수리 영역(나형)

2교시

홀수형

5지선다형

1. $2^{-1}\times 16^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 두 집합

$$A=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\},\ B=\{3,\ 7\}$$

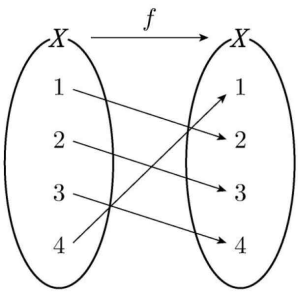
에 대하여 $A-B=\{a,\ 9\}$일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}$의 값은? [2점]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

4. 그림은 함수 $f: X\to X$ 를 나타낸 것이다.



$f(4)+(f\circ f)(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

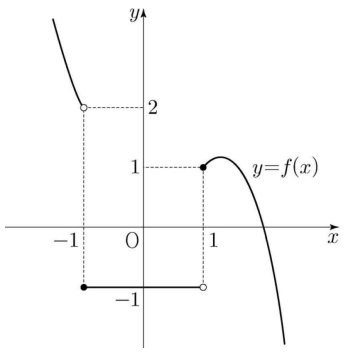
5. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}-a_7=6$일 때, a_4의 값은? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

6. 다항식 $(1+x)^7$의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 42 ② 35 ③ 28
④ 21 ⑤ 14

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1-} f(x)-\lim_{x\to1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

8. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^c은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{6}$$

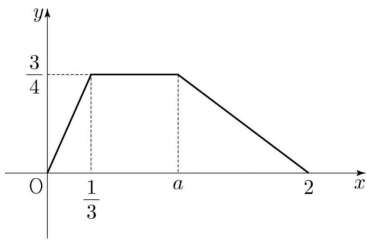
일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

9. 함수 $f(x)=x^3-3x+a$의 극댓값이 7일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0\le X\le 2$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le a\right)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]



① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

11. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$$p: x^2-4x+3>0,\ q: x \le a$$

$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

12. 어느 마을에서 수확하는 수박의 무게는 평균이 $m$kg,
표준편차가 1.4kg인 정규분포를 따른다고 한다.
이 마을에서 수확한 수박 중에서 49개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여, 이 마을에서 수확하는 수박의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \le m \le 7.992$이다. a의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96)=0.95$)로 계산한다.) [3점]

① 7.198 ② 7.208 ③ 7.218
④ 7.228 ⑤ 7.238

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{은 홀수})\\ 1+a_n & (n\text{은 짝수})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40}a_n$의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

14. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$$

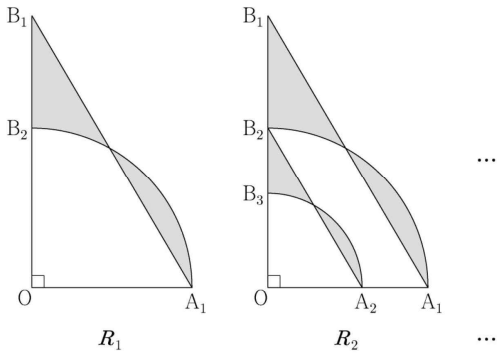
를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

15. 2이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 34 ② 38 ③ 42
④ 46 ⑤ 50

16. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$ 인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1의 내부와 부채꼴 OA_1B_1의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{6}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{13}{6}\pi$

17. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-3)+4$이다.
(나) $\int_0^6 f(x)\,dx=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① 9 ② 12
③ 15 ④ 18
⑤ 21

18. 좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 한 번 던져
앞면이 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼,
뒷면이 나오면 점 A를 y축의 양의 방향으로 1만큼
이동시킨다.

위의 시행을 반복하여 점 A의 x좌표 또는 y좌표가 처음으로 3이 되면 이 시행을 멈춘다. 점 A의 y좌표가 처음으로 3이 되었을 때, 점 A의 x좌표가 1일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 함수 $f: X \to X$에 대하여 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f와 함수 $f \circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일 대응이고, 함수 $f \circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=6$이다.
또한 $n(A) \le 4$이면 $B \subset A$이므로 $n(B) \le 4$이다.
그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.

