수리 영역(가형)

1. $4^8=(2^2)^8=2^{16}$이므로

$\log_2 4^8=\log_2 2^{16}=16$

$\therefore$ (주어진 식)$=16^{-\frac{1}{2}}=(2^4)^{-\frac{1}{2}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

답 ①

2. $3A=B+2X$에서

$2X=3A-B$

$=3\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & -9\\ 6 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

따라서 구하는 합은 2이다.

답 ②

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{\sin 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot\frac{4}{3}\right\}$

$=\frac{4}{3}$

답 ⑤

4. $\cos(x+y)=\frac{3}{5}$에서

$\cos x\cos y-\sin x\sin y=\frac{3}{5}$ …… ㉠

$\cos(x-y)=\frac{1}{3}$에서

$\cos x\cos y+\sin x\sin y=\frac{1}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\cos x\cos y=\frac{7}{15}$

$\sin x\sin y=-\frac{2}{15}$

$\therefore \tan x\tan y=\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}$

$=-\frac{2}{7}$

답 ④

5. 주어진 방정식의 양변에 $(x-3)(x+3)$을 곱하면

$a(x+3)-a(x-3)=x-a$

$\therefore x=7a$

주어진 분수방정식의 해가 존재하지 않으려면 x의 값이 무연근이 되어야 한다.

$\therefore 7a=\pm 3$

$\therefore a=-\frac{3}{7}$ 또는 $a=\frac{3}{7}$

따라서 구하는 곱은

$-\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=-\frac{9}{49}$

답 ⑤

6. $\frac{dx}{d\theta}=-4\sin 2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-6\sin 3\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{-6\sin 3\theta}{-4\sin 2\theta}=\frac{3\sin 3\theta}{2\sin 2\theta}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 접선의 기울기는

$\frac{3\sin\frac{3}{4}\pi}{2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

답 ③

7. $x\sin\pi x=\int_1^{x^2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sin\pi x+\pi x\cos\pi x=2xf(x^2)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$\sin 2\pi+2\pi\cos 2\pi=4f(4)$

$\therefore 2\pi=4f(4)$

$\therefore f(4)=\frac{\pi}{2}$

답 ②

8. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 A라 하면

$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$에서

$AA\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ ($\because$ ㉠) …… ㉡

㉠, ㉡에서

$A\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore A^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=AA^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

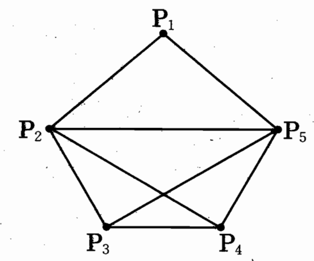
따라서 합성변환 $f\circ f\circ f$에 의해 점 P(1, 0)은 점 (1, 0)으로 옮겨진다.

답 ①

9. ㄱ. 행렬 A^2의 $(i, i)(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 성분은 꼭짓점 P_i에 연결된 변의 개수이다. 따라서 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 2, 4, 3, 3, 4이므로 그래프 G의 변의 개수는

$\frac{1}{2}(2+4+3+3+4)=8$ (참)

ㄴ. 5개의 꼭짓점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5에 연결된 변의 개수는 각각 2, 4, 3, 3, 4이다. 두 꼭짓점 P_2, P_5에 연결된 변의 개수가 각각 4이므로 꼭짓점 P_2는 꼭짓점 P_1, P_3, P_4, P_5와 꼭짓점 P_5는 꼭짓점 P_1, P_2, P_3, P_4와 변으로 연결된다. 꼭짓점 P_1에 연결된 변의 개수는 2이고 두 꼭짓점 P_3, P_4에 연결된 변의 개수가 각각 3이므로 두 꼭짓점 P_3과 P_4는 변으로 연결된다. 따라서 그래프 G는 다음 그림과 같고 두 꼭짓점 P_1과 P_3은 변으로 연결되어 있지 않다. (거짓)



ㄷ. 행렬 A^2의 (2, 3) 성분이 2이므로 꼭짓점 P_2에서 두 개의 변을 지나 꼭짓점 P_3으로 가는 경로는 2개이다. (참)

답 ④

10. $0<b<1$이고 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty}ab^{n-1}=\frac{a}{1-b}=c$

