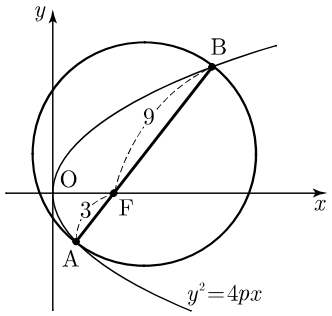
절대지존 수Ⅱ 기하 100選

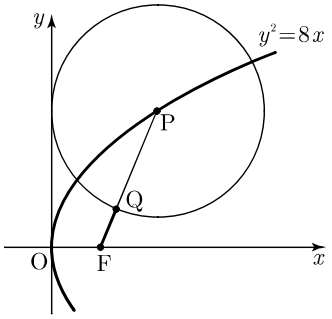
수리영역
한석원 선생님

1 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$ 위에 선분 AB가 포물선의 초점 F를 지나도록 두 점 A, B가 있고, $\overline{\mathrm{AF}}=3$, $\overline{\mathrm{BF}}=9$라고 한다. 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, b의 값을 구하면?



① $\frac{3}{2}$　② $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 3

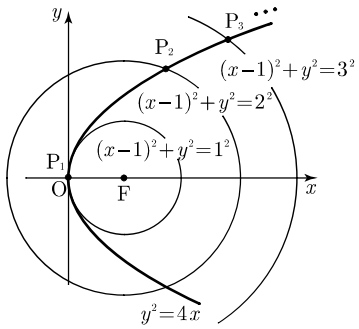
2 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위에 중심 P가 있고 y축에 접하는 원이 있다. 이 포물선의 초점을 F라 할 때, 선분 FP와 원이 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 포물선 위에서 움직일 때, Q가 그리는 자취의 길이를 구하면?



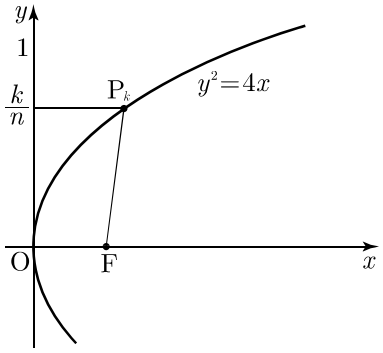
① 4　② 2π　③ 4π　④ 10　⑤ 6π

3 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=4x$와 $(1,\ 0)$을 중심으로 하는 반지름의 길이가 n인 원이 제 1사분면에서 만나는 점을 $\mathrm{P}_n(a_n,\ b_n)$이라 하자.

이 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k^2$의 값을 구하여라.



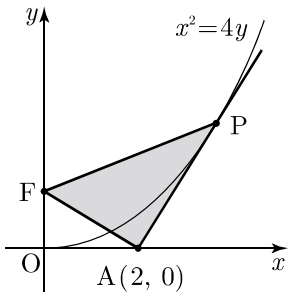
4 그림과 같이 $y=\dfrac{k}{n}$인 직선과 포물선 $y^2=4x$가 만나는 점을 P_k라 하고, 이 포물선의 초점을 F라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{F}}$의 값을 구하면?



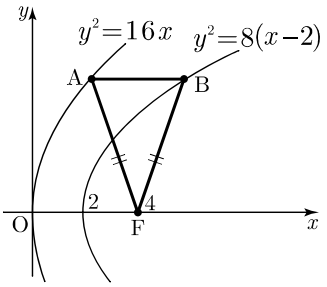
① 2　　② $\dfrac{7}{6}$　　③ $\dfrac{1}{12}$

④ $\dfrac{13}{12}$　　⑤ 3

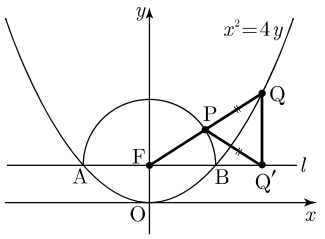
5 그림과 같이 포물선 $x^2=4y$ 위의 점 P에서 그은 접선이 x축과 A$(2,\ 0)$에서 만났다. 이 포물선의 초점을 F라 할 때, 삼각형 FAP의 넓이를 구하여라.



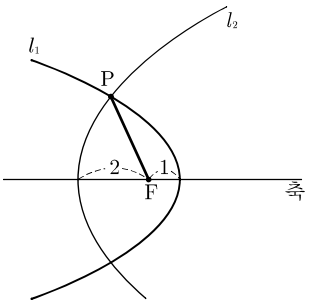
6 그림과 같이 초점 F$(4,\ 0)$을 공유하는 두 포물선 $y^2=16x$와 $y^2=8(x-2)$가 있다. 그림과 같이 x축에 평행한 선분 AB를 그었더니, 삼각형 AFB가 이등변삼각형이 되었다고 한다. 이 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.



