수리 영역

[가형]

1. 계산 능력 – 지수함수와 로그함수 〔2점〕 정답 ⑤

$\frac{3}{2}\log_2 6-\log_2\sqrt{54}+\log_2\sqrt{32}$

$=\frac{3}{2}(\log_2 2+\log_2 3)-\frac{1}{2}(\log_2 2+\log_2 3^3)+\frac{1}{2}\log_2 2^5$

$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\log_2 3-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\log_2 3+\frac{5}{2}$

$=\frac{7}{2}$

2. 계산 능력 – 함수의 극한과 연속 〔2점〕 정답 ⑤

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}$

$=\frac{1}{4}$

3. 계산 능력 – 수열의 극한 〔2점〕 정답 ④

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n-2)}{1+2+3+\cdots+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n-2)}{\frac{2n(2n+1)}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n-6}{2n^2+n}=3$

4. 이해력 – 방정식과 부등식 〔3점〕 정답 ①

$\frac{x^2+x+2}{x+1}\le2$에서

$\frac{x^2+x+2}{x+1}-2\le0$

$\frac{x^2+x+2-2(x+1)}{x+1}\le0$

$\frac{x(x-1)}{x+1}\le0$

$x(x-1)(x+1)\le0,\ x\ne-1$

$\therefore x<-1$ 또는 $0\le x\le1$

따라서, 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1개이다.

5. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ④

그래프 G의 꼭짓점의 개수를 x라 하면, 그래프의 모든 꼭짓점에 연결된 변의 개수의 합은 모든 변의 개수의 2배이므로

$6x=45\times2$

$\therefore x=15$

6. 이해력 – 삼각함수 〔3점〕 정답 ②

반지름의 길이를 r라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}(r\cos\theta)(r\sin\theta)$

$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$

$S'=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{O'H'}}\cdot\overline{\mathrm{A'H'}}=\frac{1}{2}\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(r\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}r^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=\frac{1}{4}r^2\sin\theta$

$\therefore \frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta}{\frac{1}{4}r^2\sin\theta}=2\cos\theta$

7. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 ④

ㄱ. (거짓) 【반례】 $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$이지만 $A\ne O$ 이다.

ㄴ. (참) A의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2=O$에서 $A^{-1}A^2=A^{-1}O$

$A=O$이므로 A의 역행렬이 존재하지 않는다. 따라서, 가정에 위배되므로 A는 역행렬이 존재하지 않는다.

ㄷ. (참) $A^2=O$에서

$E-A^2=E$

$(E-A)(E+A)=E$

따라서, $E-A$의 역행렬은 $E+A$이다.

8. 이해력 – 방정식과 부등식 〔3점〕 정답 ②

$\frac{a}{x}+\frac{6}{x-1}=\frac{x+a}{x(x-1)}$ 에서

$a(x-1)+6x=x+a$

$\therefore (a+5)x=2a$

위의 방정식이 근을 갖지 않으려면

(i) $a=-5$이면 근을 갖지 않는다.

(ii) $a\ne-5$이면 $x=\frac{2a}{a+5}$

주어진 방정식이 근을 갖지 않으려면 $x=\frac{2a}{a+5}$가 무연근이 되어야 하므로

$\frac{2a}{a+5}=0$ 또는 $\frac{2a}{a+5}=1$

$\therefore a=0$ 또는 $a=5$

따라서, 주어진 방정식이 근을 갖지 않도록 하는 상수 a는 $-5,\ 5,\ 0$이므로 그 합은 0이다.

9. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 정답 ④

$x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore a=\lim_{x\to0}f(x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(1+x)^{\frac{2}{x}}}{\tan2x}$

$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}}{\frac{\tan2x}{2x}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lim_{x\to0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^2}{\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{2x}}$

$=\frac{e^2}{2}$

10. 이해력 – 수열 〔4점〕 정답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하고, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. (거짓) 【반례】 $a_1=1,\ a_3=\frac{5}{2},\ a_5=4$라 하고, $b_1=1,\ b_3=2,\ b_5=4$라 하면 $a_1=b_1,\ a_5=b_5$이지만 $b_1<b_3<b_5$이다.

