

제 2 교시

**수리 영역 가형**1.  $\log_3 \frac{9}{2} + \frac{\log_5 6}{\log_5 3}$  을 계산하면? [2점]

- |     |     |
|-----|-----|
| ① 1 | ② 2 |
| ③ 3 | ④ 4 |
| ⑤ 5 |     |

2. 행렬  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}$ 에 대하여  $A^2 = aE$  일 때, 두 상수  $a, b$ 의 합  $a+b$ 의 값은? (단,  $E$ 는 단위행렬이다.) [2점]

- |      |      |
|------|------|
| ① 2  | ② 1  |
| ③ 0  | ④ -1 |
| ⑤ -2 |      |

3. 함수  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$  의 값은?

- |       |      |
|-------|------|
| ① -10 | ② -8 |
| ③ -6  | ④ -4 |
| ⑤ -2  |      |

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{bx}{e^x + x + a} & (x \neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

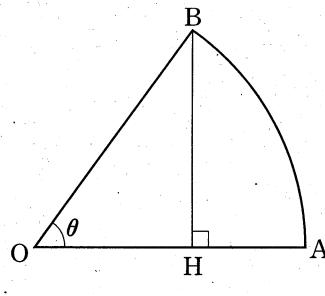
가  $x=0$ 에서 연속일 때, 두 상수  $a, b$ 의 곱  $ab$ 의 값은? (단,  $a \neq 0$ 이고,  $e$ 는 자연로그의 밑이다.) [3점]

- |     |     |
|-----|-----|
| ① 1 | ② 2 |
| ③ 3 | ④ 4 |
| ⑤ 5 |     |

5. 그림과 같이 중심각의 크기가 예각인 부채꼴 OAB의 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 BH가 이 부채꼴의 넓이를 이등분할 때, 이 부채꼴의 중심각의 크기를  $\theta$ (rad)라 하자. 다음 중 옳은 것은?

(3점)

- ①  $\theta = \sin \frac{\theta}{2}$       ②  $\theta = \cos \frac{\theta}{2}$   
 ③  $\theta = \tan \frac{\theta}{2}$       ④  $\theta = \sin 2\theta$   
 ⑤  $\theta = \cos 2\theta$



6. 두 일차변환  $f, g$ 를 나타내는 행렬이 각각  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 일 때, 합성변환  $g \circ f$ 에 의하여 직선  $3x - 2y - 1 = 0$ 이 옮겨지는 도형의 방정식은  $ax + by - 1 = 0$ 이다. 이때, 두 상수  $a, b$ 의 합  $a+b$ 의 값은?

(3점)

- ① 1      ② 2  
 ③ 3      ④ 4  
 ⑤ 5

7. 모든 실수  $x$ 에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 등식  $\int_x^{x+2} f(t) dt = x^2$ 을 만족시킬 때,  $\int_{10}^{50} f'(t) dt$ 의 값은? (3점)

- ① 1120      ② 1160  
 ③ 1200      ④ 1240  
 ⑤ 1280

8.  $a = \sqrt[4]{8}$ 일 때, 행렬  $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & a \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬  $A^4$ 의 모든 성분의 합은? (3점)

- ① -64      ② -32  
 ③  $-16\sqrt{2}$       ④ -16  
 ⑤  $-8\sqrt{2}$

9. 실수  $a$ 에 대하여 함수  $f(a)$ 를

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} + a^{-n} - 1}{a^n + a^{-n+1} + 1}$$

로 정의할 때,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값은? (단,  $a \neq 0$ ) [3점]

① -2

$$\textcircled{2} -\frac{1}{2}$$

③ 0

$$\textcircled{4} \frac{1}{2}$$

⑤ 2

11. 수열  $\{a_n\}$ 의 일반항이  $a_n = n(n+1)$ 일 때, 다음은 모든 자연수  $n$ 에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} a_k = 2n^2 \quad (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(i)  $n=1$ 일 때 (좌변) = 2, (우변) = 2이므로 등식 (\*)이 성립한다.

(ii)  $n=m$  ( $m$ 은 자연수)일 때 등식 (\*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k+1} a_k = 2m^2$$

위 등식의 양변에  $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$\sum_{k=1}^{2m-1} (-1)^{k+1} a_k + \boxed{\text{(가)}} = \boxed{\text{(나)}}$$

이므로

$$\boxed{\text{(나)}} = \boxed{\text{(나)}}$$

따라서,  $n=m+1$ 일 때도 등식 (\*)이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수  $n$ 에 대하여 등식 (\*)이 성립한다.

