2012학년도(4월) 고3 메가스터디 모의대학수학능력시험 정답 및 해설

1교시 언어 영역

1 ②	2 ①	3 ②	4 ③	5 ②
6 ②	7 ②	8 ⑤	9 ⑤	10 ④
11 ⑤	12 ③	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ②	17 ④	18 ⑤	19 ④	20 ②
21 ①	22 ②	23 ⑤	24 ①	25 ④
26 ⑤	27 ③	28 ②	29 ③	30 ⑤
31 ④	32 ③	33 ②	34 ③	35 ④
36 ④	37 ④	38 ③	39 ⑤	40 ④
41 ⑤	42 ①	43 ③	44 ③	45 ②
46 ⑤	47 ①	48 ②	49 ③	50 ③

2교시 수리 영역

< '가'형 >

1 ③	2 ④	3 ①	4 ②	5 ④
6 ④	7 ⑤	8 ②	9 ①	10 ③
11 ②	12 ③	13 ①	14 ④	15 ⑤
16 ⑤	17 ④	18 ②	19 ①	20 ④
21 ⑤	22 12	23 20	24 2	25 18
26 13	27 3	28 174	29 12	30 367

< '나'형 >

1 ③	2 ④	3 ②	4 ②	5 ④
6 ①	7 ⑤	8 ②	9 ③	10 ③
11 ②	12 ⑤	13 ①	14 ①	15 ②
16 ④	17 ③	18 ②	19 ⑤	20 ③
21 ①	22 12	23 535	24 8	25 18
26 13	27 26	28 20	29 12	30 367

3교시 외국어(영어) 영역

1 ③	2 ④	3 ④	4 ②	5 ③
6 ⑤	7 ①	8 ⑤	9 ①	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ④	14 ①	15 ②
16 ③	17 ①	18 ④	19 ④	20 ②
21 ③	22 ④	23 ③	24 ③	25 ①
26 ④	27 ⑤	28 ②	29 ①	30 ①
31 ⑤	32 ④	33 ③	34 ③	35 ④
36 ③	37 ④	38 ④	39 ②	40 ⑤
41 ①	42 ③	43 ③	44 ③	45 ④
46 ②	47 ③	48 ②	49 ④	50 ④

4교시 사회탐구 영역

< 윤리 >

1 ④	2 ①	3 ②	4 ④	5 ③
6 ②	7 ③	8 ①	9 ②	10 ⑤
11 ①	12 ③	13 ①	14 ①	15 ③
16 ①	17 ②	18 ④	19 ⑤	20 ④

< 국사 >

1 ③	2 ⑤	3 ⑤	4 ②	5 ①
6 ④	7 ④	8 ①	9 ⑤	10 ②
11 ②	12 ④	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ③	17 ⑤	18 ①	19 ③	20 ①

< 한국지리 >

1 ②	2 ④	3 ④	4 ⑤	5 ④
6 ①	7 ①	8 ②	9 ②	10 ③
11 ④	12 ③	13 ③	14 ②	15 ⑤
16 ④	17 ④	18 ⑤	19 ③	20 ①

< 세계지리 >

1 ⑤	2 ⑤	3 ⑤	4 ③	5 ②
6 ④	7 ①	8 ③	9 ⑤	10 ②
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ⑤	15 ②
16 ③	17 ②	18 ③	19 ④	20 ①

< 경제지리 >

1 ②	2 ①	3 ②	4 ③	5 ④
6 ②	7 ④	8 ⑤	9 ①	10 ①
11 ④	12 ①	13 ④	14 ②	15 ①
16 ②	17 ①	18 ③	19 ③	20 ①

< 한국근·현대사 >

1 ③	2 ③	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 ③	7 ①	8 ⑤	9 ②	10 ④
11 ②	12 ③	13 ⑤	14 ②	15 ①
16 ③	17 ③	18 ④	19 ①	20 ②

< 세계사 >

1 ①	2 ⑤	3 ②	4 ④	5 ③
6 ⑤	7 ⑤	8 ②	9 ④	10 ②
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ③	15 ②
16 ③	17 ④	18 ②	19 ①	20 ④

< 법과 사회 >

1 ③	2 ①	3 ①	4 ②	5 ⑤
6 ②	7 ④	8 ②	9 ④	10 ⑤
11 ②	12 ③	13 ④	14 ②	15 ④
16 ①	17 ④	18 ③	19 ④	20 ②

< 정치 >

1 ④	2 ②	3 ④	4 ③	5 ②
6 ⑤	7 ⑤	8 ④	9 ①	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ④	14 ③	15 ①
16 ④	17 ③	18 ④	19 ②	20 ④

< 경제 >

1 ①	2 ⑤	3 ⑤	4 ①	5 ④
6 ⑤	7 ②	8 ②	9 ②	10 ⑤
11 ③	12 ①	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ④	17 ④	18 ①	19 ②	20 ①

< 사회·문화 >

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 ③	5 ②
6 ③	7 ⑤	8 ④	9 ①	10 ③
11 ②	12 ①	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ③	17 ①	18 ⑤	19 ①	20 ③

4교시 과학탐구 영역

< 물리 Ⅰ >

1 ②	2 ④	3 ②	4 ③	5 ①
6 ③	7 ⑤	8 ①	9 ②	10 ②
11 ③	12 ③	13 ⑤	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ⑤	18 ①	19 ④	20 ①

< 화학 Ⅰ >

1 ③	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ④	7 ③	8 ①	9 ④	10 ③
11 ②	12 ③	13 ①	14 ②	15 ②
16 ⑤	17 ①	18 ⑤	19 ①	20 ④