ㄴ. (참) $a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{b_1+b_5}{2}$

$=\frac{a+ar^4}{2}>\sqrt{a\cdot ar^4}$

$=ar^2=b_3$

ㄷ. (참) $b_1+b_9=a+ar^8>2\sqrt{a\cdot ar^8}$

$=2ar^4=2b_5=2a_5$

$b_2+b_8=ar+ar^7>2\sqrt{ar\cdot ar^7}$

$=2ar^4=2b_5=2a_5$

$\cdots$

$b_4+b_6=ar^3+ar^5>2\sqrt{ar^3\cdot ar^5}$

$=2ar^4=2b_5=2a_5$

$\sum_{k=1}^{9}b_k=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$

$=(b_1+b_9)+(b_2+b_8)+(b_3+b_7)+(b_4+b_6)+b_5$

$>2a_5+2a_5+2a_5+2a_5+a_5$

$=(a_1+a_9)+(a_2+a_8)+(a_3+a_7)+(a_4+a_6)+a_5$

$=\sum_{k=1}^{9}a_k$

11. 추론 능력(추측) – 수열의 극한 〔4점〕 정답 ⑤

$\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}=\triangle\mathrm{D_1E_1F_1}=\triangle\mathrm{G_1H_1I_1}=\frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}$이고 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 삼각형 ABC가 겹치는 부분의 넓이는 $\frac{1}{9}\triangle\mathrm{A_1B_1C_1}$이므로

$S_1=3\cdot\frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{27}\triangle\mathrm{ABC}$

[그림 2]에서 만들어진 삼각형 1개의 넓이는 $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\triangle\mathrm{ABC}$이므로

$S_2=9\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\frac{8}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}\triangle\mathrm{ABC}$

$\cdots$

$S_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{8}{27}\triangle\mathrm{ABC}$

이때, $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot6^2=9\sqrt{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{27}\cdot9\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{8\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}}=4\sqrt{3}$

12. 추론 능력(증명) – 수열 〔3점〕 정답 ②

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\boxed{\frac{5}{4}}$

(우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 (*)은 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}$을 더하면

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

그런데

$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$

$=\boxed{\frac{1}{k(k+1)^2}}>0$

$\therefore a+f(2)+g(2)=\frac{5}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{17}{12}$

13. 추론 능력(추측) – 방정식과 부등식 〔4점〕 **정답** ⑤

ㄱ. (참) $\frac{x-3}{x+2}\leq 0$

$(x-3)(x+2)\leq 0,\ x\neq -2$

$-2<x\leq 3$

$\therefore f(1)=3$

ㄴ. (참) $f(k)$에서 k가 짝수일 때

$\frac{(x-3)^k}{x+2}\leq 0$

$(x-3)^k(x+2)\leq 0,\ x\neq -2$

$x<-2$ 또는 $x=3$

$\therefore f(k)=1$

$\therefore f(2l+2m)=1,\ f(2l)\cdot f(2m)=1\cdot 1=1$

$\therefore f(2l+2m)=f(2l)\cdot f(2m)$

ㄷ. (참) $f(k)$에서 k가 홀수일 때

$\frac{(x-3)^k}{x+2}\leq 0$

$(x-3)^k(x+2)\leq 0,\ x\neq -2$

$-2<x\leq 3$

$\therefore f(k)=3$

$\therefore f(2l+1)=f(2m+1)=3$

14. 수학 내적 문제 해결 능력 – 함수의 극한과 연속 〔3점〕 **정답** ①

반지름의 길이를 r라 하면

$l=r\theta$

$\triangle$AOB에서

$\overline{AB}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\theta$

$=2r^2(1-\cos\theta)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}r\sqrt{1-\cos\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{l}{\overline{AB}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{r\theta}{\sqrt{2}r\sqrt{1-\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}$$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{2}}=1$$

15. 추론 능력(추측) – 지수함수와 로그함수 〔4점〕 **정답** ②

ㄱ. (거짓) 【반례】 $a=10^{\frac{1}{3}},\ b=10^{\frac{2}{3}},\ c=10^{\frac{1}{3}}$이라 하면

$f(a)+f(b)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1,$

$f(b)+f(c)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$이지만

$f(a)+f(c)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\neq 1$

ㄴ. (참) $\log a=n+\alpha$(n은 정수, $0<\alpha<1$)

$\log b=m+\beta$(m은 정수, $0<\beta<1$)