(ⅰ) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 [(가)]이다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 [(나)]이다.

(ⅲ) (ⅰ)에서 선택한 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$와 (ⅱ)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k) \in A$이며 $A=B$이므로

$$A=\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\} \quad \cdots\cdots (*)$$

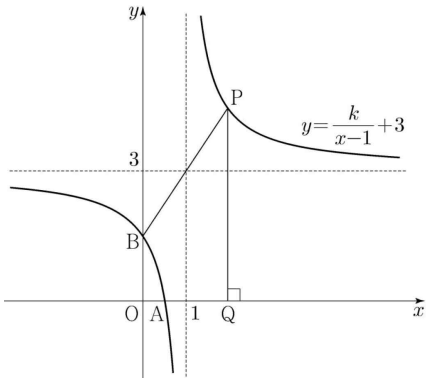
이다. $(*)$을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 [(나)]이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 [(가)] × [(나)] × [(다)]이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 131 ② 136 ③ 141
④ 146 ⑤ 151

20. 그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x-1}+3$ $(0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 각각 A, B라 하자.



이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(2, 4)$이다.
ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB의 기울기와 직선 AP의 기울기의 합은 0이다.
ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

단답형

22. ${}_6\mathrm{P}_2-{}_6\mathrm{C}_2$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=x^4-3x^2+8$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 첫째항이 7인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$$

일 때, a_7의 값을 구하시오. [3점]

25. $\int_1^4 (x+|x-3|)dx$의 값을 구하시오. [3점]

26. 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

27. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k \ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때 점 P의 위치는 40이다. k의 값을 구하시오. [4점]

28. 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 있다. 이 7개의 공을 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하지 않게 나열될 확률은 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)\le kx-2\le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

※ 확인사항
◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

[2019학년도 대학수학능력시험 나형 홀수형]
[정답 및 해설]

1	②	2	⑤	3	③	4	③	5	①
6	②	7	④	8	②	9	⑤	10	④
11	③	12	②	13	①	14	⑤	15	①
16	④	17	④	18	③	19	②	20	⑤
21	①	22	**15**	23	**20**	24	**63**	25	**10**
26	**2**	27	**22**	28	**12**	29	5	30	117

1. 정답 ②

$2^{-1}\times 2^2=2$

2. 정답 ⑤

$A=\{3,\ 5,\ 7,\ 9\},\ B=\{3,\ 7\}$에서

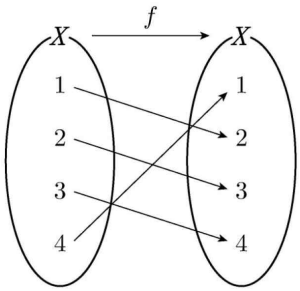
$A-B=\{5,\ 9\}=\{a,\ 9\}$

$\therefore\ a=5$

3. 정답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}=3$$

4. 정답 ③



그림에서 $f(4)=1,\ f(2)=3$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(3)=4$

$\therefore\ f(4)+(f\circ f)(2)=1+4=5$

5. 정답 ①

$\{a_n\}$의 첫째항을 a 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=3d=6$이므로 $d=2$

$\therefore\ a_4=a+3d=4+3\times 2=10$

6. 정답 ②

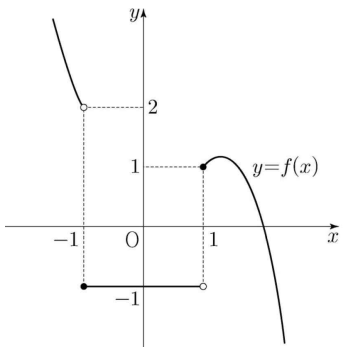
$(1+x)^7$의 전개식에서 x^4의 계수는

$${}_7C_4={}_7C_3$$

$$=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}$$

$$=35$$

7. 정답 ④



위의 그림에서

$$\lim_{x\to -1-}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1+}f(x)=1$$