< 생물 Ⅰ >

1 ⑤	2 ⑤	3 ④	4 ④	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ④	10 ③
11 ①	12 ③	13 ②	14 ③	15 ①
16 ⑤	17 ②	18 ④	19 ②	20 ⑤

< 지구과학 Ⅰ >

1 ⑤	2 ⑤	3 ⑤	4 ④	5 ⑤
6 ③	7 ④	8 ②	9 ④	10 ②
11 ④	12 ②	13 ③	14 ①	15 ⑤
16 ②	17 ②	18 ②	19 ⑤	20 ①

< 물리 Ⅱ >

1 ④	2 ①	3 ③	4 ②	5 ④
6 ③	7 ④	8 ②	9 ②	10 ③
11 ①	12 ⑤	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ③	18 ④	19 ③	20 ②

< 화학 Ⅱ >

1 ③	2 ③	3 ④	4 ④	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 ②	9 ①	10 ⑤
11 ③	12 ②	13 ⑤	14 ⑤	15 ④
16 ⑤	17 ⑤	18 ②	19 ④	20 ①

< 생물 Ⅱ >

1 ④	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 ⑤
6 ③	7 ⑤	8 ③	9 ④	10 ③
11 ④	12 ④	13 ①	14 ④	15 ②
16 ①	17 ⑤	18 ⑤	19 ①	20 ④

< 지구과학 Ⅱ >

1 ②	2 ②	3 ③	4 ①	5 ⑤
6 ②	7 ③	8 ①	9 ①	10 ④
11 ①	12 ⑤	13 ②	14 ④	15 ①
16 ⑤	17 ⑤	18 ②	19 ①	20 ⑤

2교시 수리 영역

< '가' 형 >

1. 로그의 계산

$\frac{2}{\log_{21}3}+\log_3\frac{9}{49}=2\log_3 21+\log_3\frac{9}{49}$

$=\log_3 21^2+\log_3\frac{9}{49}$

$=\log_3\left(21^2\times\frac{9}{49}\right)$

$=\log_3 3^4$

$=4$ 답③

2. 역행렬

$X\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$에서

$2X\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$X\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$이므로

$X=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 1이다. 답④

3. 삼각함수의 여러 가지 공식

$\frac{\sin 20°+\sin 40°}{\cos 20°+\cos 40°}$

$=\frac{2\sin\frac{20°+40°}{2}\cos\frac{20°-40°}{2}}{2\cos\frac{20°+40°}{2}\cos\frac{20°-40°}{2}}$

$=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}$

$=\tan 30°$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 답①

4. 분수방정식

$\frac{x}{x+1}-\frac{x+3}{x+4}=\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x+2}$에서

$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\left(1-\frac{1}{x+4}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{x+3}\right)-\left(1-\frac{1}{x+2}\right)$

$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

$\frac{-2}{(x+2)(x+4)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$-(x+1)(x+3)=(x+2)(x+4)$

$-x^2-4x-3=x^2+6x+8$

$\therefore 2x^2+10x+11=0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식 $\frac{D}{4}=5^2-2\cdot 11>0$이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근은 주어진 분수방정식의 분모를 0으로 하지 않으므로 모두 분수방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱은 $\frac{11}{2}$이다. 답②

5. 거듭제곱근

$A=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $B=\sqrt[5]{-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$,

$C=-\sqrt[15]{\frac{1}{30}}=-\frac{1}{\sqrt[15]{30}}$이고,

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{32}$, $\sqrt[5]{3}=\sqrt[15]{3^3}=\sqrt[15]{27}$이므로

$\sqrt[15]{27}<\sqrt[15]{30}<\sqrt[15]{32}$

따라서 $\frac{1}{\sqrt[15]{27}}>\frac{1}{\sqrt[15]{30}}>\frac{1}{\sqrt[15]{32}}$이므로

$-\frac{1}{\sqrt[15]{27}}<-\frac{1}{\sqrt[15]{30}}<-\frac{1}{\sqrt[15]{32}}$

$\therefore B<C<A$ 답④

6. 함수의 극한과 연속

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{x+\log_2(x+1)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\log_2(x+1)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\log_2(x+1)^{\frac{1}{x}}}{\frac{\sin x}{x}}$

$=1+\log_2 e$

$=\log_2 2e$

$=\log_2 a$

$\therefore a=2e$ 답④

7. 로그함수

$\log_3 a=\log_2 5$이므로 $a=3^{\log_2 5}$

$\log_6 b=\log_2 5$이므로 $b=6^{\log_2 5}$

이때, $6=2\times 3$이므로

$b=(2\times 3)^{\log_2 5}=2^{\log_2 5}\times 3^{\log_2 5}=5a$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{5a}{a}=5$ 답⑤

8. 무한수열의 극한

자연수 n에 대하여

$(2n+1)^2<4n^2+5n+3<(2n+2)^2$이므로

$[\sqrt{4n^2+5n+3}]=2n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{4n^2+5n+3}-(2n+1)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+5n+3)-(2n+1)^2}{\sqrt{4n^2+5n+3}+(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{4n^2+5n+3}+(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}+\left(2+\frac{1}{n}\right)}$

$=\frac{1}{4}$ 답②

9. 미분계수

$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin(\pi x+\pi))-f(\cos(\pi x+\pi)+1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(-\sin\pi x)-f(1-\cos\pi x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(-\sin\pi x)-f(0)}{x}-\frac{f(1-\cos\pi x)-f(0)}{x}\right\}$ …… ㉠