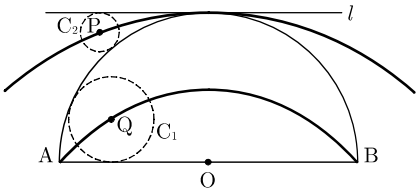
7 포물선 $x^2=4y$의 초점 F를 중심으로 하는 반원의 지름 AB의 양 끝점이 그림과 같이 포물선과 만나고 있고 직선 l은 지름의 연장선이다. 또 그림과 같이 초점 F와 반원 위의 한 점 P를 지나는 직선이 포물선과 만나는 점을 Q, Q에서 직선 l에 내린 수선의 발을 Q′라 하자. $\overline{PQ}=\overline{PQ'}$가 성립할 때, $\overline{QQ'}$의 길이를 구하여라.



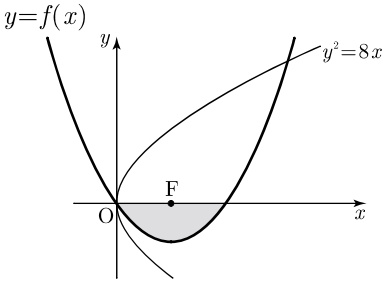
8 그림과 같이 축과 초점을 공유하는 두 포물선 l_1과 l_2가 그림과 같이 놓여있다. 포물선 l_1과 l_2의 초점과 꼭지점 사이의 거리는 각각 1, 2일 때, 두 포물선의 교점 P에 대하여 $\overline{FP}$의 길이를 구하여라.



9 그림과 같이 반지름이 1인 반원과 반원에 접하면서 지름 AB에 평행한 직선 l이 있다. 반원의 안쪽에서 지름과 호에 접하면서 움직이는 원을 C_1, 바깥쪽에서 직선 l과 호에 접하면서 움직이는 원을 C_2라 하고 그 중심을 각각 Q, P라 하자. 이 때, Q와 P의 자취는 포물선이 된다고 한다. 이 두 포물선의 준선 사이의 거리를 구하여라.



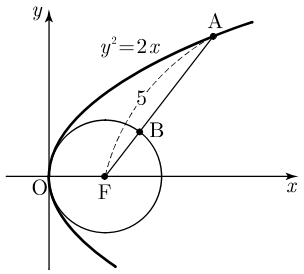
10 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$와 초점을 공유하고 원점을 지나는 포물선 $y=f(x)$가 있다. 이 때, $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이는? (단, $y=f(x)$의 주축은 y축에 평행하다.)



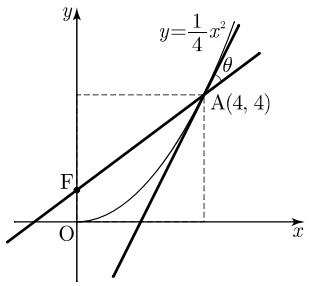
① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$

④ 2 ⑤ 4

11 그림과 같이 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 A와 초점 F를 이은 선분이 초점을 중심으로 하고 원점을 지나는 원과 만나는 점을 B라 하자. B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, $100(a^2+b^2)$의 값을 구하여라.



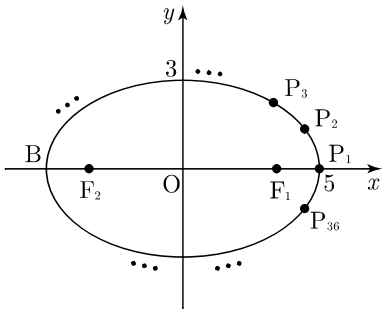
12 그림과 같이 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점 A$(4,\ 4)$에서의 접선과 직선 AF가 이루는 각 θ에 대하여 $\tan\theta$의 값을 구하면? (단, F는 초점)



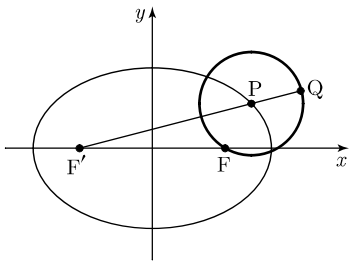
① $\frac{1}{\sqrt{3}}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{8}{15}$　⑤ $\frac{7}{15}$

13 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ 위에 점 P_1, P_2, $\cdots$, P_{36}이 $\angle P_nOP_{n+1}=\frac{\pi}{18}$을 만족하도록 그림과 같이 놓여 있다. 이 때, $\sum_{k=1}^{36}\overline{P_kF_2}$의 값을 구하여라.

