수리 영역

[가형]

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 〔2점〕 **정답** ③

$\log_3\frac{9}{2}+\frac{\log_5 6}{\log_5 3}=\log_3\frac{9}{2}+\log_3 6$

$=\log_3\left(\frac{9}{2}\times 6\right)$

$=\log_3 3^3=3$

2. 계산 능력 – 행렬과 그래프 〔2점〕 **정답** ⑤

$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1+2a & a+ab\\ 2+2b & 2a+b^2\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}1+2a & a+ab\\ 2+2b & 2a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$

$a=-1,\ b=-1$

$\therefore a+b=-2$

3. 이해력 – 미분법 〔2점〕 **정답** ④

$f'(x)=3x^2-8x$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$=3\cdot 2^2-8\cdot 2=-4$

4. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 **정답** ②

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{bx}{e^x+x+a}=a$ ……………………… ㉠

극한값 a가 0이 아니고 $x\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 0}(e^x+x+a)=0$

$1+a=0$

$\therefore a=-1$

이때, ㉠에서

$\lim_{x\to 0}\frac{bx}{e^x+x-1}=-1$

$\lim_{x\to 0}\frac{b}{\frac{e^x-1}{x}+1}=-1$

$\frac{b}{2}=-1$

$b=-2$

$\therefore ab=2$

5. 이해력 – 삼각함수 〔3점〕 **정답** ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 할 때,

(부채꼴 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}r^2\theta$

(삼각형 OHB의 넓이)$=\frac{1}{2}(r\cos\theta)(r\sin\theta)$

$=\frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \frac{r^2}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}r^2\theta$

$\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\therefore \theta=\sin 2\theta$

6. 이해력 – 일차변환과 행렬 〔3점〕 **정답** ③

$g\circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

직선 $3x-2y-1=0$ 위의 점 $(x,\ y)$가 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 $(x',\ y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2x'-y'\\ -x'+y'\end{pmatrix}$

$3x-2y-1=0$에 $x=2x'-y'$, $y=-x'+y'$을 대입하면

$3(2x'-y')-2(-x'+y')-1=0$

$\therefore 8x'-5y'-1=0$

따라서, 구하는 도형의 방정식은

$8x-5y-1=0$

$\therefore a+b=8-5=3$

7. 이해력 – 적분법 〔3점〕 **정답** ②

$\int_x^{x+2}f(t)dt=x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x+2)-f(x)=2x$

$\therefore \int_{10}^{50}f'(t)dt$

$=\Big[f(t)\Big]_{10}^{50}$

$=f(50)-f(10)$

$=\{f(50)-f(48)\}+\{f(48)-f(46)\}$
$+\cdots+\{f(12)-f(10)\}$

$=2(48+46+44+\cdots+10)$

$=2\times\frac{20}{2}(48+10)$

$=1160$

8. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 **정답** ①

$A=a\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=a^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=a^2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=a^4\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$

$=a^4\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$

따라서, 행렬 A^4의 모든 성분의 합은

$a^4(-4-4)=-8\times a^4=-8\times(\sqrt[4]{8})^4$

$=-64$

9. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 **정답** ①

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n+1}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}+(-2)^n-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+(-2)^{n-1}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-2-\frac{1}{(-2)^{n-1}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+1+\frac{1}{(-2)^{n-1}}}$

$=-2$

$f(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+1}+(-2)^{-n}-1}{(-2)^n+(-2)^{-n+1}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+(-2)^{-2n}-\frac{1}{(-2)^n}}{1+(-2)^{-2n+1}+\frac{1}{(-2)^n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{(-2)^{2n}}-\frac{1}{(-2)^n}}{1+\frac{1}{(-2)^{2n-1}}+\frac{1}{(-2)^n}}$

$=-2$

$\therefore f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f(-2)=-2$

10. 이해력 – 적분법 〔4점〕 **정답** ②

$\int e^x\ln x\,dx=e^x\ln x-\int e^x\cdot\frac{1}{x}dx$

이때, $\int e^x\cdot\frac{1}{x}dx=e^x\cdot\frac{1}{x}+\int e^x\cdot\frac{1}{x^2}dx$