$\therefore \frac{a}{c}=1-b$ …… ㉠

이때, (가)에서 $0<\frac{a}{c}<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b\left(\frac{a}{c}\right)^{n-1}=\frac{b}{1-\frac{a}{c}}$

$=\frac{b}{1-(1-b)}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{b}{b}=1$

답 ③

11. 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

$a_1=2+2$

$a_2=2+3+3$

$a_3=2+3+4+4$

⋮

$a_n=2+3+4+\cdots+n+(n+1)+(n+1)$

$a_{n+1}=2+3+4+\cdots+(n+1)+(n+2)+(n+2)$

$a_{n+1}-a_n=n+3$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_{n+1}-a_n)=\sum_{n=1}^{10}(n+3)$

$=\frac{10\cdot 11}{2}+3\cdot 10$

$=85$

답 ⑤

12. $2x^3-3x^2=12x+k$에서 $2x^3-3x^2-12x=k$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라고 하면

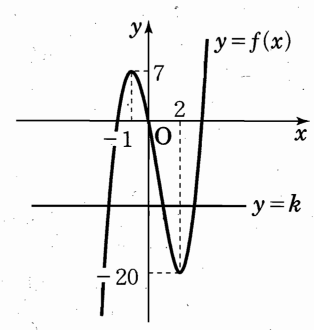
$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그 그래프는 아래와 같다.

x	…	-1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	−20	↗



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점이 세 개가 되는 실수 k의 값의 범위는

$-20<k<7$

따라서 구하는 정수 k의 개수는

$7-(-20)-1=26$

답 ④

13. $y=2\cos x\ (0<x<\pi)$의 역함수는

$x=2\cos y$

양변을 x에 대하여 미분하면

$1=(-2\sin y)\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2\sin y}\quad \therefore f'(x)=-\dfrac{1}{2\sin y}$

$x=2\cos y$에서 $x=-1$일 때 $y=\frac{2}{3}\pi$, $x=1$일 때

$y=\frac{\pi}{3}$이고 $dx=-2\sin y dy$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{f'(x)}dx&=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}}4\sin^2 y\,dy\\&=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}}2(1-\cos 2y)dy\\&=\Big[2y-\sin 2y\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}}\\&=\left(\frac{2}{3}\pi-\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\&\qquad-\left(\frac{4}{3}\pi-\sin\frac{4}{3}\pi\right)\\&=-\frac{2}{3}\pi-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=-\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ⑤

14. $2\log x-\log(x-1)=m$에서

$\log x^2=\log 10^m(x-1)$

$x^2=10^m(x-1)$

$x^2-\boxed{10^m}x+10^m=0$ …… $(*)$

$D=10^{2m}-4\cdot 10^m=10^m(\boxed{10^m-4})>0$

$(\because m>1)$

따라서 이차방정식 $(*)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=10^m$, $\alpha\beta=10^m$

$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2$

$=\boxed{10^m-2}>0\ (\because m>1)$

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=1>0$

$\therefore \alpha>1,\ \beta>1$

따라서 주어진 로그방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$\therefore f(m)=10^m$, $g(m)=10^m-4$,

$h(m)=10^m-2$

$\therefore f(0)+g(1)+h(2)$

$=1+(10-4)+(100-2)$

$=105$

답 ①

15. 합성함수 $(g_k\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to1+0}(g_k\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(g_k\circ f)(x)$

$=(g_k\circ f)(1)$

이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1+0}(g_k\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1+0}g_k(f(x))$

$=\lim\limits_{t\to1-0}g_k(t)$

$\lim\limits_{x\to1-0}(g_k\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to1-0}g_k(f(x))$

$=\lim\limits_{t\to2-0}g_k(t)$

$(g_k\circ f)(1)=g_k(f(1))=g_k(0)$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-0}g_1(x)=1$, $\lim\limits_{x\to2-0}g_1(x)=0$, $g_1(0)=0$

이므로 $(g_1\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0}g_2(x)=1$, $\lim\limits_{x\to2-0}g_2(x)=1$, $g_2(0)=1$

이므로 $(g_2\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1-0}g_3(x)=2$, $\lim\limits_{x\to2-0}g_3(x)=2$, $g_3(0)=2$

이므로 $(g_3\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

답 ④

16. 일차변환 f를 나타내는 행렬을 M이라 하면

$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

직선 OA′의 방정식은 $y=-x$이고, $3\overline{OB'}=\overline{OC'}$에서 두 점 B′, C′의 좌표를 각각 $(p,\ -p)$, $(3p,\ -3p)$로 놓을 수 있다.