이때,

$\lim_{x\to 0}\frac{f(-\sin\pi x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(-\sin\pi x)-f(0)}{-\sin\pi x-0}\cdot\frac{\sin\pi x}{\pi x}\cdot(-\pi)$

$=f'(0)\cdot 1\cdot(-\pi)$

$=-\pi\ (\because f'(0)=1)$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos\pi x)-f(0)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos\pi x)-f(0)}{1-\cos\pi x-0}\cdot\frac{1-\cos\pi x}{(\pi x)^2}\cdot(\pi^2 x)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos\pi x)-f(0)}{1-\cos\pi x-0}\cdot\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{(\pi x)^2}\cdot(\pi^2 x)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos\pi x)-f(0)}{1-\cos\pi x-0}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2}\cdot(\pi^2 x)$

$=f'(0)\cdot\frac{1}{2}\cdot 0=0$

따라서 ㉠의 값은

$-\pi-0=-\pi$ 답①

10. 함수의 극한과 연속

ㄱ. $x\to -0$일 때, $g(x)\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -0}f(g(x))=\lim_{t\to 1-0}f(t)=-1$ (참)

ㄴ. $x\to\infty$일 때, $\frac{1}{x}\to +0$이므로

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)g\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to +0}f(t)g(t)$

$=0\times(-1)=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1-0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1-0}g(f(x))$

$=\lim_{t\to -1+0}g(t)=0$

$\lim_{x\to 1+0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to 1+0}g(f(x))$

$=\lim_{t\to 1+0}g(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to 1-0}(g\circ f)(x)\neq\lim_{x\to 1+0}(g\circ f)(x)$이므로

함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답③

11. 무한등비급수의 도형에의 활용

$\overline{OB_1}=2\sqrt{2}$, $\overline{OB_2}=2$이므로 정사각형 $OA_1B_1C_1$과 정사각형 $OA_2B_2C_2$의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 선분 B_1B_2를 대각선으로 하는 정사각형과 선분 B_2B_3을 대각선으로 하는 정사각형의 닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $S_1:S_2=1:\frac{1}{2}$이다.

한편, 선분 B_1B_2를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}$이므로

$S_1=(2-\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}$

이때, 어두운 부분의 정사각형은 모두 닮은 도형이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6-4\sqrt{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6-4\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=12-8\sqrt{2}$

따라서 $a=12$, $b=-8$이므로

$a+b=4$ 답②

12. 삼각함수의 부정적분

$f'(x)=\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x$이므로

$$f(x)=\int\{\tan^2 x+\tan x(1+\tan^2 x)\}dx$$
$$=\int(\sec^2 x-1+\tan x\sec^2 x)dx$$
$$(\because 1+\tan^2 x=\sec^2 x)$$
$$=\int(\sec^2 x-1)dx+\int\tan x\sec^2 x\,dx$$

$\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x\dfrac{dx}{dt}=1$이므로

$$f(x)=\tan x-x+\int t\,dt$$
$$=\tan x-x+\frac{1}{2}t^2+C\ (C\text{는 적분상수})$$
$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\tan x-x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

그런데 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $C=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\tan x-x+\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\tan^2\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

답③

13. 수학적 귀납법

(i) $a_1=2$이므로 $a_1<3$을 만족시킨다.

(ii) $n=m\,(m\geq 2)$일 때, $a_m<3m^2$이 성립한다고 가정하자.

$a_m<2m^2+\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}a_k$이므로

$$3(m+1)^2-a_{m+1}$$
$$>3(m+1)^2-\left\{\boxed{2(m+1)^2}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k\right\}$$
$$=(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}a_k$$
$$>(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\boxed{3k^2}$$
$$=(m+1)^2-\frac{1}{m+1}\times\frac{m(m+1)(2m+1)}{2}$$
$$=(m+1)^2-\frac{m(2m+1)}{2}$$
$$=\frac{3}{2}m+1>0$$

따라서 $n=m+1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(m)=2(m+1)^2$, $g(k)=3k^2$이므로

$f(3)+g(3)=32+27=59$

답①

14. 정적분 Ⓜ

ㄱ. $f'(x)>\dfrac{1}{3}$이므로

$$\int_0^3 f'(x)dx>\int_0^3\frac{1}{3}dx=1$$

$f(3)-f(0)>1$

$f(3)>f(0)+1$

$\therefore f(3)>2\ (\because f(0)=1)$ (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$이면 $f(0)=1$,

$f'(x)=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}$이다.

이때, $f(x)=3$에서

$\dfrac{1}{2}x+1=3\quad\therefore x=4$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$일 때, 방정식 $f(x)=3$은 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 실근을 갖지 않으므로 방정식 $f(x)=3$은 닫힌 구간 $[0,\ 3]$에서 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\int_0^x f'(x)dx>\int_0^x\frac{1}{3}dx$이므로

$f(x)-f(0)>\dfrac{1}{3}x$

$f(x)>\dfrac{1}{3}x+f(0)$

$\therefore f(x)>\dfrac{1}{3}x+1\ (\because f(0)=1)$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+1\right)dx=\frac{7}{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답④

15. 삼각함수의 여러 가지 공식

$$f(x)=9\cos^2 x+4\sin x\cos x+6\sin^2 x$$
$$=9\times\frac{1+\cos 2x}{2}+2\sin 2x+6\times\frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$=2\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{15}{2}$$
$$=\sqrt{4+\frac{9}{4}}\sin(2x+\alpha)+\frac{15}{2}$$
$$=\frac{5}{2}\sin(2x+\alpha)+\frac{15}{2}$$
$$\left(\because \sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\right)\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때, ㉠은 $2x+\alpha=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)일 때 최댓값을 갖는다.

