

제 2 교시

수리 영역 (가형)

1. $\frac{2}{\log_{21} 3} + \log_3 \frac{9}{49}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4
- ④ 5 ⑤ 6

2. 행렬 X 가 등식

$$X \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

를 만족시킬 때, 행렬 X 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

3. $\frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 40^\circ}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

4. 분수방정식

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x+3}{x+4} = \frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x+2}$$

의 모든 실근의 곱은? [3점]

- ① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$
- ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

5. 세 실수 $A=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, $B=\sqrt[5]{-\frac{1}{3}}$, $C=-\sqrt[15]{\frac{1}{30}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
 ④ $B < C < A$ ⑤ $C < B < A$

6. $-1 < x < 1$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \log_2(x+1)}{\sin x} & (x \neq 0) \\ \log_2 a & (x = 0) \end{cases}$$

가 $x=0$ 에서 연속일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $\frac{3}{2}e$
 ④ $2e$ ⑤ $\frac{5}{2}e$

7. 직선 $y = \log_2 5$ 가 두 함수 $y = \log_3 x$, $y = \log_6 x$ 의 그래프와 만나는 점의 x 좌표를 각각 a , b 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

8. 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 5n + 3} - [\sqrt{4n^2 + 5n + 3}] \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

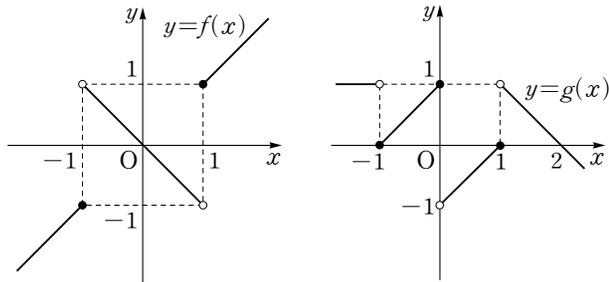
- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

9. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(0)=1$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin(\pi x + \pi)) - f(\cos(\pi x + \pi) + 1)}{x}$ 의 값은? [3점]

- ① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ 0
- ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

10. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]



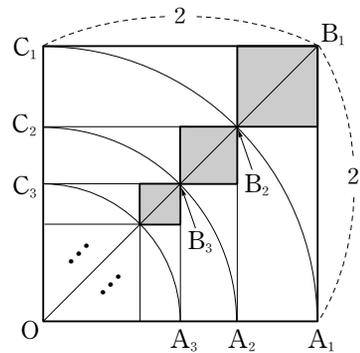
< 보기 >

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -0} f(g(x)) = -1$
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right)g\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- ㄷ. 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 이 있다. 사분원 OA_1C_1 과 대각선 OB_1 의 교점을 B_2 라 하고 선분 B_1B_2 를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 S_1 이라 하자. 선분 OB_2 를 대각선으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 만들고 사분원 OA_2C_2 와 대각선 OB_2 의 교점을 B_3 이라 하고 선분 B_2B_3 을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 선분 B_nB_{n+1} 을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a + b\sqrt{2}$ 이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수이다.) [3점]



- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

12. 곡선 $y=f(x)$ ($-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$ 이고, $f(0) = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

13. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1=2, a_n < 2n^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n=2, 3, 4, \dots)$$

를 만족시킬 때, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < 3n^2$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $a_1=2$ 이므로 $a_1 < 3$ 을 만족시킨다.

(ii) $n=m$ ($m \geq 2$)일 때, $a_m < 3m^2$ 이 성립한다고 가정하자.

$$a_m < 2m^2 + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m-1} a_k \text{이므로}$$

$$3(m+1)^2 - a_{m+1}$$

$$> 3(m+1)^2 - \left\{ \boxed{\text{(가)}} + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m a_k \right\}$$

$$= (m+1)^2 - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m a_k$$

$$> (m+1)^2 - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m \boxed{\text{(나)}}$$

$$= (m+1)^2 - \frac{m(2m+1)}{2}$$

$$= \frac{3}{2}m + 1 > 0$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$ 라 할 때, $f(3)+g(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 59 ② 60 ③ 61
- ④ 62 ⑤ 63