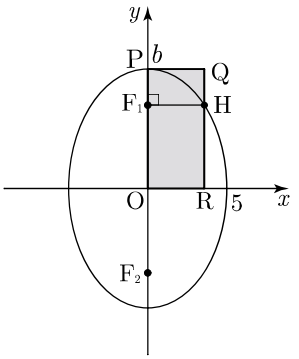


14 그림에서 점 Q는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 동점 P를 중심으로 하고 초점 F를 지나는 원과 선분 F′P의 연장선이 만나는 점이다. 이 때, 점 Q의 자취의 길이를 구하면?

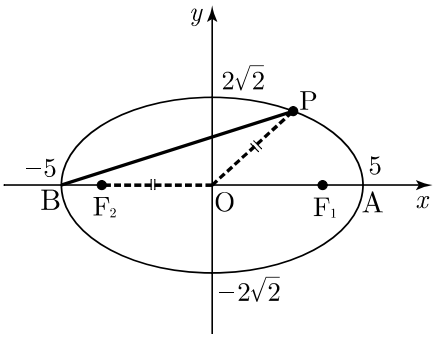


① 16π ② 8π ③ $2\sqrt{7}\pi$
④ 9π ⑤ 7π

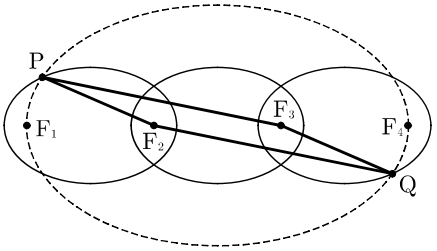
15 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{7^2}=1$의 초점 $F_1(0,\ k)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 이 타원과 제 1사분면에서 만나는 점을 H라 하고 H에서 x축에 내린 수선의 발을 R이라 하자. 이 때, 그림과 같은 직사각형 OPQR의 넓이를 구하여라.



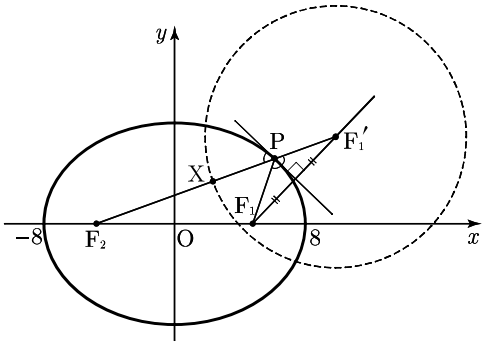
16 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{8}=1$ 위에 점 P가 그림과 같이 제 1사분면 위에서 $\overline{OF_2}=\overline{OP}$를 만족하는 위치에 놓여있다. 이 때, 이 타원의 장축의 한 끝점 B에 대하여 선분 $\overline{BP}^2=a+b\sqrt{17}$이라고 할 때, $17(a+b)$의 값을 구하여라. (단, a, b는 유리수이다.)



17 장축의 길이가 $2\sqrt{6}$, 단축의 길이가 $2\sqrt{2}$인 합동인 세 타원이 그림과 같이 초점 F_2, F_3를 공유하며 일직선상에 놓여 있다. 이 때, F_1과 F_4를 장축의 양 끝점, F_2와 F_3를 초점으로 하는 타원(점선)에 대하여 사각형 PF_2QF_3의 둘레의 길이를 구하여라.

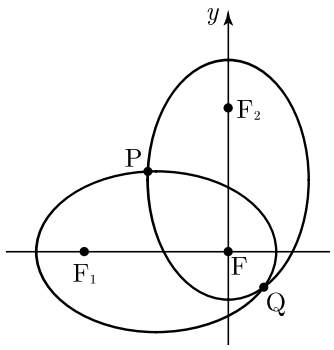


18 타원 $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ 위를 움직이는 점 P에서의 접선이 있다. 초점 F_1을 이 접선에 대해 대칭이동시킨 점을 F_1'라 할 때, 초점 F_2와 P, F_1'는 일직선상에 위치한다고 알려져 있다. 그림과 같이 점 F_1'를 중심으로 하고 반지름이 8인 원과 선분 F_2P와의 교점을 X라 할 때, X의 자취의 길이를 구하면?



① 4π ② 8π
③ 16π ④ 20π
⑤ 25π

19 그림과 같이 원점 F를 초점으로 공유하고 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2로 합동인 두 타원이 있다. 각 타원의 또 다른 초점을 각각 F_1, F_2라 하고, 두 타원의 교점을 P, Q라 하자. 이 때, 4개의 선분 PF_1, F_1Q, F_2Q, PF_2의 길이의 합을 구하면?