$2x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha$일 때,

$\sin 2x=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,

$\cos 2x=\cos\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$

$2\cos^2 x-1=\cos 2x=\dfrac{3}{5}$이므로

$\cos x=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\quad\cdots\cdots ㉡$

$2\sin x\cos x=\sin 2x=\dfrac{4}{5}$이므로 ㉡을 대입하면

$\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 함수 $f(x)$는 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\sin x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, 최댓값을 가지므로

$a=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $b=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $c=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $d=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore (a+b)-(c+d)=\frac{3\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{5}}{5}$$
$$=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

답⑤

16. 함수의 극한

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2)$이라 하면 세 점 Q, R, S의 좌표는 각각 $\mathrm{Q}(t,\ \ln(t^2+1))$, $\mathrm{R}\left(t,\ \sin^2\dfrac{t}{2}\right)$, $\mathrm{S}(t,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=|2t^2-\ln(t^2+1)|$,

$\overline{\mathrm{QR}}=\left|\ln(t^2+1)-\sin^2\dfrac{t}{2}\right|$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 t의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{t\to0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}}=\lim_{t\to0}\frac{|2t^2-\ln(t^2+1)|}{\left|\ln(t^2+1)-\sin^2\frac{t}{2}\right|}$$
$$=\lim_{t\to0}\left|\frac{2-\frac{\ln(t^2+1)}{t^2}}{\frac{\ln(t^2+1)}{t^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2}\right|$$
$$=\lim_{t\to0}\left|\frac{2-\ln(t^2+1)^{\frac{1}{t^2}}}{\ln(t^2+1)^{\frac{1}{t^2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right)^2}\right|$$
$$=\left|\frac{2-1}{1-\frac{1}{4}}\right|$$
$$=\frac{4}{3}$$

답⑤

17. 도함수

$f_1(x)=\sin x$

$f_2(x)=\sin x+\cos x-\sin x$
$\quad=\cos x$

$f_3(x)=\cos x-\sin x-\cos x$
$\quad=-\sin x$

$f_4(x)=-\sin x-\cos x+\sin x$
$\quad=-\cos x$

$f_5(x)=-\cos x+\sin x+\cos x$
$\quad=\sin x=f_1(x)$

$\quad\vdots$

따라서 자연수 k에 대하여

$f_{4k+1}(x)=f_1(x)$, $f_{4k+2}(x)=f_2(x)$

$f_{4k+3}(x)=f_3(x)$, $f_{4k+4}(x)=f_4(x)$

가 성립한다.

이때, $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$f_{4k+1}(x)+f_{4k+2}(x)+f_{4k+3}(x)+f_{4k+4}(x)=0$

따라서 $50=4\times12+2$이므로

$$\sum_{n=1}^{50}f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)+f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$$
$$=1+0=1$$

답④

18. 등차수열과 등비수열 Ⓜ

ㄱ. $a_n=n$이면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$T_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$$
$$=\frac{n+1}{2}$$

$\therefore T_{10}=\dfrac{11}{2}$ (참)

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 공차가 d인 등차수열이라 하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d\}}{2}$$

이므로

$T_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}=a_1+(n-1)\dfrac{d}{2}$

따라서 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공차가 $\dfrac{d}{2}$인 등차수열이다. (참)

ㄷ. [반례] 수열 $\{T_n\}$을 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이라 하면

$T_1=1,\ T_2=2,\ T_3=4,\ \cdots$

$a_1=T_1=1$이므로

$T_2=\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{1+a_2}{2}=2$에서 $a_2=3$

$T_3=\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}=\dfrac{1+3+a_3}{3}=4$에서 $a_3=8$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. **답** ②

19. 넓이의 순간변화율

점 $\mathrm{A}(x,\ 0)$에 대하여 정삼각형 BCD의 높이는 e^{-x}이고 한 변의 길이는 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{-x}$이므로 정삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times e^{-x}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{-x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}e^{-2x}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 점 A가 출발한 지 t초가 되는 순간 넓이 S의 시간 t(초)에 대한 순간변화율 $\dfrac{dS}{dt}$는

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}e^{-2x}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=-e^{-2x}$

따라서 $t=2\sqrt{3}$일 때, $x=3$이므로

$\dfrac{dS}{dt}=-e^{-6}$ **답** ①

20. 치환적분법

$\ln t=\theta$로 놓으면

$\dfrac{1}{t}\dfrac{dt}{d\theta}=1$

$t=1$일 때 $\theta=0$, $t=e^x$일 때 $\theta=x$이므로

$g(x)=\displaystyle\int_0^x\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^x=\sin x$

$\sin x=\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 예각의 크기를 α라 하면 방정식 $\sin x=\dfrac{1}{3}$의 모든 실근의 합 S_n은

$S_n=\{\alpha+(\pi-\alpha)\}+\{(2\pi+\alpha)+(3\pi-\alpha)\}+\cdots$

$+[\{2(n-1)\pi+\alpha\}+\{(2n-1)\pi-\alpha\}]$

$=\pi+5\pi+9\pi+\cdots+(4n-3)\pi$

$=\dfrac{n\{\pi+(4n-3)\pi\}}{2}$

$=(2n^2-n)\pi$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2-n)}{n^2}\pi=2\pi$ **답** ④

21. 평균값의 정리 Ⓜ

〈보기〉의 함수들은 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$, $[0,\ 1]$에서 모두 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$과 $(0,\ 1)$에서 모두 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(0)-f(a)}{0-a}=f'(c)$

인 실수 c가 열린 구간 $(a,\ 0)$에서 적어도 하나 존재한다. 또한,

$\dfrac{f(b)-f(0)}{b-0}=f'(d)$

인 실수 d가 열린 구간 $(0,\ b)$에서 적어도 하나 존재한다. 주어진 부등식에서

$\dfrac{f(0)-f(a)}{-a}\cdot\dfrac{f(b)-f(0)}{b}>-1$

$\therefore f'(c)f'(d)>-1$ …… ㉠

따라서 ㉠을 만족시키는 함수를 찾으면 된다.