$\therefore \int e^x\ln x\,dx=e^x\ln x-e^x\cdot\frac{1}{x}-\int e^x\cdot\frac{1}{x^2}dx$

$\int\left(e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x^2}\right)dx=e^x\ln x-\frac{e^x}{x}$

$\therefore \int_1^e e^x\left(\ln x+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\left[e^x\ln x-\frac{e^x}{x}\right]_1^e=e^e-\frac{e^e}{e}-(-e)$

$=e^e-e^{e-1}+e$

11. 추론 능력(증명) – 수열 〔3점〕 **정답** ③

(ii) $n=m$(m은 자연수)일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{k+1}a_k=2m^2$

위 등식의 양변에

$(-1)^{2m+1}a_{2m}+(-1)^{2m+2}a_{2m+1}$

$=-a_{2m}+a_{2m+1}$

$=-2m(2m+1)+(2m+1)(2m+2)$

$=(2m+1)(-2m+2m+2)$

$=\boxed{4m+2}$

를 더하면

$\sum_{k=1}^{2m-1}(-1)^{k+1}a_k+4m+2$

$=2m^2+4m+2$

$=\boxed{2(m+1)^2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{\boxed{2m+1}}(-1)^{k+1}a_k=2(m+1)^2$

이상에서 $f(m)=4m+2$, $g(m)=2(m+1)^2$, $h(m)=2m+1$이므로

$f(9)+g(9)+h(9)=38+200+19=257$

12. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔4점〕 **정답** ⑤

ㄱ. (참) $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

ㄴ. (참) $x\to +0$일 때 $|x|\to +0$이므로

$\lim_{x\to +0}f(|x|)=\lim_{x\to +0}f(x)=1$

$x\to -0$일 때 $|x|\to +0$이므로

$\lim_{x\to -0}f(|x|)=\lim_{x\to +0}f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}f(|x|)=1$

ㄷ. (참) $\lim_{x\to+0} f(x)=1$,

$\lim_{x\to+0} f(-x)=\lim_{x\to-0} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to+0} |f(x)-f(-x)|=|1-0|=1$

$\lim_{x\to-0} f(x)=0,\ \lim_{x\to-0} f(-x)=\lim_{x\to+0} f(x)=1$

이므로

$\lim_{x\to-0} |f(x)-f(-x)|=|0-1|=1$

$\therefore \lim_{x\to0} |f(x)-f(-x)|=1$

13. 추론 능력(추측) – 행렬과 그래프 [3점] **정답** ⑤

ㄱ. (참) $ABC=O$라고 하면

$A^{-1}ABCC^{-1}=A^{-1}OC^{-1}$

에서 $EBE=O$이므로 $B=O$이다.

그런데 영행렬의 역행렬은 존재하지 않으므로 행렬 B의 역행렬이 존재한다는 조건에 모순이다.

$\therefore ABC\neq O$

ㄴ. (참) $(C^{-1}B)^{-1}=B^{-1}(C^{-1})^{-1}=B^{-1}C$이므로

$AC=(C^{-1}B)^{-1}$에서

$AC=B^{-1}C$

이때, $ACC^{-1}=B^{-1}CC^{-1}$에서 $A=B^{-1}$이다.

$\therefore AB=B^{-1}B=E$

ㄷ. (참) $AC=CB$에서 $ACC^{-1}=CBC^{-1}$이므로

$A=CBC^{-1}$이다.

$\therefore A^3=(CBC^{-1})(CBC^{-1})(CBC^{-1})$

$=CB^3C^{-1}$

$=CCC^{-1}=C$

14. 이해력 – 수열 [4점] **정답** ①

$b_{2n-1}=-n,\ b_{2n}=n$이므로

$-b_{2n-1}=b_{2n}=n$

$\{b_n\}$: $-1, 1, -2, 2, -3, 3, \cdots$

$\therefore a_{2n-1}=a_1+\sum_{k=1}^{2n-2} b_k$

$=1+\{-1+1-2+2-\cdots-(n-1)+(n-1)\}$

$=1$

$a_{2n}=a_1+\sum_{k=1}^{2n-1} b_k$

$=1+(-1+1-2+2-\cdots-n)$

$=-(n-1)$

이므로

$\sum_{k=1}^{50} a_k=1-0+1-1+1-2+\cdots-23+1-24$

$=25\times1-(1+2+3+\cdots+24)$

$=25-\dfrac{24\cdot25}{2}=-275$

15. 수학 내적 문제 해결 능력 – 함수의 극한과 연속 [4점] **정답** ④

선분 BP의 중점을 H라 하자.