10.  $\int_1^e e^x \left( \ln x + \frac{1}{x^2} \right) dx$ 의 값은? (단,  $e$ 는 자연로그의 밑이다.) [4점]

①  $e^e - e^{e-1} - e$

②  $e^e - e^{e-1} + e$

③  $e^e + e^{e-1} - e$

④  $e^e + e^{e-1}$

⑤  $e^e + e^{e-1} + e$

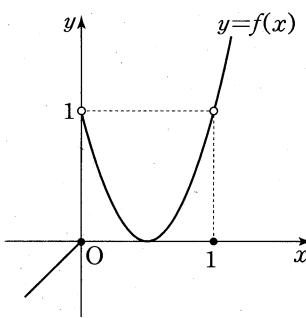
② 256

③ 257

④ 258

⑤ 259

12. 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



&lt;보기&gt;

- ㄱ.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$
- ㄴ.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(|x|) = 1$
- ㄷ.  $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - f(-x)| = 1$

- ① ㄱ                          ② ㄴ  
 ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄱ, ㄷ  
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 세 이차정사각행렬  $A, B, C$ 의 역행렬이 모두 존재할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단,  $E$ 는 단위행렬이고,  $O$ 는 영행렬이다.) [3점]

&lt;보기&gt;

- ㄱ.  $ABC \neq O$
- ㄴ.  $AC = (C^{-1}B)^{-1}$ 이면  $AB = E$ 이다.
- ㄷ.  $AC = CB$ 이고  $B^3 = C$ 이면  $A^3 = C$ 이다.

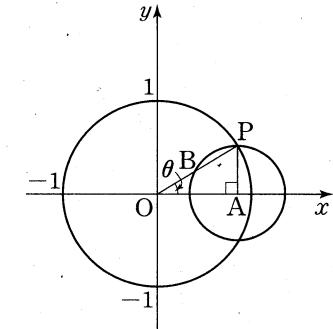
- ① ㄱ                          ② ㄴ  
 ③ ㄱ, ㄴ                      ④ ㄴ, ㄷ  
 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 첫째항이 1인 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여 수열  $\{b_n\}$ 을  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )이라 하면 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $b_{2n-1} = -b_{2n} = -n$

이 성립한다. 이때,  $\sum_{k=1}^{50} a_k$ 의 값은? [4점]

- ① -275                      ② -250  
 ③ -225                      ④ -200  
 ⑤ -175

15. 그림과 같이 좌표평면에서 중심이 원점  $O$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이고, 제1사분면에 있는 점  $P$ 가 있다. 점  $P$ 에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $A$ 라 하고, 점  $A$ 를 중심으로 하고 반지름이  $\overline{PA}$ 인 원이 직선  $OP$ 와 만나는 점을  $B$ 라 하자.  $\angle POA = \theta$ 라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{BP}}{\theta^2}$ 의 값은? (단, 두 점  $B, P$ 는 서로 다른 점이다.) [4점]



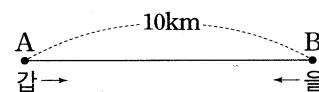
- ①  $\frac{1}{2}$                       ② 1  
 ③  $\sqrt{2}$                       ④ 2  
 ⑤  $2\sqrt{2}$

16. 10km 떨어진 두 지점 A, B가 직선

도로로 연결되어 있다. 갑은 A 지점을 출발하여 이 도로를 따라 B 지점까지

총 10km를 일정한 속력으로 걸어가고, 을은 B 지점을 출발하여 이 도로를 따라 A 지점까지 갔다가 바로 다시 B 지점까지 총 20km를 일정한 속력으로 자전거를 타고 왕복하기로 하였다. 한 시간 동안 을이 이동한 거리는 한 시간 동안 갑이 이동한 거리의 2배보다 2km 더 길다고 한다. 갑과 을이 동시에 출발하여 을이 B 지점에 도착하고 30분이 지난 후에 갑이 B 지점에 도착하였다. 이때, 갑과 을이 한 시간 동안 이동한 거리의 차는 몇 km인가? [4점]

- ① 4km
- ②  $\frac{9}{2}$  km
- ③ 5km
- ④  $\frac{11}{2}$  km
- ⑤ 6km



17. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수  $f(x)$ 와 이계도함수를 갖는 함수  $g(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여 등식

$$g''(x) = |\sin x|f(x)$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? [4점]