14. 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 정의된 다항함수 $f(x)$ 가 $f(0)=1$ 이고, 열린 구간 $(0, 3)$ 에서 $f'(x) > \frac{1}{3}$ 을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $f(3) > 2$

ㄴ. 방정식 $f(x)=3$ 은 닫힌 구간 $[0, 3]$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx > \frac{7}{6}$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

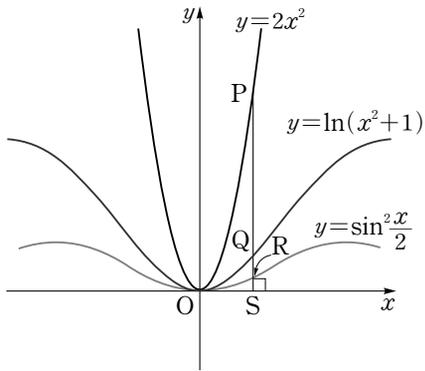
15. 함수

$$f(x) = 9\cos^2 x + 4\sin x \cos x + 6\sin^2 x$$

는 $\sin x = a$, $\cos x = b$ 또는 $\sin x = c$, $\cos x = d$ 일 때, 최댓값을 갖는다. $(a+b)-(c+d)$ 의 값은? (단, $a > c$, $b > d$) [4점]

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

16. 그림은 세 함수 $y=2x^2$, $y=\ln(x^2+1)$, $y=\sin^2\frac{x}{2}$ 의 그래프이다. 함수 $y=2x^2$ 의 그래프 위를 움직이는 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 S라 하고 선분 PS가 두 함수 $y=\ln(x^2+1)$, $y=\sin^2\frac{x}{2}$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\frac{PQ}{QR}$ 는 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]



- ① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ 2
- ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

17. 함수 $f(x)=\sin x$ 에 대하여

$$f_1(x)=f(x),$$

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_n'(x)+f_n''(x) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{50} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

18. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$T_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

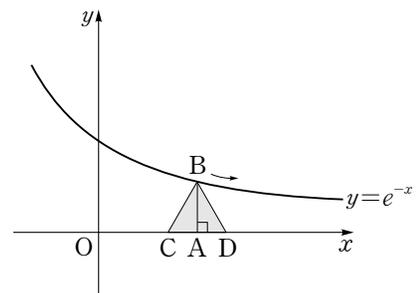
ㄱ. $a_n=n$ 이면 $T_{10}=\frac{11}{2}$ 이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면 수열 $\{T_n\}$ 도 등차수열이다.

ㄷ. 수열 $\{T_n\}$ 이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$ 도 등비수열이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 원점에서 출발하여 x 축 위를 매초 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 속도로 움직이는 점 A가 있다. 점 A를 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{-x}$ 과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 BCD가 정삼각형이 되도록 x 축 위에 두 점 C, D를 정한다. 점 A가 출발한 지 $2\sqrt{3}$ 초가 되는 순간, 정삼각형 BCD의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]



- ① $-e^{-6}$ ② $-e^{-9}$ ③ $-e^{-12}$
- ④ e^{-6} ⑤ e^{-3}

20. 열린 구간 $(0, \infty)$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \int_1^{e^x} f(t) dt$ 라 정의하자.

열린 구간 $(0, 2n\pi)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)에서 방정식 $g(x) = \frac{1}{3}$ 의 모든 실근의 합을 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}\pi$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

21. $-1 < a < 0 < b < 1$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여 부등식

$$\frac{f(a)-f(0)}{a} \cdot \frac{f(b)-f(0)}{b} > -1$$

을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

ㄴ. $f(x) = x - \sin x$

ㄷ. $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & (x \geq 0) \\ \ln(1-x) & (x < 0) \end{cases}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $f(0)=1, f'(0)=3, g'(1)=4$ 를 만족시킨다. 이때, 함수 $y=(g \circ f)(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

23. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = -\frac{1}{6}$

(나) $f'(x) = 4x + \int_0^2 3f(x) dx$

이때, $\int_0^4 f'(x) dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

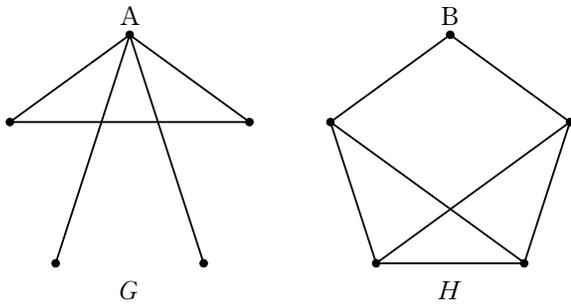
24. 두 집합

$$A = \{x \mid (x-1)(x-4)(x+1)^2 \leq 0\},$$

$$B = \{x \mid (x-a)(x-a-5) < 0, x \text{는 정수}\}$$

에 대하여 집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 곱을 구하시오. [3점]

25. 다음과 같은 두 그래프 G, H 를 나타내는 행렬을 각각 X, Y 라 하자.



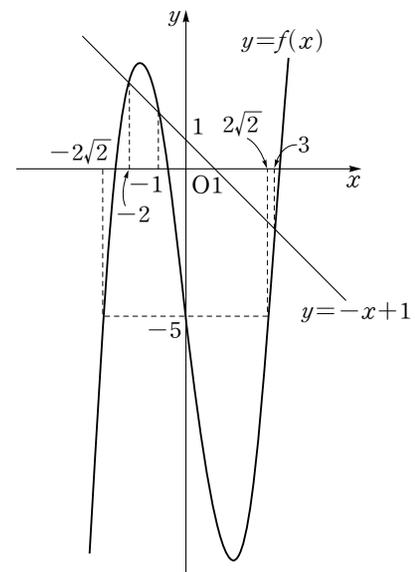
두 행렬 X, Y 에서 꼭짓점 A, B 의 연결 관계를 나타내는 행을 제외한 나머지 성분의 총합을 각각 x, y 라 할 때, $x+y$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 부등식

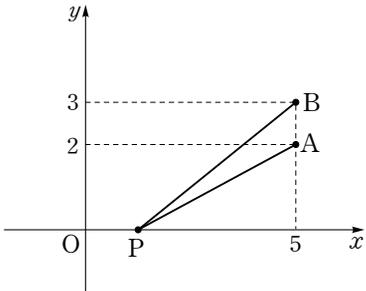
$$\log_3 y - 1 \leq 1 - \log_3 x \leq 1 - \log_3 y$$

를 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하시오. [4점]

27. 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+1$ 은 세 점에서 만나고 그 교점의 x 좌표는 $-2, -1, 3$ 이다. 또, 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 세 점 $(-2\sqrt{2}, -5), (0, -5), (2\sqrt{2}, -5)$ 를 지난다. 부등식 $\frac{6-x}{f(x)+5} \geq 1$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하시오. [4점]



28. 좌표평면 위에 두 점 $A(5, 2)$, $B(5, 3)$ 과 x 축 위를 움직이는 점 P 가 있다. $\tan(\angle BPA) = \frac{1}{7}$ 을 만족시키는 점 P 는 모두 4개가 있다. 이 점들의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 용량이 10 L인 어느 물통에 물이 1 L 이상 들어 있을 때 이 물통과 연결된 단추를 한 번 누르면 이 물통에 담긴 물의 양의 $\frac{1}{5}$ 이 빠져나가고, 물통에 들어 있는 물의 양이 1 L 미만일 때 이 단추를 한 번 누르면 물이 가득 찬다고 한다. 이 물통에 물을 가득 채운 다음 단추를 n 번 누르면 다시 물이 가득 찬다고 할 때, n 의 최솟값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.301$ 로 계산하고, 물이 빠져나가거나 채워지는 도중에는 단추를 누르지 않는다.) [4점]

30. 수열 $\{a_n\}$ 은 다음과 같이 자연수 중에서 3의 배수를 제외한 나머지 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열한 것이다.

$$\{a_n\} : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, \dots$$

이때, 수열 $\{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$b_n = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수일 때}) \\ a_n - 1 & (a_n \text{이 홀수일 때}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$b_{81} + b_{82} + b_{83} + b_{84}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.