따라서 $\lim_{x\to -1-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)=2-1=1$

8. 정답 ②

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A^c\cap B)=\frac{1}{6}$에서

$$\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

A와 B^c이 서로 배반사건이므로 $A\cap B^c=\varnothing$

따라서 $A^c\cup B=U$

$\mathrm{P}(A^c\cup B)=\mathrm{P}(U)=1$

이므로 $\mathrm{P}(A^c\cup B)=\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^c\cap B)$에 대입하면

$$1=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

9. 정답 ⑤

$f(x)=x^3-3x+a$의 양변을 미분하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

따라서 $x=-1$에서 극댓값 $f(1)=a+2$

$\therefore\ a+2=7$

$\therefore\ a=5$

10. 정답 ④

그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$$\left\{2+\left(a-\frac{1}{3}\right)\right\}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=1$$

$$\therefore\ a=1$$

$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)$은 사각형의 넓이를 구하면 되므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

11. 정답 ③

$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이므로 $P^c\subset Q$여야 한다.

$\sim p: x^2-4x+3\le 0$, 즉 $1\le x\le 3$

$\{x|1\le x\le 3\}\ \subset\{x|x\le a\}$이어야 하므로 $a\ge 3$이다.

12. 정답 ②

평균이 $m$kg, 표준편차가 1.4kg인 정규분포에서 크기가 49를 따른다.

$7.992=\overline{X}+1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}$이므로

$$\overline{X}=7.992-1.96\times 0.2=7.6$$

$$a=\overline{X}-1.96\times\frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

$$=7.6-1.96\times\frac{1.4}{7}$$

$$=7.208$$

13. 정답 ①

$a_1=2,\ a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2},\ a_4=1,\ a_5=2$이므로 매 4항마다 수열이 반복되고, 4개항의 합이 3이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{40}a_n=30$$

14. 정답 ⑤

$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+ax^2-2$에 $x=1$을 대입하면

$$0=1+a-2$$

$$\therefore\ a=1$$

$\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=x^3+x^2-2$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2+2x$$

$$\therefore\ f'(a)=f'(1)=5$$

15. 정답 ①

$5\log_n 2=$(자연수)에서 $\log_n 2^5=$(자연수)이므로

따라서 n은 2 또는 32

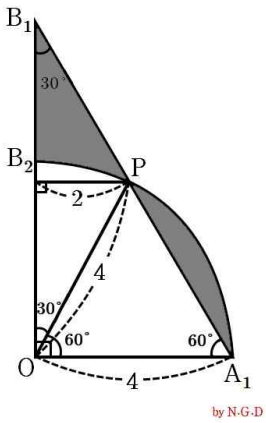
따라서 모든 n의 값의 합은 $32+2=34$

16. 정답 ④

직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$에서 $\overline{\mathrm{OA_1}}=4,\ \overline{\mathrm{OB_1}}=4\sqrt{3}$이므로

부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$와 선분 $\mathrm{A_1B_1}$이 만나는 점을 P라고 하면

$\angle\mathrm{OA_1B_1}=60^\circ,\ \angle\mathrm{OB_1A_1}=30^\circ,\ \overline{\mathrm{OP}}=4$이다.



따라서 위 그림에서 구하는 면적은 삼각형 $\mathrm{OPB_1}$에서 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 30°인 부채꼴의 넓이를 뺀 면적과, 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 60°인 부채꼴 $\mathrm{OPA_1}$에서 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이를 뺀 면적을 더한 것과 같다.