<보기>

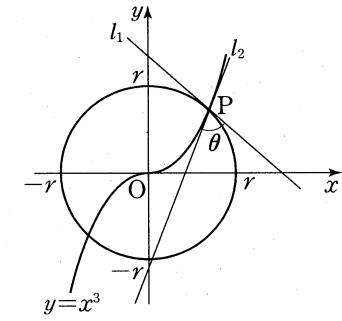
- ㄱ. 점  $(0, g(0))$ 이 곡선  $y=g(x)$ 의 변곡점이면  $f(0)=0$ 이다.
- ㄴ. 점  $(0, g(0))$ 이 곡선  $y=g(x)$ 의 변곡점이면 함수  $g''(x)$ 는  $x=0$ 에서 미분 가능하다.
- ㄷ. 함수  $g''(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분 가능하면 점  $(0, g(0))$ 은 곡선  $y=g(x)$ 의 변곡점이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 양의 실수  $r$ 에 대하여

원  $x^2+y^2=r^2$ 과 곡선  $y=x^3$ 의 제1사분면 위의 교점을 P라 하자. 점 P를 접점으로 하고 원에 접하는 직선을  $l_1$ , 점 P를 접점으로 하고 곡선  $y=x^3$ 에 접하는 직선을  $l_2$ 라 하자. 두 접선  $l_1, l_2$ 가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 할 때,  $\tan \theta$ 의 최솟값은? [4점]

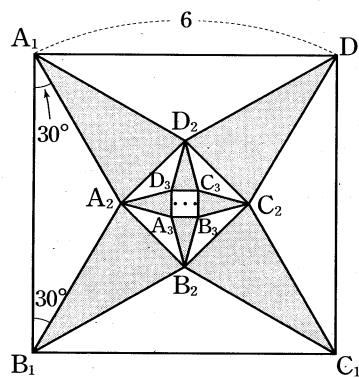
- ①  $2\sqrt{2}$
- ②  $\sqrt{3}$
- ③  $\sqrt{2}$
- ④ 1
- ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{3}$



19. 핵폐기물에 있는 방사성 원소의 양은 시간이 지남에 따라 일정한 비율로 줄어드는데, 그 양이 절반으로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 그 방사성 원소의 반감기라고 한다. 방사성 원소 A의 반감기는 30년이라고 한다. 현재 핵폐기물에 포함되어 있는 방사성 원소 A의 양이 10kg일 때, 이 방사성 원소 A의 양이 0.1kg 이하로 줄어드는 데 최소한  $n$ 년이 지나야 한다. 이때, 자연수  $n$ 의 값은? (단,  $\log 2=0.3$ 으로 계산한다.) [3점]

- ① 170
- ② 180
- ③ 190
- ④ 200
- ⑤ 210

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 에 대하여 점  $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 을 다음 조건을 모두 만족시키도록 정한다.  
(단,  $n=1, 2, 3, \dots$ )



(가) 네 개의 삼각형

$A_nB_nA_{n+1}, B_nC_nB_{n+1}, C_nD_nC_{n+1}, D_nA_nD_{n+1}$ 은 두 내각의 크기가  $30^\circ$ 로 같은 이등변삼각형이다.

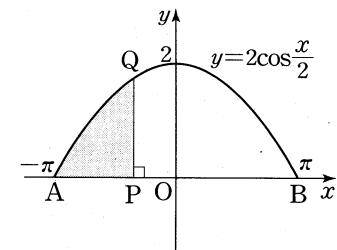
(나) 네 점  $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}, D_{n+1}$ 은 정사각형  $A_nB_nC_nD_n$ 의 내부에 있다.

네 개의 이등변삼각형  $A_nA_{n+1}D_{n+1}, B_nB_{n+1}A_{n+1}, C_nC_{n+1}B_{n+1}, D_nD_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

- ①  $18(3-\sqrt{3})$       ②  $18(\sqrt{3}-1)$   
③  $18\sqrt{3}$       ④  $18(\sqrt{3}+1)$   
⑤  $18(3+\sqrt{3})$

21. 좌표평면에서 점 P가 점

$A(-\pi, 0)$ 을 출발하여  $x$ 축을 따라 점  $B(\pi, 0)$ 에 도착할 때까지  $x$ 축의 양의 방향으로 움직일 때, 점 P를 지나고  $x$ 축에 수직인 직선과 곡선  $y=2\cos \frac{x}{2}$



가 만나는 점을 Q라 하자.  $\overline{PQ}$ 가 지나간 영역(어두운 부분)을  $x$ 축을 회전축으로 하여 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피가 매초  $\pi$ 의 일정한 비율로 증가한다고 한다. 점 P가 원점을 지나는 순간,  $\overline{AP}$ 의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]