$\triangle ABP$는 $\overline{AB}=\overline{AP}=\sin\theta$인 이등변삼각형이고,

$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$\overline{HP}=\overline{AP}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\sin\theta\sin\theta=\sin^2\theta$

$\therefore \overline{BP}=2\overline{HP}=2\sin^2\theta$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\dfrac{\overline{BP}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\dfrac{2\sin^2\theta}{\theta^2}$

$=2\lim_{\theta\to+0}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

$=2\cdot1^2=2$

16. 수학 외적 문제 해결 능력 – 방정식과 부등식 [4점] **정답** ⑤

갑이 한 시간 동안 이동한 거리를 $x$km라 하면 을이 한 시간 동안 이동한 거리는 $(2x+2)$km이므로 갑과 을의 속력은 각각 $x$km/시, $(2x+2)$km/시이다.

따라서, 주어진 조건에 의해

$\dfrac{10}{x}-\dfrac{20}{2x+2}=\dfrac{1}{2}$

위 등식의 양변에 $x(2x+2)$를 곱하면

$10(2x+2)-20x=x(x+1)$

$x^2+x-20=0$

$(x+5)(x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>0)$

따라서, 구하는 거리의 차는

$(2x+2)-x=x+2=6$(km)

17. 추론 능력(추측) – 미분법 [4점] **정답** ③

ㄱ. (참) $g''(0)=|\sin0|f(0)=0$이다.

점 $(0, g(0))$이 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이면 $x=0$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀐다.

그런데 $|\sin x|\geq0$이고 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $f(0)\neq0$이라고 가정하면 $x=0$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호는 바뀌지 않는다. 따라서, $f(0)=0$이어야 한다.

ㄴ. (참) ㄱ에서 $f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to+0}\dfrac{|\sin x|f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\left\{\dfrac{\sin x}{x}\cdot f(x)\right\}$

$=1\times f(0)=0$

$\lim_{x\to-0}\dfrac{|\sin x|f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\left\{-\dfrac{\sin x}{x}\cdot f(x)\right\}$

$=-1\times f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}\dfrac{g''(x)-g''(0)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{|\sin x|f(x)}{x}=0$

따라서, 함수 $g''(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. (거짓) [반례] $f(x)=x^2$이라 하면 $g''(0)=0$이므로 함수 $g''(x)$가 $x=0$에서 미분가능하지만 $x=0$의 좌우에서 $g''(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.

따라서, 점 $(0, g(0))$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이 아니다.

18. 수학 내적 문제 해결 능력 – 미분법 [4점] **정답** ②

점 P의 좌표를 $(a, a^3)\ (a>0)$이라 하고 두 접선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 α, β라 하자.

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (a, a^3)에서의 접선 l_1의 방정식은

$ax+a^3y=r^2$

이때, 직선 l_1의 기울기는 $-\dfrac{1}{a^2}$이므로

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{a^2}$

또, 함수 $y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 직선 l_2의 기울기는 $3a^2$이다.

$\therefore \tan\beta=3a^2$

이때, $\beta+\theta=\alpha$이므로 $\theta=\alpha-\beta$이다.

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-\dfrac{1}{a^2}-3a^2}{1+\left(-\dfrac{1}{a^2}\right)\cdot3a^2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+3a^2\right)$

이때, $a^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a^2}+3a^2\right)\geq\sqrt{\dfrac{1}{a^2}\cdot3a^2}=\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 }\dfrac{1}{a^2}=3a^2\text{, 즉 }a=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서, $\tan\theta$의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다.