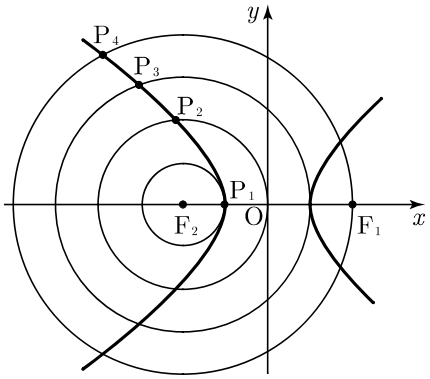


① 10 ② $\frac{64}{5}$ ③ 14

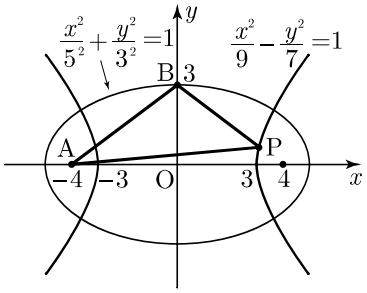
④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

20 좌표평면에서 x축 위의 두 점 $F_1(2\sqrt{2},\ 0)$, $F_2(-2\sqrt{2},\ 0)$을 두 초점으로 하는 타원이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_1}|=3$, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}|=5$를 만족할 때, 타원 위의 동점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{QF_1}+\overrightarrow{QF_2}|^2$의 최소값을 구하여라.

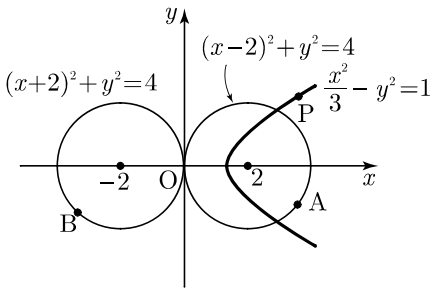
21 자연수 n에 대하여 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 한 초점 F_2를 중심으로 하고 반지름이 n인 원과 쌍곡선이 만나는 교점 중 P_n을 그림과 같이 정하였다. 이 때, 또 다른 한 초점 F_1에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\overline{P_kF_1}$의 값을 구하여라.



22 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$과 초점을 공유하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$이 있다. 이 때, 두 점 $A(-4,\ 0)$, $B(0,\ 3)$과 쌍곡선의 $x>0$인 부분을 움직이는 동점 P에 대하여 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최소값을 구하여라.



23 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-y^2=1\,(x>0)$ 위에 동점 P가 있고, 원 C_1: $(x-2)^2+y^2=4$, C_2: $(x+2)^2+y^2=4$ 위에 동점 A, B가 각각 움직인다. 이 때, $\overline{PB}-\overline{PA}$의 최대값을 구하면? (단, P는 원 C_1의 바깥에 위치한다.)



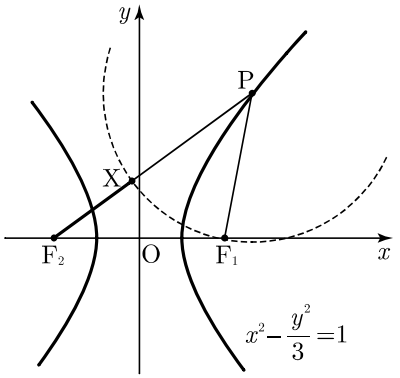
① 4　　② $4+2\sqrt{3}$

③ $2+\sqrt{3}$　　④ $4\sqrt{3}$

⑤ 9

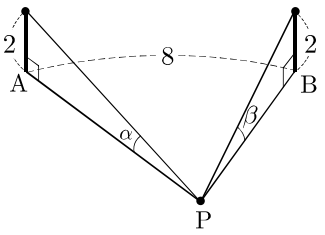
24 좌표평면의 x축 위에 $F_1(c,\ 0)$, $F_2(-c,\ 0)\,(c>0)$를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_1}|=8$, $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}|=15$를 만족할 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하여라.

25 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 동점 $\mathrm{P}(x,\ y)\ (x>0)$를 중심으로 하고 초점 $\mathrm{F_1}$을 지나는 원을 생각하자. 선분 $\mathrm{F_2P}$와 원이 만나는 점을 X라 할 때, $\overline{\mathrm{F_2X}}$가 휩쓸고 지나가는 넓이를 구하면?



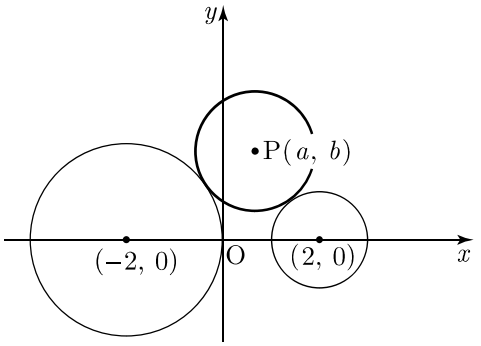
① 2π　② 6　③ $\frac{3\pi}{2}$　④ $\frac{15}{2}$　⑤ $\frac{4\pi}{3}$

26 지면 위에 8m 떨어진 두 점 A, B에 길이가 $2m$인 막대가 각각 세워져 있다. 지면 위의 동점 P에서 막대의 끝을 바라본 각을 그림과 같이 각각 α, β라 할 때, $\cot\alpha+\cot\beta=5$을 만족한다고 한다. 이 동점 P가 움직이는 자취에 대해 그 내부의 넓이를 구하면?