$\therefore M\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\-p\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3p\\-3p\end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&p\\1&-p\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}M&=\begin{pmatrix}-1&p\\1&-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&p\\1&-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+p&-2-p\\-1-p&2+p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$M\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3p\\-3p\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+p&-2-p\\-1-p&2+p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1+2p\\-1-2p\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3p\\-3p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$1+2p=3p$, $-1-2p=-3p$

$\therefore p=1$

따라서 점 C′의 좌표는 $(3,\ -3)$이다.

답 ③

17. 줄넘기를 시작한 지 n일째 되는 날 줄넘기를 한 횟수를 a_n이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=50$, $a_{31}=500$이고 공차가 p인 등차수열을 이룬다.

$a_{31}=a_1+(31-1)p=30p+50=500$

$\therefore p=15$

$\therefore a_n=15n+35$

$a_n=15n+35\geq300$에서 $n\geq\dfrac{265}{15}=17.6\cdots$이므로 자연수 n의 최솟값은 18이다. 따라서 구하는 날은 5월 18일이다.

답 ④

18. 주어진 그림에서

$\mathrm{B}(t,\ \cos t)$, $\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{4},\ \cos t\right)$이므로

$f(t)=\dfrac{\sin t-\cos t}{t-\frac{\pi}{4}}$

$t-\frac{\pi}{4}=p$로 놓으면 $t\to\frac{\pi}{4}+0$일 때, $p\to+0$

$\sin t-\cos t=\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin p$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}+0}f(t)&=\lim_{t\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{\sin t-\cos t}{t-\frac{\pi}{4}}\\&=\lim_{p\to+0}\frac{\sqrt{2}\sin p}{p}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ②

19. 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\end{aligned}$$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\dfrac{y_{n+1}-y_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore y_{n+1}=y_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$

$\therefore y_n=y_1+2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k$

(나)에서 $y_1=2$이므로

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}y_n&=\lim_{n\to\infty}\left\{2+2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}\\&=2+2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k\\&=2+2\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=2+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}\\&=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

답 ②

20. $x=0.2$일 때, $\dfrac{I_0}{I}=\sqrt{2}$

관계식 $\log\dfrac{I_0}{I}=kx$에 대입하면

$\log\sqrt{2}=0.2k\quad\therefore k=5\log\sqrt{2}$

따라서 $x=1$일 때

$\log\dfrac{I_0}{I}=k=5\log\sqrt{2}=\log(\sqrt{2})^5$

$\therefore \dfrac{I_0}{I}=(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$

$\therefore I=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}I_0=\dfrac{\sqrt{2}}{8}I_0$

답 ③

21. i) t초 동안 수도관으로 공급한 물의 부피 V_1은

$V_1=\pi\times\int_0^t\frac{1}{2}tdt=\frac{t^2}{4}\pi(\mathrm{cm}^3)$

ii) 높이가 50cm일 때, 그릇에 담긴 물의 부피 V_2는

$V_2=\pi\int_0^{50}x^2dy=\pi\int_0^{50}2ydy=2500\pi(\mathrm{cm}^3)$

$V_1=V_2$이므로 $\dfrac{t^2}{4}\pi=2500\pi$

$\therefore t^2=10000$

$\therefore t=100$

따라서 구하는 시간은 100초이다.

답 ①

22. **단답형** 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$이므로

$a_1+a_2=a_1+a_1r=a_1(1+r)=8$ ······ ㉠

$a_4+a_5=a_1r^3+a_1r^4=a_1r^3(1+r)=216$ ······ ㉡

㉡÷㉠에서

$r^3=27 \quad \therefore r=3$

㉠에서 $a_1=2$

$\therefore a_3=a_1r^2=2\cdot 3^2=18$

답 18

23. **단답형** $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=0$에서 극댓값 16, $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(0)=b=0$ ······ ㉠

$f'(2)=12+4a+b=0$ ······ ㉡

$f(0)=c=16$ ······ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-3,\ b=0,\ c=16$