따라서,

$$R_1=(\triangle\mathrm{OPB_1}-\text{부채꼴 }\mathrm{OPB_1})+(\text{부채꼴}\mathrm{OPA_1}-\triangle\mathrm{OA_1P})$$

$$=\left(4\sqrt{3}\times 2\times\frac{1}{2}-16\pi\times\frac{1}{12}\right)+\left(16\pi\times\frac{1}{6}-4\sqrt{3}\right)$$

$$=\left(\frac{12\sqrt{3}-4\pi}{3}\right)+\left(\frac{8\pi-12\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

바깥쪽과 안쪽 도형의 닮음비는 $\mathrm{OB_1}:\mathrm{OB_2}=4\sqrt{3}:4$

따라서 도형의 넓이비는 $3:1$이기 때문에 S_n은 초항이 $\frac{4}{3}\pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$

17. 정답 ④

$$\int_0^6 f(x)\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x-3)\,dx+\int_3^6 4\,dx$$
$$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)dx+\Big[4x\Big]_3^6$$
$$=2\int_0^3 f(x)\,dx+12$$

(나)에서 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$ 이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=-6$$

$y=f(x)$의 x 절편을 α라 하면 $f(x)$는 증가함수이므로 $6<x<9$에서 $f(x)>0$

그러므로 $y=f(x)$, $x=6$, $x=9$, x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_6^9 f(x)\,dx=\int_6^9 \{f(x-3)+4\}\,dx$$
$$=\int_6^9 f(x-3)dx+\int_6^9 4\,dx$$
$$=\int_3^6 f(x)\,dx+\Big[4x\Big]_6^9$$
$$=\int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx+12$$
$$=\int_3^6 f(x-3)\,dx+\int_3^6 4\,dx+12$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\Big[4x\Big]_3^6+12$$
$$=(-6)+12+12=18$$

18. 정답 ③

동전이 앞면이 나오는 횟수를 a, 뒷면이 나오는 횟수를 b라 하면 y좌표가 3이 되는 경우는

(ⅰ) 뒷면만 세 번 나온 경우

bbb이므로 이때의 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ⅱ) 앞면이 한 번 나오고 뒷면이 세 번 나온 경우

앞에 3번은 abb를 나열하는 경우와 같고, 네 번째에 b가 나오면 되므로 이때의 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(ⅲ) 앞면이 두 번 나오고 뒷면이 세 번 나온 경우

앞에 4번은 $aabb$를 나열하는 경우와 같고, 다섯 번째에 b가 나오면 되므로 이때의 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}$

따라서 y좌표가 3이 될 확률은

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{6}{32}=\frac{4+6+6}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

이때, x좌표가 1인 경우는 (ⅱ)번의 $\frac{3}{16}$이므로 구하는 확률은 $p=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$

19. 정답 ②

(ⅰ) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 원소 6개중 5개를 선택하는 경우이므로 $\boxed{{}_6C_5}$이다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 선택된 f의 치역의 원소 5개중 $f(k)$가 대응되어야 할 원소를 선택하는 것이므로 $\boxed{{}_5C_1}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)에서 선택한 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로

$$A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\} \quad \cdots\cdots\ (*)$$

$(*)$을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 $\boxed{5!}$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{6}\times\boxed{5}\times\boxed{120}$이다.

$\therefore\ p+q+r=136$

20. 정답 ⑤

ㄱ. $k=1$이면 $B=(0,\ 2)$이고 점 P는 점근선의 교점 $(1,\ 3)$에 점대칭이므로 $P(2,\ 4)$이다. (참)

ㄴ. $B(0,\ 3-k)$이고 $A\left(1-\frac{k}{3},\ 0\right)$이므로 P는 점근선의 교점 $(1,\ 3)$에 대하여 점대칭이므로 $P(2,\ k+3)$이다.

AB의 기울기는 $\dfrac{-3+k}{1-\frac{k}{3}}=-3$이고 AP의 기울기는

$$\frac{k+3}{1+\frac{k}{3}}=3$$

이므로 (두 기울기의 합)=0이다. (참)

ㄷ. (사각형 PBAQ)

=(사각형 PBOQ)−(삼각형 OAB)

$=(3-k+3+k)\times 2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times(3-k)\left(1-\frac{k}{3}\right)$

$=6-\frac{1}{6}\times(3-k)^2$

그런데 $0<3-k<3$이므로

$0<\frac{1}{6}(3-k)^2<\frac{3}{2}$

따라서 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이기 위해서는

$\frac{1}{6}(3-k)^2=1$을 만족해야한다.