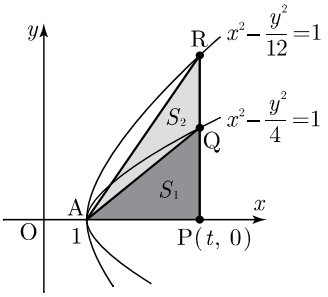
① 15　② 18　③ 18π　④ 15π　⑤ 12π

27 그림과 같이 중심이 $(-2,\ 0)$이고 반지름 2인 원과 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름이 1인 원이 있다. 이 두 원에 동시에 외접하고, 반지름이 r인 원의 중심을 $\mathrm{P}(a,\ b)(b>0)$라 하자. 이 때, $\lim_{r\to\infty}\frac{b}{a}$의 값을 구하면?



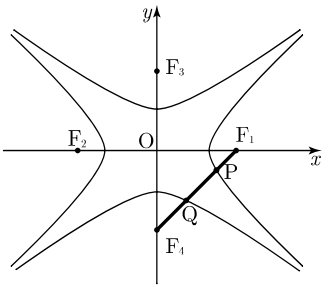
① $\sqrt{15}$　② $\sqrt{8}$　③ 4　④ $\frac{1}{15}$　⑤ $\sqrt{5}$

28 두 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, $x^2-\frac{y^2}{12}=1$과 직선 $x=t$가 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 Q, R이라 하고, 직선 $x=t$가 x축과 만나는 점을 P라 하자. $\triangle\mathrm{APQ}=S_1$, $\triangle\mathrm{AQR}=S_2$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$의 값을 구하면?



① 1　② 2　③ $\sqrt{3}-1$　④ $\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{3}+1$

29 두 쌍곡선 $x^2-y^2=2$, $x^2-y^2=-2$과 그 초점들이 그림과 같이 놓여있다. 이 때, 초점 F_1과 F_4를 잇는 선분이 각 쌍곡선과 제 4사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 이 때, $\overline{PF_2}+\overline{QF_3}$를 계산하면?

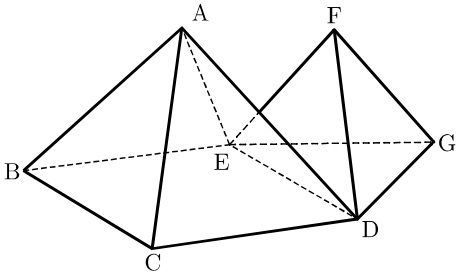


① $5\sqrt{2}$　② 10　③ $5-\sqrt{2}$　④ $5+\sqrt{2}$　⑤ 9

30 임의의 실수 k에 대하여 연립방정식 $\begin{cases}(x-k)^2+(y-\sqrt{3}k)^2=k^2\\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 의 해가 존재하지 않을 때, $\dfrac{b^2}{a^2}$의 최대값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$　② 1　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 2

31 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 동일한 정사각뿔과 정사면체가 모서리 ED를 공유하면서 꼭지점 B, C, D, E, G가 동일한 평면 위에 놓여있다. 이 때, △ADE와 △EDF가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값을 구하면?

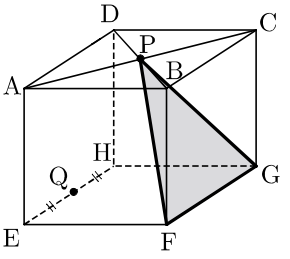


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$

③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{3}$

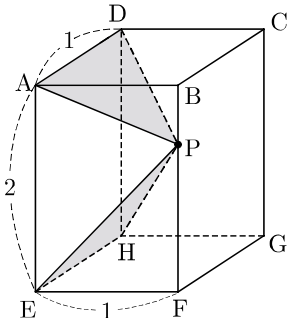
32 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육면체에서 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 P, 선분 EH의 중점을 Q라 하자. 이 때, 점 Q에서 평면 PFG까지의 거리의 최소값을 구하면?