$\therefore f(x)=x^3-3x^2+16$

$\therefore f(2)=8-12+16=12$

답 12

24. **단답형** $A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$이므로

$(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A^n)^{-1}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -4 \\ 8n-3 \end{pmatrix}$

$\therefore \alpha=-4,\ \beta=8n-3$

$\therefore \alpha+\beta=8n-7$

$\alpha+\beta=49$에서 $8n-7=49$

$\therefore n=7$

답 7

25. **단답형** 진수 조건에서 $x>0$ ··· ㉠

$\dfrac{3}{\log_3 x+2}-1=\dfrac{1-\log_3 x}{\log_3 x+2}\geq 0$에서

양변에 $(\log_3 x+2)^2$을 곱하여 정리하면

$(\log_3 x-1)(\log_3 x+2)\leq 0$이고 $\log_3 x\neq -2$

$\therefore -2<\log_3 x\leq 1$

$\therefore 3^{-2}<x\leq 3$ ·················· ㉡

㉠, ㉡에서 부등식 $\dfrac{3}{\log_3 x+2}\geq 1$의 해는

$\dfrac{1}{9}<x\leq 3$

$\dfrac{x-a}{x-b}\leq 0$에서 양변에 $(x-b)^2$을 곱하면

$(x-a)(x-b)\leq 0$이고 $x\neq b$

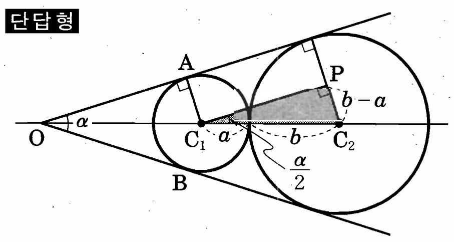
따라서 주어진 두 부등식의 해의 집합이 서로 같을 조건은

$b=\dfrac{1}{9},\ a=3$

$\therefore 9\left(a+\dfrac{1}{b}\right)=9(3+9)=108$

답 108

26. **단답형**



$\angle AOB=\alpha$라 하면 $\cos\alpha=\dfrac{7}{25}$이므로

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}=\dfrac{9}{25}$

$\therefore \sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{3}{5}$

위 그림의 $\triangle C_1C_2P$에서

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{b-a}{b+a}$

$\therefore \dfrac{3}{5}=\dfrac{b-a}{b+a}$

$3b+3a=5b-5a,\ 8a=2b$

$\therefore \dfrac{b}{a}=4$

답 4

27. **단답형** (가)에서 $x=0,\ y=0$을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

(다)에서 $x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-1$

(나)에서 $f'(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-1$

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$ ($\because$(가))

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}+x\right\}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+x\right\}$ $(\because f(0)=0)$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}\right\}+x$

$=f'(0)+x$

$=x-1$

$\therefore f'(100)=100-1=99$

답 99

28. **단답형** $a=\cos 50^\circ,\ b=\sin 50^\circ$이므로

행렬 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$로 나타내어지는 일차변환은 원점을 중심으로 50°만큼 회전시키는 회전변환이다.

따라서 일차변환 f_n은 원점을 중심으로 $(50n)^\circ$만큼 회전시키는 회전변환이므로 $f_n(\mathrm{X})=\mathrm{X}$를 만족시키려면

$50n=360k$ ($n,\ k$는 자연수)

n이 최소인 경우는 $n=36,\ k=5$일 때이다.

따라서 구하는 n의 최솟값은 36이다.

답 36

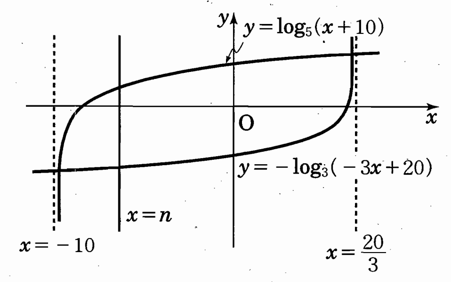
29. **단답형** 곡선 $y=\log_5(x+10)$의 점근선의 방정식은

$x+10=0 \quad \therefore x=-10$

곡선 $y=-\log_3(-3x+20)$의 점근선의 방정식은

$-3x+20=0 \quad \therefore x=\dfrac{20}{3}$

주어진 두 곡선의 그래프는 아래 그림과 같다.