ㄱ. $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$에서 $f'(x)=x$

열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 $-1<f'(x)<0$이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $0<f'(x)<1$이므로

$-1<c<0<d<1$인 실수 $c,\ d$에 대하여

$-1<f'(c)f'(d)<0$

ㄴ. $f(x)=x-\sin x$에서 $f'(x)=1-\cos x$

열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 $0<f'(x)<1$이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 $0<f'(x)<1$이므로

$-1<c<0<d<1$인 실수 $c,\ d$에 대하여

$0<f'(c)f'(d)<1$

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x) & (x\ge 0)\\ \ln(1-x) & (x<0)\end{cases}$에서

$x>0$일 때, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$이고, $x<0$일 때,

$f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}$이다.

따라서 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서

$-1<f'(x)<-\dfrac{1}{2}$이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서

$\dfrac{1}{2}<f'(x)<1$이므로 $-1<c<0<d<1$인 실수 $c,\ d$에 대하여 $-1<f'(c)f'(d)<-\dfrac{1}{4}$

이상에서 ㉠을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. **답** ⑤

22. 합성함수의 미분법

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)=4\cdot 3=12$ **답** 12

23. 부정적분과 정적분

$\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=k$ (k는 상수)로 놓으면 조건 (나)에서

$f'(x)=4x+3k$이므로

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)dx=\int(4x+3k)dx$

$=2x^2+3kx+C$ (C는 적분상수)

조건 (가)에서 $f(0)=-\dfrac{1}{6}$이므로 $C=-\dfrac{1}{6}$

$\therefore f(x)=2x^2+3kx-\dfrac{1}{6}$

$k=\displaystyle\int_0^2\left(2x^2+3kx-\frac{1}{6}\right)dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{3k}{2}x^2-\dfrac{1}{6}x\right]_0^2=\dfrac{16}{3}+6k-\dfrac{1}{3}$

$5k=-5 \qquad \therefore k=-1$

따라서 $f(x)=2x^2-3x-\dfrac{1}{6}$이므로

$\displaystyle\int_0^4 f'(x)dx=f(4)-f(0)$

$=32-12-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=20$ **답** 20

24. 부등식

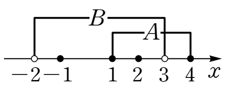
$A=\{x\,|\,(x-1)(x-4)(x+1)^2\le 0\}$

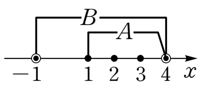
$=\{x\,|\,x=-1$ 또는 $1\le x\le 4\}$

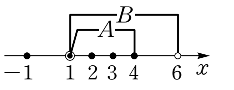
$B=\{x\,|\,(x-a)(x-a-5)<0,\ x$는 정수$\}$

$=\{x\,|\,a<x<a+5,\ x$는 정수$\}$

이때, 집합 $A\cap B$의 원소의 개수가 3이 되는 경우는 다음 3가지가 있다.







따라서 구하는 정수 a의 값은

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=1$

이므로 모든 정수 a의 값의 곱은 2이다. **답** 2

25. 그래프와 행렬

두 그래프 G, H의 변의 개수가 각각 5, 7이므로 두 행렬 X, Y의 모든 성분의 합은 각각 10, 14이다.

이때, 두 꼭짓점 A, B에 연결된 변의 개수는 각각 4, 2이므로 두 행렬 X, Y에서 두 꼭짓점 A, B의 연결 관계를 나타내는 행의 성분의 합은 각각 4, 2이다.

따라서 $x=10-4=6$, $y=14-2=12$이므로

$x+y=6+12=18$ **답** 18

26. 로그부등식

$\log_3 y-1\le 1-\log_3 x$에서

$\log_3 y+\log_3 x\le 2$

$\log_3 xy\le\log_3 9$

$\therefore xy\le 9$

이때, x, y는 자연수이므로

$1\le xy\le 9$ …… ㉠

$1-\log_3 x\le 1-\log_3 y$에서

$\log_3 x\ge\log_3 y$

$\therefore x\ge y$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(5,\ 1)$, $(6,\ 1)$, $(7,\ 1)$, $(8,\ 1)$, $(9,\ 1)$의 13개이다. **답** 13

27. 부등식

(i) $f(x)+5>0$일 때,

$\dfrac{6-x}{f(x)+5}\ge 1$에서

$6-x\ge f(x)+5$

$\therefore f(x)\le -x+1$

주어진 그림에서 $f(x)>-5$, $f(x)\le -x+1$을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2\sqrt{2}<x\le -2$ 또는 $-1\le x<0$

또는 $2\sqrt{2}<x\le 3$

(ii) $f(x)+5<0$일 때,

$\dfrac{6-x}{f(x)+5}\ge 1$에서

$6-x\le f(x)+5$

$\therefore f(x)\ge -x+1$

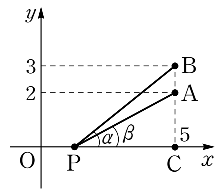
주어진 그림에서 $f(x)<-5$, $f(x)\geq -x+1$을 모두 만족시키는 x의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 정수 x는 -2, -1, 3의 3개이다.