19. 수학 외적 문제 해결 능력 – 지수함수와 로그함수 [3점] **정답** ④

방사성 원소 A의 양이 1년마다 $r(0<r<1)$배로 줄어든다고 하면 A의 반감기가 30년이므로

$r^{30}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$

이 방사성 원소 10kg의 n년 후의 양은

$10\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}\right\}^{n}$이므로

$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}\le 0.1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}\le\frac{1}{100}$

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{30}}\le\log\frac{1}{100}$

$\log 2^{-\frac{n}{30}}\le\log\frac{1}{100}$

$-\frac{n}{30}\log 2\le -2$

$n\ge\frac{60}{\log 2}$

$n\ge\frac{60}{0.3}$

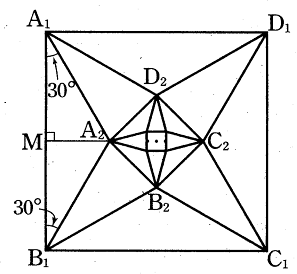
$n\ge 200$

따라서, 최소한 200년이 지나야 한다.

20. 추론 능력(추측) - 수열의 극한 〔4점〕 정답 ②

선분 A_1B_1의 중점을 M이라 하면 $\overline{A_1M}=3$, $\overline{A_2M}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{A_1A_2}=2\sqrt{3}$



$\therefore\ \triangle A_1A_2D_2=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}\times\sin 30^\circ=3$

$\therefore\ S_1=4\times 3=12$

삼각형 $A_1A_2D_2$에서

$\overline{A_2D_2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ}$

$=\sqrt{12+12-12\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\left\{\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{6}\right\}^2$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{12}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{36}{\sqrt{3}+1}$

$=18(\sqrt{3}-1)$

21. 이해력 - 적분법 〔4점〕 정답 ①

점 P가 점 A를 출발한 지 t초 후의 x좌표를 $f(t)$라 하면

$\overline{AP}=f(t)+\pi$

또한, t초 후의 회전체의 부피를 $V(t)$라 하면

$V(t)=\pi\int_{-\pi}^{f(t)}4\cos^2\frac{x}{2}dx$

$=4\pi\int_{-\pi}^{f(t)}\frac{1+\cos x}{2}dx$

$=2\pi\Big[x+\sin x\Big]_{-\pi}^{f(t)}$

$=2\pi\{f(t)+\sin f(t)+\pi\}$

$=2\pi\{f(t)+\sin f(t)\}+2\pi^2$

$V'(t)=2\pi\{f'(t)+f'(t)\cos f(t)\}$

$t=\alpha$일 때 점 P가 원점을 지난다고 하면 $f(\alpha)=0$이므로

$V'(\alpha)=2\pi\{f'(\alpha)+f'(\alpha)\cos f(\alpha)\}$

$=2\pi f'(\alpha)(1+\cos 0)$

$=4\pi f'(\alpha)$

$V'(\alpha)=\pi$이므로

$4\pi f'(\alpha)=\pi$

$\therefore\ f'(\alpha)=\frac{1}{4}$

이때, $\frac{d}{dt}\overline{AP}=f'(t)$이므로 구하는 선분 AP의 길이의 변화율은

$f'(\alpha)=\frac{1}{4}$

22. 이해력 - 미분법 〔3점〕 정답 21

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가진다.

$f(1)=k-1=20$에서

$k=21$

따라서, 극댓값은

$f(0)=k=21$

23. 이해력 - 함수의 극한과 연속 〔3점〕 정답 25

$x-1=t$로 치환하면 $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=10$

$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+4)f(x-1)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1}$

$=\frac{5}{2}\times 10=25$

24. 이해력 - 일차변환과 행렬 〔3점〕 정답 9

원 C가 옮겨진 원 C'의 방정식은

$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=r^2$ 즉, $x^2+y^2=r^4$이다.

이때, 원 C의 외부와 원 C'의 내부의 공통 부분의 넓이가 6π이므로

$r^4\pi-r^2\pi=6\pi$

$r^4-r^2-6=0$

$(r^2-3)(r^2+2)=0$

$r^2=3$

$\therefore\ r^4=9$

25. 이해력 - 삼각함수 〔3점〕 정답 11

$\sin 2x+\cos^2 x-\sin^2 x=-1$에서

$\sin 2x+\cos 2x=-1$

$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\therefore\ \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

이때, $\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 4\pi+\frac{\pi}{4}$이므로

$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \frac{15}{4}\pi$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

따라서, 구하는 모든 실근의 합은 $\frac{9}{2}\pi$이다.