위 그림에서 직선 $x=n$이 두 곡선과 모두 만나려면 정수 n은 $-10<n<\dfrac{20}{3}$이어야 한다.

따라서 정수 n은 $-9,\ -8,\ -7,\ \cdots,\ 5,\ 6$이므로 구하는 개수는

$6-(-9)+1=16$

답 16

30. **단답형** $\overline{AP}=x(x>0)$(km)로 놓으면

$\overline{PC}=\sqrt{x^2+64}$

주어진 조건에 의해

$\dfrac{x+\sqrt{x^2+64}}{12}=\dfrac{2x+8}{20}+\dfrac{1}{3}$

양변에 60을 곱하여 정리하면

$5\sqrt{x^2+64}=x+44$

양변을 제곱하여 정리하면

$3x^2-11x-42=0$

$(3x+7)(x-6)=0$

$\therefore x=6$

구하는 거리는 12km이므로 a의 값은 12이다.

답 12

수리 영역(나형)

1~2. ☞ 가형 풀이 **1~2**번을 보시오.

3. (주어진 식)

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}{(\sqrt{4n^2+3n+2}-2n)(\sqrt{4n^2+3n+2}+2n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+3n+2}+2n}{3n+2}$

$=\dfrac{4}{3}$

답 ⑤

4. $AB^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$

답 ①

5. $a_1=S_1=1^2+2\cdot 1+3=6$

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(10^2+2\cdot 10+3)-(9^2+2\cdot 9+3)$

$=123-102$

$=21$

$\therefore a_1+a_{10}=27$

답 ⑤

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-5\right)=4$로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n^2}-5\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=5$

$\therefore$ (주어진 식)$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{a_n}{n^2}+2}{\frac{a_n}{n^2}-3}$

$=\frac{4\cdot5+2}{5-3}=11$

답 ④

7. $\lim_{x\to-1-0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=1+2=3$

답 ①

8. $A^{50}=(A^3)^{16}A^2=(-E)^{16}A^2=A^2$이므로

$A^2=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=AA^2=-E$에서

$A=-(A^2)^{-1}=-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

따라서 구하는 성분은 -1이다.

답 ②

9~11. ☞ 가형 풀이 **9~11**번을 보시오.

12. $f(10)=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-1}{10^n+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{10}\right)^n}=10$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{1}{10}\right)^n+1}=-1$

$\therefore f(10)+f\left(\frac{1}{10}\right)$

$=10+(-1)=9$

답 ④

13. $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge2)$

$=n\cdot3^n-(n-1)\cdot3^{n-1}$

$=\{3n-(n-1)\}\cdot3^{n-1}$

$=(2n+1)\cdot3^{n-1}\ (n\ge2)$

$S_1=3$이므로 $a_1=S_1=3$

$\therefore a_n=(2n+1)\cdot3^{n-1}\ (n\ge1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot3^n}{(2n+1)\cdot3^{n-1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}$

$=\frac{3}{2}$

답 ③

14. ☞ 가형 풀이 **14**번을 보시오.

15. ㄱ. 2012는 네 자리의 자연수이므로

$f(2012)=3$

3은 한 자리의 자연수이므로 $f(3)=0$

$\therefore f(f(2012))=f(3)=0$ (참)

ㄴ. $\log\sqrt{10}=\frac{1}{2}$이므로 $g(\sqrt{10})=\frac{1}{2}$

$\log 0.5=\log\frac{5}{10}=-1+\log 5$에서

$0<\log 5<1$이므로 $g(0.5)=\log 5$

$\therefore g(\sqrt{10})\ne g(0.5)$ (거짓)

ㄷ. $g(x)=0 \Longleftrightarrow \log x=k \Longleftrightarrow x=10^k$

(단, k는 정수)이므로

$g(f(n))=0 \Longleftrightarrow f(n)=10^k$

$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

$\log n=f(n)+g(n)=10^k+g(n)$

$\therefore n=10^{10^k+g(n)}$

따라서 자연수 n은 무수히 많다. (참)

답 ③

16. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+a}{x-2}=b$

에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to2}(x^2+2x+a)=4+4+a=0$

$\therefore a=-8$

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=6$

$\therefore b=6$

$\therefore a+b=-8+6=-2$

답 ②

17. ☞ 가형 풀이 **17**번을 보시오.