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{4}{\sqrt{5}}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

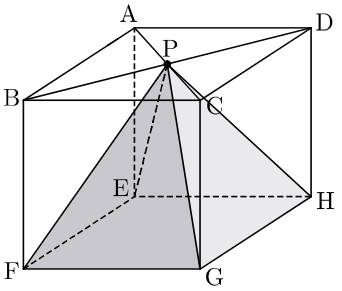
33 그림과 같은 직육면체에서 동점 P가 모서리 BF를 따라 움직일 때, 삼각형 APD와 삼각형 EPH가 이루는 각을 θ라 하자. 이 때, $\sin^2\theta$의 최대값과 최소값의 합을 구하면?



① $\frac{9}{5}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

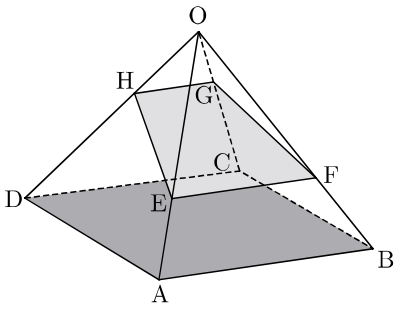
34 정육면체 ABCD－EFGH와 밑면을 공유하고 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점 P를 꼭지점으로 갖는 정사각뿔 P－EFGH에 대하여 삼각형 PFG와 삼각형 PGH가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

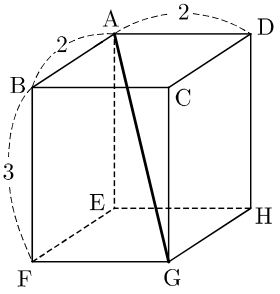
35 그림과 같이 옆면이 모두 정삼각형으로 이루어진 정사각뿔 O－ABCD에서 사각형 EFGH는 각 모서리의 삼등분점 중 하나를 연결하여 만든 등변사다리꼴이다. 이 때, 평면 EFGH와 평면 ABCD가 이루는 예각을 θ라 할 때, $\cos\theta$를 구하면? (단, $\overline{EF} \neq \overline{GH}$)



① $\frac{9}{11}$ ② $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ③ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

④ $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

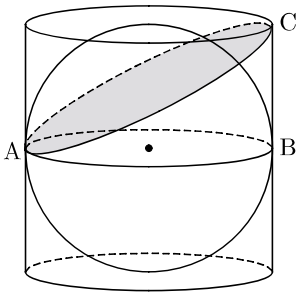
36 그림과 같은 정사각기둥의 맞모금 AG를 지면에 수직으로 세울 때, 평면 EFGH가 지면과 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하면?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{\sqrt{11}}$ ③ $\frac{3}{\sqrt{17}}$

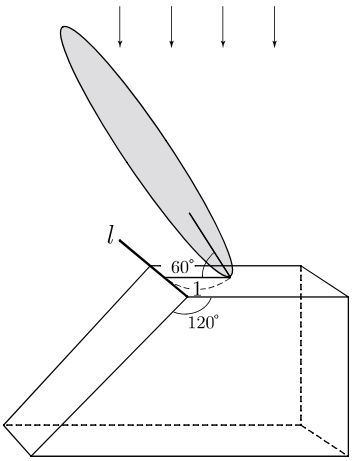
④ $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

37 그림과 같이 반지름이 5이고 높이가 10인 원기둥에 내접하는 구가 있다. A, B는 구의 지름의 양 끝점이면서 동시에 원기둥 위에 있는 점이다. 또, B에서 원기둥의 윗면에 내린 수선의 발을 C라 하자. 그림과 같이 A, C를 포함하는 평면으로 '구'를 자를 때 생기는 원의 넓이의 최소값을 구하면?



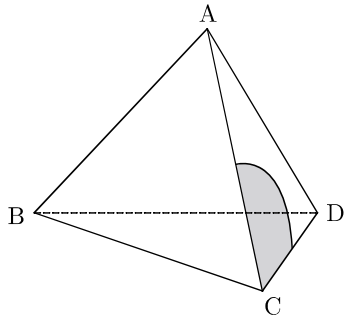
① 20π ② 16π ③ 12π
④ 10π ⑤ 8π

38 반지름이 4이고 직선 l에 평행한 원판의 한 끝점이 그림과 같이 놓여 있다. 원판과 수평면이 이루는 각은 $60°$이고, 경사면은 수평면과 $120°$의 각을 이루고 있다. 이 원판에 수직광선을 그림과 같이 비출 때, 수평면과 경사면에 생기는 그림자의 넓이의 합을 구하면?