그러므로 $3-k=\sqrt{6}$, 즉 $k=3-\sqrt{6}$

따라서 k는 0과 1사이의 값이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. 정답 ①

최고차항의 계수가 1인 삼차함수를

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

(가)에서 $g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}$ (단, $f(x)\neq 0$)이고, $g(x)$는 실수 전체에서 연속이므로 $g(0)=\lim_{x\to 0}g(x)=1$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{f(x)}=1$이므로 (분자) $\to 0$이면

(분모) $\to 0$이므로 분모 $f(0)=0$이어야 극한값이 존재한다.

$\therefore\ c=0$

준 식에 대입하면

$f(x)=x^3+ax^2+bx=x(x^2+ax+b)$

$g(x)=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\frac{x+3}{x^2+ax+b}$

(나)에서 $g(0)=\frac{3}{b}=1$이므로 $b=3$

$g(x)=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\frac{x+3}{x^2+ax+3}$

에서 $g(x)$가 실수 전체에서 연속이기 위해

(분모)$=x^2+ax+3\neq 0$이어야 한다.

$D=a^2-12<0$

$\therefore\ -\sqrt{12}<a<\sqrt{12}$

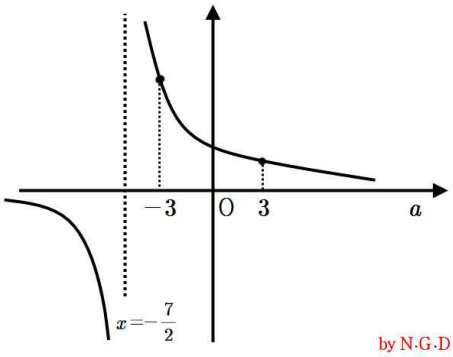
또한, $f(1)$은 자연수이므로 $f(1)=1+a+3=a+4$는 자연수이므로 $a\geq -3$인 자연수이다.

따라서 $-3\leq a<\sqrt{12}$

a는 자연수이므로 $a=-3,\ -2,\cdots,\ 3$이다.

$g(2)=\frac{5}{4+2a+3}=\frac{5}{2a+7}$

그림을 그려보면 다음과 같다.



by N·G·D

위의 그림에서 $a=3$일 때 최소이므로 $\frac{5}{2\times 3+7}=\frac{5}{13}$

22. 정답 15

$${}_6\mathrm{P}_2-{}_6\mathrm{C}_2=6\times 5-\frac{6\times 5}{2\times 1}$$
$$=30-15$$
$$=15$$

23. 정답 20

$f'(x)=4x^3-6x$

이므로

$f'(2)=4\times 2^3-6\times 2=20$

24. 정답 63

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자.

$S_9-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$
$=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8$
$=7r^5(1+r+r^2+r^3)$

$S_6-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6$
$=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5$
$=7r^2(1+r+r^2+r^3)$

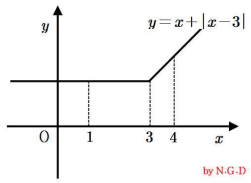
$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=3$에 주어진 위 조건을 대입하면

$\frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=r^3=3$

그러므로 $a_7=7r^6=7\times 9=63$

25. 정답 10

$y=x+|x-3|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 그래프에서 $\int_1^4 (x+|x-3|)dx$은 색칠한 부분의 넓이 이다. 따라서 $\int_1^4 (x+|x-3|)dx=10$

[다른 풀이]

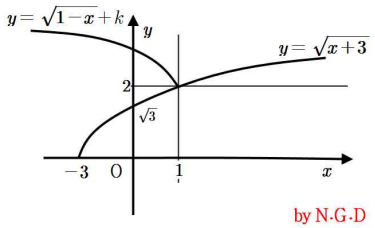
$$\int_1^3 3\,dx+\int_3^4 (2x-3)\,dx$$
$$=\left[3x\right]_1^3+\left[x^2-3x\right]_3^4$$
$$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$$
$$=10$$

26. 정답 2

$y=\sqrt{x+3}$은 $y=\sqrt{x}$를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프이다.