18. 주어진 수열을 다음과 같이 10개씩 묶음으로 나누어 생각해 보면

(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4),

(6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9),

(11, 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14),

…

각 묶음의 항의 개수는 10이므로 a_{200}항은 20번째 묶음의 마지막 항이다. 각 묶음의 마지막 항은

4, 9, 14, 19, …

따라서 n번째 묶음의 마지막 항은 $5n-1$이므로 20번째 묶음의 마지막 항은 $5\cdot20-1=99$이다.

$\therefore a_{200}=99$

답 ⑤

19~20. ☞ 가형 풀이 **19~20**번을 보시오.

21. 지수함수 $y=a^{\frac{x}{a}}=\left(a^{\frac{1}{a}}\right)^x$의 밑은 $a^{\frac{1}{a}}$이므로 주어진 그래프에서

$0<a^{\frac{1}{a}}<1$ … ㉠

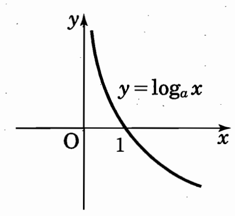
i) $a>1$이면 $\frac{1}{a}>0$이므로 $1=a^0<a^{\frac{1}{a}}$이다.

따라서 ㉠에 모순이다.

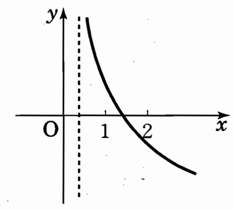
ii) $0<a<1$이면 $\frac{1}{a}>0$이므로 $0<a^{\frac{1}{a}}<a^0=1$이다.

i), ii)에서 $0<a<1$이다.

따라서 함수 $y=\log_a x$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$y=\log_a(x-a)$의 그래프는 $y=\log_a x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로 그래프의 개형은 아래와 같다.



답 ③

22. ☞ 가형 풀이 **22**번을 보시오.

23. 단답형 $\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)(x^2+4)$

$=32$

답 32

24. ☞ 가형 풀이 **24**번을 보시오.

25. 단답형 주어진 방정식을 정리하면

$(\log_4 x)^2-3\log_4 x+a=0$

$\log_4 x=t$로 놓으면

$t^2-3t+a=0$ … ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_4\alpha$, $\log_4\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\log_4\alpha+\log_4\beta=3$

$\therefore \log_4\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha\beta=4^3=64$

답 64

26. 단답형 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$\therefore f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to1}(2x^2+ax+b)=0$

$\therefore 2+a+b=0$

$\therefore b=-a-2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax-a-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+a+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(2x+a+2)$

$=a+4=2$

$\therefore a=-2,\ b=0$

$\therefore f(x)=2x^2-2x$

$\therefore f(4)=24$

답 24

27. 단답형 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이므로 (가)에서

$ar^4 : (ar)(ar^2) = r : a = 2 : 3$

∴ $2a = 3r$ …… ㉠

(나)에서

$$\frac{ar^5+ar^8}{ar^2+ar^5} = \frac{ar^5(1+r^3)}{ar^2(1+r^3)} = r^3 = 8$$

(∵ $r \neq -1$)

∴ $r = 2$

㉠에서 $a = 3$

∴ $a_7 = ar^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$

답 192

28. 단답형 점 P_n의 x좌표를 p_n이라 하면 점 $P_n(p_n,\ 2p_n)$이고, 점 Q_n의 좌표는 $Q_n(p_n,\ 8p_n)$이다.

점 P_{n+1}의 x좌표는 $8p_n = 2x$에서 $x = 4p_n$

∴ $p_{n+1} = 4p_n$

수열 $\{p_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 4인 등비수열이므로

$p_n = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-1}$

∴ $p_{20} = \frac{1}{2} \cdot 4^{19} = 2^{-1} \cdot 2^{38} = 2^{37} = a$

∴ $\log_2 a = \log_2 2^{37} = 37$

답 37

29. ☞ 가형 풀이 **29**번을 보시오.

30. 단답형 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 연립방정식을 세우면

$$\begin{cases} 7x+7y=490 \\ 3x+10y=490 \end{cases}$$

이것을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 490 \\ 490 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 490 \\ 490 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 490 \\ 490 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

∴ $a = 10$, $b = 7$

∴ $a + b = 17$

답 17