답 3

28. 삼각함수의 덧셈정리

점 P의 좌표를 $(x,\ 0)$이라 하자.



(ⅰ) $x<5$일 때,

$\angle\mathrm{BPC}=\alpha$, $\angle\mathrm{APC}=\beta$로 놓으면

$\tan\alpha=\dfrac{3}{5-x}$, $\tan\beta=\dfrac{2}{5-x}$

$$\tan(\angle\mathrm{BPA})=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{\frac{3}{5-x}-\frac{2}{5-x}}{1+\frac{3}{5-x}\cdot\frac{2}{5-x}}$$
$$=\frac{5-x}{(5-x)^2+6}=\frac{1}{7}$$

$5-x=t$로 놓으면 $\dfrac{t}{t^2+6}=\dfrac{1}{7}$에서

$t^2-7t+6=0$

$(t-1)(t-6)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=6$

$5-x=1$에서 $x=4$

$5-x=6$에서 $x=-1$

(ⅱ) $x>5$일 때,

점 P에 대하여 $\tan(\angle\mathrm{BPA})=\dfrac{1}{7}$을 만족시키는 x의 값을 x_1, $x_2\ (x_1<x_2)$라 하자.

점 $(4,\ 0)$과 점 $(x_1,\ 0)$은 직선 $x=5$에 대하여 대칭이고, 점 $(-1,\ 0)$과 점 $(x_2,\ 0)$도 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{4+x_1}{2}=5$에서 $x_1=6$

$\dfrac{-1+x_2}{2}=5$에서 $x_2=11$

$\therefore a^2+b^2+c^2+d^2=(-1)^2+4^2+6^2+11^2=174$

답 174

29. 상용로그의 활용

단추를 n번 누른 후 물통에 물이 가득 차려면 $(n-1)$번 누른 후 물통에 담긴 물의 양이 1L 미만이 되어야 한다.

즉, $(n-1)$번 눌렀을 때 물통에 담긴 물의 양은 $10\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$ L이고, $10\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<1$이어야 한다.

$10\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<1$, 즉 $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}<\dfrac{1}{10}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(n-1)\log\dfrac{4}{5}<-1$

$(n-1)(3\log 2-1)<-1$

$n-1>\dfrac{1}{1-3\log 2}=\dfrac{1}{0.097}=10.3\times\times\times$

$\therefore n>11.3\times\times\times$

따라서 단추를 최소 12번 눌러야 다시 물이 가득 차므로 n의 최솟값은 12이다.

답 12

30. 여러 가지 수열 Ⓜ

수열 $\{a_n\}$은 자연수 중에서 3의 배수를 제외한 나머지 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열한 것이므로 수열 $\{a_n\}$을 두 항씩 묶어서 군으로 나타내어 보자.

$(1,\ 2)$, $(4,\ 5)$, $(7,\ 8)$, $(10,\ 11)$, $(13,\ 14)$, $(16,\ 17)$, $(19,\ 20)$, $(22,\ 23)$, $\cdots$

수열 $\{b_n\}$도 두 항씩 묶어서 차례로 나타내면 다음과 같다.

$(0,\ 1)$, $(2,\ 4)$, $(6,\ 4)$, $(5,\ 10)$, $(12,\ 7)$, $(8,\ 16)$, $(18,\ 10)$, $(11,\ 22)$, $\cdots$

이때, 수열 $\{b_n\}$을 보면 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 나타나는 것을 알 수 있다.

다시 수열 $\{b_n\}$을 네 항씩 묶어서 군으로 나타내면 다음과 같다.

$(0,\ 1,\ 2,\ 4)$, $(6,\ 4,\ 5,\ 10)$, $(12,\ 7,\ 8,\ 16)$, $(18,\ 10,\ 11,\ 22)$, $\cdots$

따라서 $b_{82}=b_{4\times20+2}=a_{2\times20+1}$이므로 b_{82}의 값은 수열 $\{a_n\}$을 두 항씩 묶어 군으로 나열한 군수열의 제21군의 첫째항이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$을 두 항씩 묶어 군으로 나열한 군수열에서 각 군의 첫째항은 $3n-2$이다.

따라서 제21군의 첫째항은 $3\cdot21-2=61$이므로 $b_{82}=61$이다.

$\therefore b_{83}=b_{82}+1=62$, $b_{84}=2\times b_{83}=124$,

$b_{81}=b_{84}-4=120$

$\therefore b_{81}+b_{82}+b_{83}+b_{84}=120+61+62+124=367$

답 367

다른풀이 b_{81}, b_{82}, b_{83}, b_{84}의 값을 구하기 위해 a_{81}, a_{82}, a_{83}, a_{84}의 값을 구해 보자.

1부터 120까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $\dfrac{120}{3}=40$(개)이므로 1부터 120까지의 자연수 중 3의 배수를 제외한 수는 80개이다.

따라서 1부터 120까지의 자연수 중에서 3의 배수를 제외한 수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때 $a_{80}=119$가 되므로 $a_{81}=121$, $a_{82}=122$, $a_{83}=124$, $a_{84}=125$이다.