$\therefore\ p+q=11$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 〔3점〕 정답 201

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha_n+\beta_n=-\frac{a_{n+1}}{a_n},\ \alpha_n\beta_n=-\frac{5}{a_n}$

$(\alpha_n-1)(\beta_n-1)=2$에서

$\alpha_n\beta_n-(\alpha_n+\beta_n)+1=2$

$-\frac{5}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_n}+1=2$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+5(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n=5n-3$

$a_n>1000$에서

$5n-3>1000$

$5n>1003$

$n>200.6$

따라서, 구하는 자연수 n의 최솟값은 201이다.

27. 이해력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 6

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$\log_3\alpha=k$에서

$\alpha=3^k$

$\log_{\sqrt{3}}\frac{\beta}{4}-2=k$에서

$\beta=4(\sqrt{3})^{k+2}$

이때, $\overline{AB}=27$이므로

$\beta-\alpha=27$

$4(\sqrt{3})^{k+2}-3^k=27$

$(\sqrt{3})^{2k}-12(\sqrt{3})^k+27=0$

$(\sqrt{3})^k=t(t>0)$라 하면

$t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=9$

따라서, $3^{\frac{k}{2}}=3$에서 $k=2$이고, $3^{\frac{k}{2}}=9$에서 $k=4$이므로 구하는 모든 양수 k의 값의 합은 $2+4=6$이다.

28. 이해력 - 방정식과 부등식 〔4점〕 정답 20

$\frac{(x-30)^2(x-2a)^3}{x+a}\le 0$

$(x+a)(x-30)^2(x-2a)^3\le 0(x\ne -a)$

$(x+a)(x-2a)\le 0$ 또는 $x=30\ (x\ne -a)$

이때, a가 자연수이므로 주어진 부등식의 해는

$-a<x\le 2a$ 또는 $x=30$

따라서, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 다음과 같다.

(i) $30\le 2a$일 때

$2a-(-a)=3a$(개)이므로 $3a=60$에서

$a=20$

(ii) $2a<30$일 때

$2a-(-a)+1=3a+1$(개)이므로 $3a+1=60$에서

$a=\frac{59}{3}$ (모순)

(i), (ii)에서 구하는 자연수 a의 값은 20이다.

29. 추론 능력(추측) - 일차변환과 행렬 〔4점〕 정답 11

등비수열의 공비를 r라 하면

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & ar \\ ar^2 & ar^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x'=a(x+ry),\ y'=ar^2(x+ry)$

이때, 직선 $y=2x+3$ 위의 모든 점이 점 $(12, p)$로 옮겨지므로 $y=2x+3$을 만족하는 모든 실수 x, y에 대하여 $x+ry$의 값은 상수이어야 한다.

따라서, $y=2x+3$에서 $2x-y=-3$이므로

$r=-\frac{1}{2}$일 때

$x+ry=x-\frac{1}{2}y$

$=\frac{1}{2}(2x-y)=-\frac{3}{2}$

이때,

$x'=a(x+ry)=-\frac{3}{2}a$

$y'=ar^2(x+ry)$

$=-\frac{3}{2}ar^2=-\frac{3}{8}a$

이므로

$-\frac{3}{2}a=12$

$-\frac{3}{8}a=p$

$\therefore a=-8,\ p=3$

$\therefore p-a=3-(-8)=11$

30. 이해력 - 수열의 극한 〔4점〕 정답 16

원 C_{3n}은 두 원 C_n, C_{9n}과 한 점에서 만나고 $8n-2$개의 원 $C_{n+1}, C_{n+2}, \cdots, C_{3n-1}, C_{3n+1}, C_{3n+2}, \cdots, C_{9n-1}$과 각각 서로 다른 두 점에서 만나므로

$a_{3n}=1\times2+2\times(8n-2)=16n-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n-2}{n}=16$

● [나형]

1. 가형과 동일 〔2점〕 정답 ③

2. 가형과 동일 〔2점〕 정답 ⑤

3. 계산 능력 - 지수함수와 로그함수 〔2점〕 정답 ②

$\left(3-2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

4. 이해력 - 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ②

구하는 행의 개수는 주어진 그래프의 꼭짓점 중에서 연결된 변의 개수가 4인 꼭짓점의 개수와 같다. 따라서, 구하는 행의 개수는 4이다.