- ①  $\frac{1}{4}$       ②  $\frac{1}{2}$   
③ 1      ④ 2  
⑤ 4

### 단답형

22. 함수  $f(x)=2x^3-3x^2+k$ 의 극솟값이 20일 때, 함수  $f(x)$ 의 극댓값을 구하시오. (단,  $k$ 는 상수이다.) [3점]

23. 함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 10$  일 때,

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+4)f(x-1)}{x^2-1}$ 의 값을 구하시오. (3점)



24. 행렬  $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ 로 나타내어지는 일차변환에 의하여 원  $C : x^2 + y^2 = r^2$  이 원  $C'$ 으로 옮겨진다. 원  $C$ 의 외부와 원  $C'$ 의 내부의 공통 부분의 넓이가  $6\pi$ 일 때,  $r^4$ 의 값을 구하시오. (단,  $r > 1$ ) (3점)

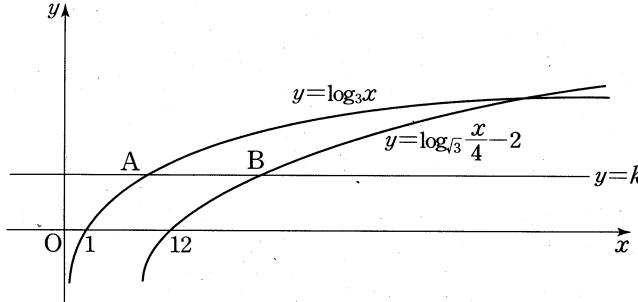
25.  $0 \leq x \leq 2\pi$  일 때, 삼각방정식

$$\sin 2x + \cos^2 x - \sin^2 x = -1$$

의 모든 실근의 합은  $\frac{q}{p}\pi$ 이다. 이때,  $p+q$ 의 값을 구하시오. (단,  $p, q$  는 서로소인 자연수이다.) (3점)

26. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $x$ 에 대한 이차방정식  $a_nx^2 + a_{n+1}x - 5 = 0$ 의 두 근을  $\alpha_n, \beta_n (n=1, 2, 3, \dots)$ 이라 하자. 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(\alpha_n - 1)(\beta_n - 1) = 2$ 이고  $a_1 = 2$ 일 때,  $a_n > 1000$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최솟값을 구하시오. (3점)

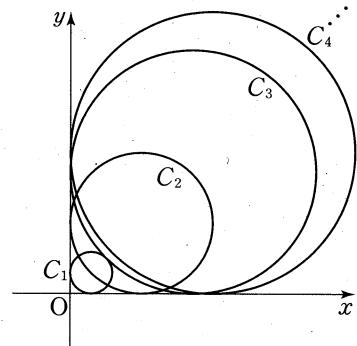
27. 그림과 같이 직선  $y=k$ 와 두 곡선  $y=\log_3 x$ ,  $y=\log_{\sqrt{3}} \frac{x}{4} - 2$ 가 만나는 점을 각각 A, B라 할 때,  $\overline{AB}=27$ 이 되도록 하는 모든 양수  $k$ 의 값의 합을 구하시오. (단, 점 B의  $x$ 좌표가 점 A의  $x$ 좌표보다 크다.) [4점]



28.  $x$ 에 대한 부등식  $\frac{(x-30)^2(x-2a)^3}{x+a} \leq 0$ 을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수가 60이 되도록 하는 자연수  $a$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 0이 아닌 네 실수  $a, b, c, d$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 행렬  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 가 나타내는 일차변환을  $f$ 라 하자. 일차변환  $f$ 에 의해 직선  $y=2x+3$  위의 모든 점이 점  $(12, p)$ 로 옮겨질 때,  $p-a$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에 다음 조건을 모두 만족시키는 원  $C_n$ 을 그린다. ( $n=1, 2, 3, \dots$ )



- (가) 원  $C_n$ 은 중심이 제1사분면에 있고,  $x$ 축과  $y$ 축에 동시에 접한다.  
 (나) 원  $C_{n+1}$ 의 반지름의 길이는 원  $C_n$ 의 반지름의 길이보다 길다.  
 (다) 원  $C_n$ 과 원  $C_{3n}$ 은 외접한다.

이때, 원  $C_n$ 과 다른 원들이 만나서 생기는 서로 다른 점의 개수를  $a_n$ 이라 하자. 예를 들면  $a_1=3, a_2=9$ 이다. 이때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{n}$ 의 값을 구하시오. [4점]

♣ 확인 사항

답안지에 필요한 사항을 정확히 기입(표기)하였는지 확인하시오.