$y=\sqrt{1-x}+k$은 $y=\sqrt{-(x-1)}+k$이므로 $y=\sqrt{-x}$를 x축으로 1만큼, y축으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 k의 최댓값은 아래의 그림과 같다.



즉, $x=1$일 때, $y=\sqrt{x+3}$에서 $y=\sqrt{4}=2$이므로 k의 최댓값은 2이다.

27. 정답 22

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-t^2+6t,\ a(t)=\frac{dv}{dt}=-2t+6$$

따라서 점 P의 가속도가 0일 때, $t=3$이다.

이때, 점 P의 위치가 40이므로

$$40=-\frac{1}{3}(3)^3+3(3)^2+k$$
$$\therefore\ k=22$$

28. 정답 12

전체 경우의 수는 7!이고

같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하는 경우의 수는 검은공과 흰 공이 나열되는 경우를 포함하여 $6!\times 2$가 된다.

$\therefore\ \frac{7!-6!\times 2}{7!}=\frac{6!(7-2)}{7!}=\frac{5}{7}$이 되므로

$p=7,\ q=5$이고 $p+q=12$가 된다.

29. 정답 117

(나)−(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$

b_n의 첫 항을 b, 공비를 r이라 하면,

$$b_1=b,\ b_2=br,\ b_3=br^2,\ b_4=br^3,\ b_5=br^4$$
$$|b_1|=b,\ |b_2|=-br,\ |b_3|=br^2,$$
$$|b_4|=-br^3,\ |b_5|=br^4$$
$$\therefore -2br(1+r^2)=40,\ br(1+r^2)=-20$$

b는 자연수 r은 음의 정수이고 b는 20의 양의 약수 중 하나이므로, 위 식을 만족하는 b, r은 $b=2$, $r=-2$가 유일하다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{5}b_n=2-4+8-16+32=22$$
$$\sum_{n=1}^{5}|b_n|=2+4+8+16+32=62$$

(가)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

(다)에서 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19$이다.

a_n은 등차수열이므로 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5a_3=5$에서 $a_3=1$이다.

또 a_n은 공차가 음의 정수여서 감소하는 수열이고

$\sum_{n=1}^{5}a_n\neq\sum_{n=1}^{5}|a_n|$이므로 a_4와 a_5중 적어도 하나는 음수이다. a_n의 첫 항을 a, 공차를 d라 하면,

(ⅰ) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\geq 0$이고 $a_5<0$이면

$$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=a_1+a_2+a_3+a_4-a_5=19$$
$$\sum_{n=1}^{5}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5$$
$$\therefore 2a_5=-14,\ a_5=-7$$

$a_5-a_3=-8=2d$에서 $d=-4$이고

$a_4=a_3+d=-3<0$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a_1,\ a_2,\ a_3\geq 0$이고 $a_4, a_5<0$이면

$$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=a_1+a_2+a_3-a_4-a_5=19$$

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5$$

$a_4+a_5 = -7$, $a_1+a_2+a_3 = 12$,

$\therefore a = 7$ 이고 $d = -3$

따라서

$a_7 = 7+6\times(-3) = -11$, $b_7 = 2\times(-2)^6 = 128$

이므로 $a_7+b_7 = 117$

30. 정답 5

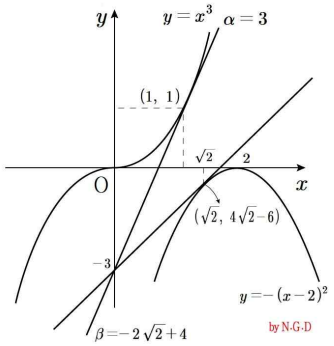
조건 (가)에 만족하는 $f(x) = x^2(x+p)$라고 하자.

조건 (가)에 만족하는 $g(x) = -(x-2)^2$라고 하자.