5. 계산 능력 - 수열의 극한 〔3점〕 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1-\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}-\sqrt{\frac{1}{n}}}=1$

6. 이해력 - 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ①

$(A-2E)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}-2E\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\therefore p+q=12$

7. 이해력 - 수열의 극한 〔3점〕 정답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log_2 x^2)^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log_2 x^2}{5}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\frac{\log_2 x^2}{5}<1$이어야 한다.

$\therefore -5<\log_2 x^2<5$

$2^{-5}<x^2<2^5$

$\therefore 2^{-\frac{5}{2}}<x<2^{\frac{5}{2}}$

8. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ①

9. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ①

10. 추론 능력(추측) - 수열의 극한 〔3점〕 정답 ②

ㄱ. (거짓) 【반례】 $a_n=\frac{n}{n+1}$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{n^2}{n+1}=\infty$이므로 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 발산한다.

ㄴ. (참) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\beta$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+b_{2n})=\alpha+\beta$

따라서, 수열 $\{a_{n+1}+b_{2n}\}$도 수렴한다.

ㄷ. (거짓) 【반례】 $a_n=b_n=(-1)^n$이면 $a_nb_n=1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산(진동)한다.

11. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ③

12. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ⑤

13. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ⑤

14. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ①

15. 수학 외적 문제 해결 능력 - 행렬과 그래프 〔4점〕 정답 ③

남학생의 수와 여학생의 수의 합이 40이므로

$x+y=40$ ·· ㉠

또, 남학생들의 점수의 합은 $65x$(점), 여학생들의 점수의 합은 $73y$(점), 40명 전체의 점수의 합은 $40m$(점)이므로

$65x+73y=40m$ ·· ㉡

㉠, ㉡을 행렬을 이용하여 나타내면

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 65 & 73 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 40m \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 65 & 73 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 40 \\ 40m \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 73 & -1 \\ -65 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 40m \end{pmatrix}$

$=5\begin{pmatrix} 73 & -1 \\ -65 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

$\therefore a=5,\ b=-65$

$\therefore a+b=5-65=-60$

16. 이해력 - 함수의 극한과 연속 〔4점〕 정답 ③

$\lim_{x\to-1-0}[x]=-2$이므로

$\lim_{x\to-1-0}[x]^2=(-2)^2=4$

$\lim_{x\to-1+0}[x]=-1$이므로

$\lim_{x\to-1+0}[x]^2=(-1)^2=1$

$\therefore \lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}([x]^2+ax[x])$

$=4+a(-1)(-2)$

$=2a+4$

$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}([x]^2+ax[x])$

$=1+a(-1)(-1)$

$=a+1$

$f(-1)=[-1]^2+a(-1)[-1]=a+1$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$2a+4=a+1$

$\therefore a=-3$

17. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속 〔4점〕 정답 ⑤

$\mathrm{H}(a, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=b$

두 점 $\mathrm{P}(a, b)$와 $\mathrm{A}(1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{b}{a-1}(x-1)$

이 직선이 직선 $x=-1$과 만나는 점 Q의 좌표는

$\left(-1, \frac{2b}{1-a}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{QB}}=\frac{2b}{1-a}$

한편, 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

$\therefore b^2=1-a^2$

$\therefore \lim_{a\to 1-0}(\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{QB}})=\lim_{a\to 1-0}\frac{2b^2}{1-a}$

$=\lim_{a\to 1-0}\frac{2(1-a^2)}{1-a}$

$=\lim_{a\to 1-0}2(1+a)=4$

18. 추론 능력(추측) - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ ③

$f(8)=\log_2 8=3$

$f^2(8)=f(3)=\log_2 3$

$\log_2 3>1$이므로

$f^3(8)=f(\log_2 3)=\log_2(\log_2 3)$

이때, $\log_2 3<2$이므로 $\log_2(\log_2 3)<\log_2 2=1$이다.