① $12\pi+2$ ② $16\pi-4$
③ $16\pi-2$ ④ $\frac{40}{3}\pi+2\sqrt{3}$
⑤ $\frac{40}{3}\pi-2\sqrt{3}$

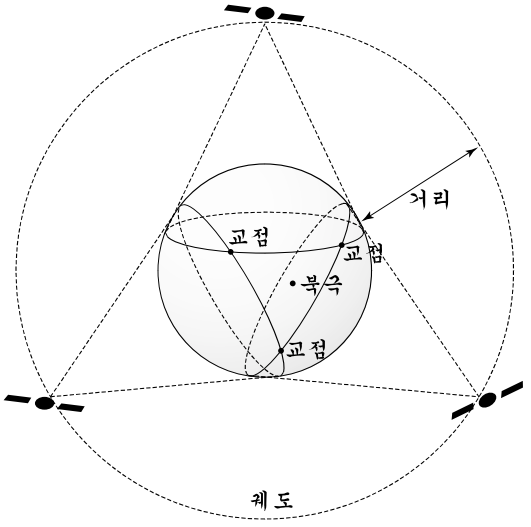
39 한 변의 길이가 2인 정사면체 ABCD에서 BC를 지름으로 하는 구의 내부와 삼각형 ACD의 공통영역을 그림과 같이 어두운 부분으로 표시하였다. 이 영역의 넓이를 구하면?



① $\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}$　③ $\frac{\pi}{6}$

④ $\frac{\pi}{4}$　⑤ $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}$

40 그림과 같이 적도 상공에 떠 있는 3개의 인공위성은 지구 중심으로부터의 거리가 같고 적도면과 동일한 평면 위에 있으며, 정삼각형을 이루고 있다. 각 인공위성에서 지구에 접선을 그렸을 때 생기는 원들의 교점 중 북반구에 위치한 점들의 위도가 60°가 되기 위해서는 인공위성의 지구 표면으로부터의 거리가 얼마여야 하는가? (단, 지구의 반지름은 R이고, 지구는 완전한 구라고 가정한다.)

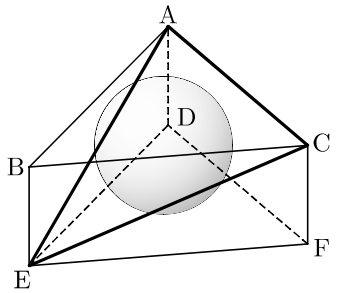


① R　② $3R$

③ $5R$　④ $2\sqrt{2}R$

⑤ $2\sqrt{3}R$

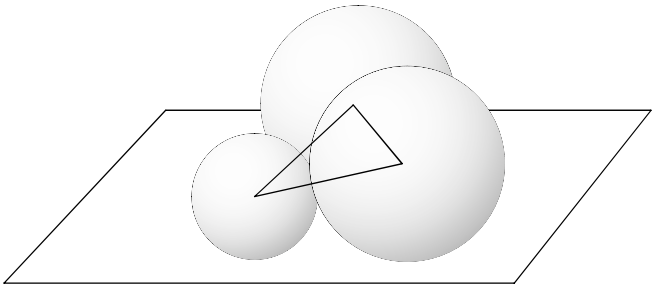
41 그림과 같이 반지름이 2인 구에 모든 면이 접하는 정삼각기둥이 있다. 이 구를 평면 ACE로 자를 때, 만들어지는 단면의 넓이를 구하면?



① 2π ② 3π ③ $\frac{48}{11}\pi$

④ 4π ⑤ $\frac{48}{13}\pi$

42 반지름이 각각 2, 4, 4인 세 개의 구가 서로 접하면서 지면 위에 놓여 있다. 이 세 구의 중심을 이어서 만든 삼각형이 지면과 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값을 구하면?

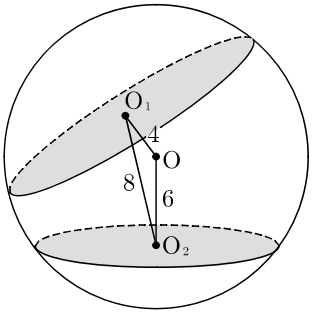


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$

③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{6}$

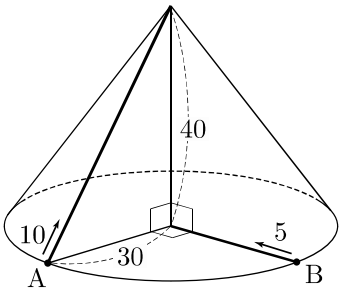
⑤ $\frac{8}{9}$

43 그림과 같이 반지름의 길이가 10인 구의 중심 O와의 거리가 4인 평면과 6인 평면으로 잘랐을 때 생기는 원의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자. 이 두 원의 중심 사이의 거리가 8일 때, 원 O_1을 원 O_2를 포함한 평면 위로 정사영시킨 도형의 넓이를 구하면?



