의 값을 구할 수 있습니다.

4. 돌아보며

이 글에서는 **살펴보고자 하는 대상 하나하나를 살피는 것이 아니라, 전체적으로 생각하는 사고방식**을 소개하고자 하였습니다. 이러한 사고방식은 고차방정식의 근의 공식을 만들어낼 수 있는지를 연구하는 과정에서 처음 나타났는데, 얼마 지나지 않아 3대 작도 불능문제가

미지수가 3개이면서 방정식이 2개 주어진 경우가 되어 연립방정식을 만족하는 해가 유일하게 존재하지 않습니다. 그러면, 주어진 행렬은 역행렬을 가지지 않을 수밖에 없습니다.

8) 역시 주어진 점화식을 만족하는 수열의 집합의 '차원'이 2라는 것, 그 집합에는 '독립적인 것'이 2개 있다는 의미입니다.

9) 일단, 두 근 s, t은 실수인 경우를 생각해 봅시다. 사실은, 복소수라도 생각하여도 이 글의 내용은 성립합니다.

10) 그렇지 않은 경우는, 조금 더 복잡하기 때문에 이 글에서는 다루지 않았습니다.

왜 작도 불능인지 증명하는 데에 이러한 사고방식이 이용됩니다. 그 뒤, 이러한 사고방식은 수학의 중추적인 사고방식이 되었으며, 물리학이 발전하면서 이론물리학에서도 이러한 사고방식을 도입하였습니다. 여러분이 배운 운동량 보존의 법칙, 에너지 보존의 법칙도 나중에는 이러한 사고방식과 연계됩니다.

아울러, **점화식을 만족하는 수열을 구하는 데 벡터, 행렬, 연립방정식 등의 내용을 통합적으로 이용할 수 있다**는 것도 보여 주고자 하였습니다. 실제로 벡터, 행렬, 연립방정식 등의 내용을 통합적으로 이해하면, 더 나아가 일차변환까지 포함하여 통합적으로 이해한다면 이를 통하여 할 수 있는 것이 매우 많습니다. 하나의 예로, xy항이 포함된 어떤 이차식으로 나타나는 곡선이든 회전변환만 해 주면 우리가 아는 이차곡선이 된다는 것도 이러한 '통합적인 이해'를 통해 알아낼 수 있습니다. 물리학에서도 회전 운동이나 진동, 파동 등을 다룰 때 이러한 '통합적인 이해'를 이용합니다. 더 나아가, 현대물리학 중에서 양자역학(유명한 불확정성의 원리가 등장하는 것이 여기서입니다)은 아예 기본적인 표현 방식이 이러한 '통합적인 이해'에 근거를 두고 있습니다.

이와 같이, 점화식을 다루면서 대학교 수학(그리고 물리학)에서 사용되는 사고방식을 보여 주고자 하였습니다. 또한 그러한 사고방식이 고등 학교 수학에도 남긴 흔적을 최대한 찾아, 함께 다루면서 이해를 돕고자 하였습니다.(부정적분이 그 예이며, 연립방정식을 행렬로 푸는 것도 '통합적인 이해'의 흔적이라고 할 수 있습니다) 이러한 과정을 통하여 **새로운 사고방식의 힘을 보여 주고자 하였고, 새로운 사고방식이라고 해도 고등 학교 수학에서 멀리 있는 것은 아니라는 것**을 보여 주고자 하였습니다.(결국 고등 학교 수학에서도 간단히 소개되는 아이디어를 확장하고, 강화한 것일 뿐입니다) 덧붙여, 대학교에 입학한 뒤 이러한 '사고방식들'을 배울 때 제 글이 도움이 되었다면, 더 바랄 것이 없을 것입니다.

한편, 이 글은 '새로운 사고방식'을 다루는 글인 만큼 쉽게 이해하기 어려울지도 모릅니다. '새로운 사고방식'을 살펴 볼 여유가 많지 않을지도 모릅니다. 대학교에서 수학이나 물리학을 공부하지 않게 되는 분이라면, 이러한 '사고방식'은 앞으로도 만날 일이 드물 것입니다. 그렇다면, 각자의 능력과 상황에 맞춰 반응하면 됩니다. 이 글의 내용은 반드시 이해해야 하는 내용이 아니기 때문에,(수능에 잘 출제되는 내용도 아니고) 각자가 소화할 수 있는 정도만 받아들이면 됩니다. 저 또한 이 글을 읽는 모든 분들이 이 글을 모두 소화하기를 바라면서 쓰는 것이 아닙니다. 이 글이 도움이 될 '몇몇 분들'이 있기 때문에 쓰는 것입니다.

서울대학교 입학사정관제 안내 파일에 보면, 서울대학교를 노려 볼 만한 정도의 학생이라면 고등 학교 생활을 보내면서 고등 학교 과정 내의 것만 공부하는 것보다는 자신이 궁금하다면 고등 학교 과정 이상의 내용이라도 조금씩 찾아보고 생각해 보곤 하는 것이 더 바람직하지 않겠냐는 말이 있습니다. 저는 이 말에 강력하게 동의하는 사람이지만, 애석하게도 대학교 과정의 내용과 고등 학교 과정의 내용 사이에의 차이가 그러한 노력을 방해할 수 있습니다. 그렇기에, 이와 같은 글들, 고등 학교 과정과 대학교 과정을 이어 주는 글들을 씀으로써, 더 알고 싶어하는, 더 나아가고 싶어하는 고등 학생에게 도움이 되기를 바라고 있습니다.

글을 쓴 뒤에도, 조회수나 댓글 등을 보며, 다른 사람들이 얼마나 읽어 보고, 어떻게 받아들이고 평가하는지를 살펴보곤 합니다. 이를 통해, 저 자신의 글을 발전시킬 수 있기 때문입니다. 여러분들의 많은 반응이 제게 Feedback으로 돌아오기를 바라며, 이 글을 마칩니다.

작성자 : 나카렌

참고 문헌

이 글을 저 자신만의 힘으로 썼다고 말하기는 힘듭니다. 수학적 내용들, 물리적인 응용들을 가르쳐 주신 분들이 있고, 수학을 다루는 글을 쓸 때 어떤 식으로 글을 쓰는지 본보기가 되어 주신 분들이 있습니다. 그런 분들을 생각하는 의미에서, 이 글을 읽는 다른 분들이 도움이 될 수 있게 하기 위하여, 이 글의 내용을 구성하고 집필하는데 도움이 된 책이나 글 등을 참고 문헌으로 제시하고 있습니다.

이인석,『선형대수와 군』, 서울대학교출판문화원, 2005