$\therefore f^4(8)=f(\log_2(\log_2 3))$

$=2^{\log_2(\log_2 3)}=\log_2 3$

$f^5(8)=f(\log_2 3)=\log_2(\log_2 3)$

$f^6(8)=f(\log_2(\log_2 3))=\log_2 3$

$\therefore f^{2n+1}(8)=\log_2(\log_2 3)$

$f^{2n}(8)=\log_2 3(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore f^{2012}(8)=\log_2 3$

19. 가형과 동일 〔3점〕 $\boxed{\text{정답}}$ ④

20. 가형과 동일 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ ②

21. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ ④

점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n이라 하자.

$\mathrm{A}_n(a_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(b_n, 3^{b_n})$이므로 $3^{b_n}=2^{a_n}$에서

$b_n=\log_3 2^{a_n}=a_n\log_3 2$ ………………………… ㉠

$\therefore \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_n-b_n$

$=(1-\log_3 2)a_n$

$=a_n\log_3\frac{3}{2}$

이때, $a_{n+1}=b_n$이므로 ㉠에서

$a_{n+1}=(\log_3 2)a_n$

따라서, 수열 $\{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\}$은 첫째항이

$\left(\log_3\frac{3}{2}\right)a_1=\log_3\frac{3}{2}$이고, 공비가 $\log_3 2$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\frac{\log_3\frac{3}{2}\{1-(\log_3 2)^{10}\}}{1-\log_3 2}$

$=\frac{\log_3\frac{3}{2}\{1-(\log_3 2)^{10}\}}{\log_3\frac{3}{2}}$

$=1-(\log_3 2)^{10}$

22. 계산 능력 - 수열 〔3점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 400

$\sum_{k=1}^{20}(41-2k)=39+37+35+\cdots+3+1$

$=1+3+5+\cdots+39$

$=\frac{20}{2}(1+39)=400$

23. 가형과 동일 〔3점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 25

24. 이해력 - 지수함수와 로그함수 〔3점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 625

$1<\log 16<2$이므로

$-2<-\log 16<-1$

$-2<\log\frac{1}{16}<-1$

따라서, $\log\frac{1}{16}$의 지표는 -2이므로 $\log\frac{1}{16}$의 가수는

$\log\frac{1}{16}+2=\log\frac{100}{16}=\log\frac{25}{4}$

$\therefore \log N=k+\log\frac{25}{4}$

$=\log\left(\frac{25}{4}\times 10^k\right)$($k$는 정수)

따라서, $k=2$일 때 자연수 N은 최솟값을 가진다.

$\therefore N=\frac{25}{4}\times 10^2=25^2=625$

25. 이해력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 26

$\sqrt[12]{8^n}=2^{\frac{3n}{12}}=2^{\frac{n}{4}}$

따라서, $2^{\frac{n}{4}}$이 정수가 되려면

$n=4k(k=0, 1, 2, 3, \cdots)$ 꼴이어야 한다.

$\therefore n=0, 4, 8, 12, \cdots$

따라서, 100 이하의 정수 n의 개수는 26이다.

26. 가형과 동일 〔3점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 201

27. 가형과 동일 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 6

28. 이해력 - 행렬과 그래프 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 25

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}=kE$이므로 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬은 $\frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$이다.

두 직선 $ax+by=1$, $cx+dy=-2$의 교점의 좌표를 (α, β)라 하면 $x=\alpha$, $y=\beta$는 연립방정식

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$의 해이다.

$\therefore \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\therefore \alpha=-\frac{3}{k}$, $\beta=-\frac{4}{k}$

이때, 점 (α, β)는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=1$

$\frac{9+16}{k^2}=1$

$\therefore k^2=25$

29. 이해력 - 수열 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 22

주어진 순서도에서 인쇄되는 n의 값은

$\frac{50!}{3^n}$=(자연수)를 만족시키는 자연수 n의 최댓값과 같다.

50 이하의 3의 배수의 개수는 16,

50 이하의 3^2의 배수의 개수는 5,

50 이하의 3^3의 배수의 개수는 1이므로

구하는 n의 값은

$16+5+1=22$

30. 가형과 동일 〔4점〕 $\boxed{\text{정답}}$ 16