$\therefore b_{81}=121-1=120$, $b_{82}=\dfrac{122}{2}=61$,

$b_{83}=\dfrac{124}{2}=62$, $b_{84}=125-1=124$

$\therefore b_{81}+b_{82}+b_{83}+b_{84}=120+61+62+124=367$

< '나' 형 >

[1~2] '가' 형과 동일

3. 무한등비수열의 극한

주어진 식의 분모, 분자를 2^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+3}+2^{n+1}}{2^{n+2}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^3+2}{2^2-\frac{1}{2^n}}$$
$$=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

답 ②

4. 지수법칙

$2^{x+y}=A$, $2^{x-y}=B$라 하면

$$\left(\frac{2^{x+y}+2^{x-y}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^{x+y}-2^{x-y}}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2-\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$$
$$=\frac{(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)}{4}$$
$$=\frac{4AB}{4}$$
$$=AB$$
$$=2^{x+y}\times2^{x-y}$$
$$=2^{2x}=4^x$$

답 ②

5. '가' 형과 동일

6. 행렬의 연산

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt[4]{2} & \sqrt[4]{2}\\ -\sqrt[4]{2} & \sqrt[4]{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^{\frac{1}{4}} & 2^{\frac{1}{4}}\\ -2^{\frac{1}{4}} & 2^{\frac{1}{4}}\end{pmatrix}$$
$$=2^{\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

이므로

$$A^2=\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore A^4=(A^2)^2$

$$=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$
$$=2\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

답 ①

[7~8] '가' 형과 동일

9. 지수방정식

주어진 지수방정식의 두 실근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=6$

$(\sqrt{a})^x=t\ (t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-100t+64=0$ …… ㉠

이때, 이차방정식 ㉠의 두 실근은 $(\sqrt{a})^\alpha$, $(\sqrt{a})^\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sqrt{a})^\alpha\times(\sqrt{a})^\beta=(\sqrt{a})^{\alpha+\beta}=a^{\frac{\alpha+\beta}{2}}=64$

$a^3=2^6$

$\therefore a=2^2=4$

답 ③

[10~11] '가' 형과 동일

12. 수열의 귀납적 정의

$a_n+a_{n+1}=3n+2$에서

$n=2$일 때, $a_2+a_3=3\cdot2+2=6\cdot1+2$

$n=4$일 때, $a_4+a_5=3\cdot4+2=6\cdot2+2$

$n=6$일 때, $a_6+a_7=3\cdot6+2=6\cdot3+2$

$\vdots$

$n=50$일 때, $a_{50}+a_{51}=3\cdot50+2=6\cdot25+2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{51}a_k=a_1+\sum_{k=2}^{51}a_k$$
$$=2+\sum_{k=1}^{25}(6k+2)$$
$$=2+6\cdot\frac{25\cdot26}{2}+2\cdot25$$
$$=2+1950+50$$
$$=2002$$

답⑤

13. '가' 형과 동일

14. 함수의 극한

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=6$에서 $x\to1$일 때, (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $f(1)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f(x-1)}=-2$에서 $x\to1$일 때, (분자) $\to0$이므로 (분모) $\to0$이어야 한다.

$x\to1$일 때, $f(x-1)\to f(0)$이므로 $f(0)=0$

따라서 삼차함수 $f(x)$는 x, $x-1$을 인수로 가지므로 $f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}$$
$$=a+b=6 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{f(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(ax+b)}{(x-1)(x-2)(ax-a+b)}$$
$$=\frac{a+b}{-b}$$
$$=-2 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=3$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(3x+3)}{x}=-3$$

답①

15. 무한급수의 활용 Ⓜ

가로의 길이가 $n+1$이고, 세로의 길이가 n인 직사각형에서 한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 $n(n+1)$이고, 한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 $(n-1)n$, 한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 $(n-2)(n-1)$, …, 한 변의 길이가 n인 정사각형의 개수는 $1\cdot2$이므로

$$a_n=n(n+1)+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\cdots+1\cdot2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3}$$
$$=\frac{1}{3}$$

답②

16. 지수함수의 그래프

$y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x=-a^{-x}$이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$은 서로 원점에 대하여 대칭이다.

또한, 곡선 $y=\frac{1}{x}$은 원점에 대하여 대칭이므로 점 P와 점 Q는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(-\alpha,\ -\frac{1}{\alpha}\right)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{17}$에서

$$\sqrt{(\alpha+\alpha)^2+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)^2}=\sqrt{17}$$

$4\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}=17$

$4\alpha^4-17\alpha^2+4=0$

$(4\alpha^2-1)(\alpha^2-4)=0$

$\therefore \alpha^2=\frac{1}{4}$ 또는 $\alpha^2=4$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$ ($\because \alpha>0$)

$\alpha=\frac{1}{2}$이면 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$이므로 점 P를 $y=a^x$에 대입하면

$a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore a=4$

$\alpha=2$이면 $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$이므로 점 P를 $y=a^x$에 대입하면

$a^2=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

그런데 $a>1$이므로 $a=4$이다.

답④

17. 행렬의 연산의 성질과 역행렬 Ⓜ

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하면

$A^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$이므로 $A^{-1}\in M$이다. (참)

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$라 하면

$$AB=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}ac-bd & -ad-bc\\ bc+ad & -bd+ac\end{pmatrix}$$
$$BA=\begin{pmatrix}c & -d\\ d & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}ac-bd & -bc-ad\\ ad+bc & -bd+ac\end{pmatrix}$$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄷ. [반례] $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=A^2=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}$이면

$AB=BA=A^3$이지만 $A\notin M$, $B\notin M$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답③

18. '가' 형과 동일

19. 함수의 연속성

(i) $|x|>1$일 때,

$f(x)=\frac{a}{x}$

(ii) $x=1$일 때,

$f(x)=\frac{a+b}{2013}$

(iii) $|x|<1$일 때,

$f(x)=\frac{bx}{2012}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{a}{x}=\lim_{x\to-1+0}\frac{bx}{2012}=c$$

즉, $-a=c$, $\frac{-b}{2012}=c$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{b}{4024}=\frac{1}{2}$$

$\therefore b=2012$

$b=2012$를 ㉠에 대입하면

$a=1$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=2012$

답⑤

20. 행렬의 활용

$$\begin{pmatrix}3 & a+4\\ a-4 & 5a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots ㉠$$
$$\begin{pmatrix}2 & a+6\\ a+2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ d\end{pmatrix} \quad\cdots\cdots ㉡$$

이때, $bc\neq0$이므로 행렬 $\begin{pmatrix}3 & a+4\\ a-4 & 5a\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않는다.