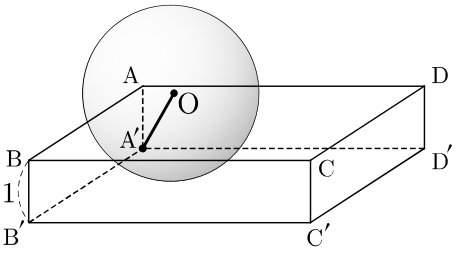
① 15π ② $10\sqrt{2}\pi$ ③ 21π
④ $10\sqrt{3}\pi$ ⑤ 23π

44 그림과 같은 직원뿔에서 밑면의 중심에 대하여 $90°$를 이루는 지점에 두 점 A, B가 있다.
A는 모선을 따라 위로 10m/sec, B는 밑면의 중심을 향하여 5m/sec의 속력으로 동시에 출발하였다. 이 때, 두 점 사이의 거리가 최소인 순간은 출발한지 몇 초 후인가?



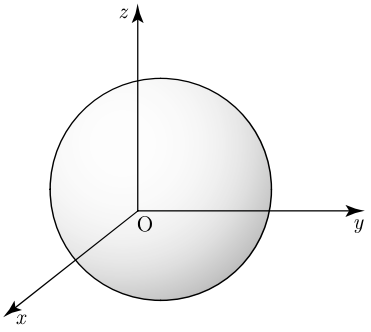
① 2초 ② 3초 ③ $\frac{56}{25}$초
④ $\frac{61}{25}$초 ⑤ $\frac{66}{25}$초

45 그림과 같이 반지름이 2인 구가 직육면체 모양의 상자 안에 놓여있다. 구는 선분 AB와 AD에 모두 접하고, 바닥면 A′B′C′D′에도 접한다. 이 때, 구의 중심 O와 상자의 꼭지점 A′사이의 거리를 구하면?



① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$
③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{13}$
⑤ $\sqrt{14}$

46 그림과 같이 반지름이 2인 구가 x, y, z축에 모두 접하고 있다. 이 구를 xy평면으로 자른 단면의 넓이를 구하면?



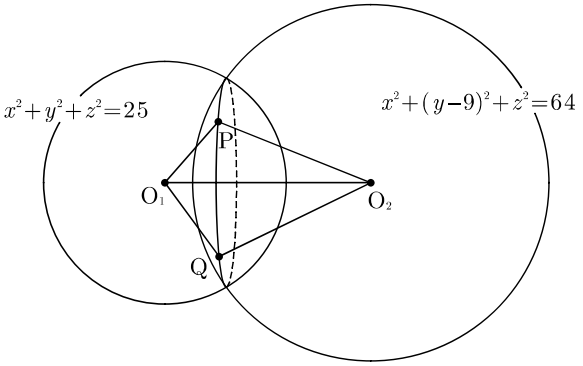
① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

47 좌표공간에서 세 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$, $\mathrm{B}(b,\ c,\ a)$, $\mathrm{C}(c,\ a,\ b)$에 대하여 $a^2+b^2+c^2=400$, $a+b+c=30$을 만족한다. 이 때, 원점 O에 대하여 사면체 $\mathrm{O-ABC}$의 부피를 구하여라.

48 구 $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=16$의 $z \geqq 0$인 부분에 외접하고 xy평면에 접하는 반지름 1인 구가 있다. 이 구의 중심이 움직이는 자취의 길이를 구하면?

① 8π ② $2\sqrt{21}\pi$ ③ 10π
④ $3\sqrt{7}\pi$ ⑤ 12π

49 그림과 같이 두 구 $x^2+y^2+z^2=25$와 $x^2+(y-9)^2+z^2=64$가 만나서 생기는 원 위에 두 점 P, Q가 있다. 각 구의 중심을 O_1, O_2라 할 때, 사면체 O_1PQO_2의 부피의 최대값을 구하면?

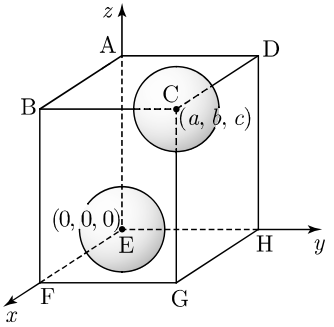


① 21　　② $\frac{70}{3}$

③ 30　　④ $\frac{88}{3}$

⑤ 35

50 양수 a, b, c에 대하여 두 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$와 $x^2+y^2+z^2=25$의 xy평면으로의 정사영이 서로 접하고, yz평면으로의 정사영도 서로 접한다고 한다. 이 때, 그림의 직육면체 ABCD−EFGH의 부피의 최대값을 구하면?



① $\frac{2000}{9}\sqrt{3}$　　② 350

③ $200\sqrt{3}$　　④ 380

⑤ $\frac{700}{3}\sqrt{3}$