조건 (나) : $f'(x) = 3x^2+2px$

$y = f(x)$위의 점 $(t,\ t^3+pt^2)$에서 접선의 방정식은

$$y = (3t^2+2pt)(x-t) + (t^3+pt^2)$$



점 $(2,\ 0)$을 지나므로 대입하면

$$0 = 6t^2+4pt-3t^3-2pt^2+t^3+pt^2$$
$$-2t^3+(6-p)t^2+4pt = 0$$
$$t\{-2t^2+(6-p)t+4p\} = 0$$

(ⅰ) 이차식에서 근이 0인 경우

$p = 0$

(ⅱ) 이차식이 중근을 갖는 경우

$$D = (6-p)^2+32p$$
$$= p^2+20p+36$$
$$= (p+2)(p+18) = 0$$
$$\therefore\ p = -2 \text{ 또는 } p = -18$$

조건 (다)에서

(ⅰ) $p = 0$

(ⅱ) $p = -2$

(ⅲ) $p = -18$

(ⅱ)와 (ⅲ)은 만족하지 않는다.

따라서 $f(x) = x^3$, $g(x) = -(x-2)^2$이다.

직선 l에서 $y = 3t^2(x-t)+t^3$ $(t>0)$

$(0,\ -2)$를 대입하면 $-2 = -2t^2$

$\therefore t = 1$

직선 m에서

$$y = -2(t-2)(x-t)-(t-2)^2$$
$$-2 = (-2t+4)(-t)-t^2+4t-4$$
$$-2 = 2t^2-4t-t^2+4t-4$$
$$2 = t^2$$
$$t = \sqrt{2}\ \ (\because t>0)$$

그러므로

직선 m의 기울기 : $-2\sqrt{2}+4 = \beta$

직선 l의 기울기 : $3 = \alpha$

$$\alpha-\beta = 2\sqrt{2}-1$$
$$\therefore a = -1,\ b = 2$$
$$\therefore\ a^2+b^2 = 5$$

배포본이 아닌 hwp원본이 필요하시면 아래주소에서 다운받으실 수 있습니다. http://cafe.daum.net/byngd

[NGD수학 전문가 그룹]

[NGD수학 전문가 그룹]

감성샘 - 서울대치 - 감성수학
강유식 - 대전 - 수학의자유XO
강 혁 - 서울대치 - PMC수학학원
권세욱 - 경기광명 - 하피수학학원
김 건 - 서울노원 - 수와식학원
김경래 - 경기부천 - 수학공장
김광수 - 경남양산 - 넥서스학원
김광현 - 인천송도 - 선행과심화수학전문학원
김동영 - 대구수성 - 통쾌한수학
김성민 - 충남천안 - GoMS lab.
김수진 - 서울대치 - 토나학원
김영민 - 서울서초 - 다온수학학원
김 훈 - 부산 - 해오름수학
남연주 - 서울대치
박연배 - 경기덕양 - 송수학학원
박원식 - 서울노원 - 수아인수학학원
박효성 - 인천송도 - 미래듀학원
손 권 - 부산북구 - 고대일프로수학학원
신동관 - 경기분당 - 신샘수학학원
싸이쌤 - 충남서천 - 쌤수학학원
수 딴 - 부산동래 - 수딴's수학학원
오창용 - 경기광명 - 시스템수학학원
윤홍식 - 서울송파 - 구주이배수학학원
이경용 - 서울용산 - 열공학원
이광희 - 서울양천 - 이광재수학학원
이대가 - 서울노원 - 대가수학, 용인대치프라임MS수학학원
이용우 - 강원홍천 - Blooming time class
이종환 - 서울마포 - 카이수학전문학원
이태웅 - 서울대치 - 대치수신학원
조훈진 - 서울양천 - 바람수학
주민우 - 경기용인 - 미래인학원
지영환 - 인천서구 - 이능학원
최승인 - 서울마포 - 종로학원
최자호 - 경기동탄 - 자호수학전문학원
허 접 - 서울대방 - 한오름수학
황완수 - 경기안양 - 황선생수학