즉, $15a-(a+4)(a-4)=0$

$a^2-15a-16=0$

$(a+1)(a-16)=0$

$\therefore a=-1$ ($\because a<0$)

$a=-1$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\ -5 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\therefore b+c=0$ $\cdots\cdots$ ㉢

한편, $a=-1$을 ㉡에 대입하면

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ d\end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{pmatrix}b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\ d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ d\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6+5d\\ 3-2d\end{pmatrix}$$

$\therefore b=-6+5d$, $c=3-2d$ $\cdots\cdots$ ㉣

㉣을 ㉢에 대입하면

$(-6+5d)+(3-2d)=0$

$\therefore d=1$

$d=1$을 ㉣에 대입하면

$b=-1$, $c=1$

$\therefore abcd=1$

답③

21. 상용로그의 지표와 가수

조건 (가)에서 $f(n)$의 값은 정수이므로 n은 1000 이상의 자연수이다.

$\log n$의 지표보다 $\log(n+2011)$의 지표가 더 크려면 n의 자릿수보다 $(n+2011)$의 자릿수가 더 커야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 수 중에서 가장 작은 자연수는 $10000-2011=7989$이다.

그러므로 조건 (가)에 맞는 자연수는 다음과 같다.

7989, 7990, 7991, …, 9999

97989, 97990, 97991, …, 99999

997989, 997990, 997991, …, 999999

⋮

그런데 조건 (나)에서 $\log n$의 가수는 $\log 7$보다 크고, $\log 8$보다 작으므로 자연수 n의 가장 큰 자리의 수는 7이 되어야 한다.

따라서 구하는 자연수 n은

7989, 7990, 7991, …, 7999

이므로 자연수 n의 개수는

$7999-7989+1=11$(개) **답** ①

22. 함수의 극한

$x\to 1$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $a-b=0$

$\therefore a=b$

$a=b$를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{ax-b}{x^3-1}&=\lim_{x\to1}\frac{ax-a}{x^3-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a}{x^2+x+1}\\&=\frac{a}{3}=2\end{aligned}$$

$\therefore a=b=6$

$\therefore a+b=12$ **답** 12

23. 여러 가지 수열

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(1+a_k)(1+b_k)&=\sum_{k=1}^{10}(a_kb_k+a_k+b_k+1)\\&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+3+1)\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}4\\&=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}+2\cdot\frac{10\cdot11}{2}+40\\&=385+110+40\\&=535\end{aligned}$$

답 535

24. 무한수열의 극한

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{8+7\cdot(-1)^k\}\\&=8n+7\cdot\frac{(-1)\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}\\&=8n-\frac{7}{2}\{1-(-1)^n\}\end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[8-\frac{7\{1-(-1)^n\}}{2n}\right]=8$ **답** 8

참고 수열 $\{a_n\}$을 나열하면

1, 15, 1, 15, 1, 15, …

이므로

$S_{2n}=16n$, $S_{2n+1}=16n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n}{2n}=8$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n+1}{2n+1}=8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=8$

[25~26] '가' 형과 동일

27. 상용로그의 활용

두께가 15 mm인 유리판에 세기가 A인 빛을 비추면 통과한 빛의 세기는 $\frac{A}{2}$이므로

$\log\frac{A}{2}-\log A=-15k$

$\log\frac{1}{2}=-15k$

$\therefore k=\frac{\log 2}{15}=\frac{0.3}{15}=\frac{1}{50}$

$\log B-\log A=-\frac{d}{50}$에서

$\log B=\log A-\frac{d}{50}$

이때, 두께가 $a$mm인 유리판에 세기가 A인 빛을 비추면 통과한 빛의 세기는 $0.3A$ 이상이 되므로

$\log 0.3A\le\log A-\frac{a}{50}$

$\log 0.3+\log A\le\log A-\frac{a}{50}$

$\log 0.3\le-\frac{a}{50}$

$\log 3-1\le-\frac{a}{50}$

$-0.52\le-\frac{a}{50}$ ($\because \log 3=0.48$)

$\therefore a\le 26$

따라서 a의 최댓값은 26이다. **답** 26

28. 등비수열의 합

$S=T$이므로 $r\ne1$이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은 $a_n=r^{n-1}$이므로

$a_n^2=(r^2)^{n-1}$, $\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{10}a_k^2=\sum_{k=1}^{10}(r^2)^{k-1}\\&=\frac{r^{20}-1}{r^2-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T&=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{r}\right)^{k-1}\\&=\frac{1-\frac{1}{r^{20}}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r^{20}-1}{r^{20}-r^{19}}\end{aligned}$$

$S=T$이므로

$\frac{r^{20}-1}{r^2-1}=\frac{r^{20}-1}{r^{20}-r^{19}}$

$r^{20}-r^{19}=r^2-1$

$r^{19}(r-1)=(r-1)(r+1)$

이때, $r\ne1$이므로

$r^{19}=r+1$

$\therefore r^{19}-r=1$

$\therefore 20(r^{19}-r)=20$ **답** 20

[29~30] '가' 형과 동일