$\log c=l+\gamma$(l은 정수, $0<\gamma<1$)라 하면

$f(a)+f(b)=1$이므로 $\alpha+\beta=1$

$\log ac=\log a+\log c=(n+\alpha)+(l+\gamma)$

$=n+l+\alpha+\gamma$

$\log\frac{b}{c}=\log b-\log c=(m+\beta)-(l+\gamma)$

$=m-l+\beta-\gamma$

(i) $0<\gamma<\beta$이면 $0<\beta-\gamma<1$이므로

$\alpha+\gamma=1-\beta+\gamma=1-(\beta-\gamma)$

$\therefore 0<1-(\beta-\gamma)<1$

$\therefore 0<\alpha+\gamma<1$

따라서, $f(ac)=\alpha+\gamma,\ f\left(\frac{b}{c}\right)=\beta-\gamma$이므로

$f(ac)+f\left(\frac{b}{c}\right)=(\alpha+\gamma)+(\beta-\gamma)=1$

(ii) $\beta<\gamma<1$이면 $0<\gamma-\beta<1$이므로

$\alpha+\gamma=1-\beta+\gamma=1+\gamma-\beta$

$\therefore 1<1+\gamma-\beta<2$

$\therefore 1<\alpha+\gamma<2$

또한, $-1<\beta-\gamma<0$이다.

따라서, $f(ac)=\alpha+\gamma-1,$

$f\left(\frac{b}{c}\right)=\beta-\gamma+1$이므로

$f(ac)+f\left(\frac{b}{c}\right)=(\alpha+\gamma-1)+(\beta-\gamma+1)=1$

ㄷ. (거짓) 【반례】 $a=10^{\frac{2}{3}}$이라고 하면

$a^2=10^{\frac{4}{3}}=10\times 10^{\frac{1}{3}}$이므로

$f(a)=\frac{2}{3},\ f(a^2)=\frac{1}{3}$

따라서, $f(a)+f(a^2)=1$이지만 $3f(a)=2$이므로 $3f(a)\neq 1$이다.

16. 추론 능력(추측) – 수열의 극한 〔4점〕 **정답** ③

$f_1(x)=(x-2)^2=x^2-4x+4$이므로

$a_1=-4,\ b_1=4$ ·· ㉠

$f_n(x)=b_n+a_nx+\cdots$이라 하면

$f_{n+1}(x)=(b_n-2+a_nx+\cdots)^2$

$=(b_n-2)^2+2(b_n-2)a_nx+\cdots$

$\therefore b_{n+1}=(b_n-2)^2$ ································· ㉡

$a_{n+1}=2(b_n-2)a_n$ ································· ㉢

㉠, ㉡에서

$b_2=(b_1-2)^2=4,\ b_3=(b_2-2)^2=4,\ \cdots,$

$b_n=(b_{n-1}-2)^2=4$

㉢에서 $a_{n+1}=4a_n$이므로

$a_n=(-4)\cdot 4^{n-1}=-4^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{-4^{n+1}}=\frac{-\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{12}$$

17. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 **정답** ①

(i) $-1\leq x\leq 1$일 때

$2^{f(x)}=2$

$f(x)=\log_2 2=1$

(ii) $x<-1$일 때

$2^{f(x)}=ax+b(a<0)$

$f(x)=\log_2(ax+b)$ (단, $-a+b=2$)

(iii) $x>1$일 때

$2^{f(x)}=a'x+b'(a'>0)$

$f(x)=\log_2(a'x+b')$ (단, $a'+b'=2$)

따라서, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ①과 같다.

18. 이해력 – 함수의 극한과 연속 〔4점〕 **정답** ③

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$$

$$=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{2n+1}{2n}$$

$$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$=\ln\frac{2n+1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)$에서 $\frac{1}{n}=t$라 하면

$n\to\infty$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(2^t-1)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=\ln 2$$

$\therefore a=\ln 2$

$$\lim_{n\to\infty}n\{f(n)-a\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\ln\frac{2n+1}{n}-\ln 2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{2n+1}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot 2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{2}$$

19. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 ①

$y=\log_2(2x-1)$의 역함수를 구하면

$x=\log_2(2y-1)$

$2^x=2y-1$

$2y=2^x+1$

$y=2^{x-1}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore f(x)=2^{x-1}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{A}(0,\ 1)$

$1=\log_2(2x-1)$에서

$2=2x-1,\ x=\dfrac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}-1}+\dfrac{1}{2}=\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2},\ \sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}-1\right)\\&=\frac{6\sqrt{2}-3}{8}\end{aligned}$$

20. 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수 〔4점〕 정답 ③

두 직선 AB, AC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\theta=\pi+(\beta-\alpha)$이고

$x_3-x_2=x_2-x_1=1$에서 $x_3=x_2+1,\ x_1=x_2-1$이므로

$\tan\alpha=\dfrac{x_2{}^2-x_1{}^2}{x_2-x_1}=x_2+x_1=2x_2-1$

$\tan\beta=\dfrac{x_3{}^2-x_1{}^2}{x_3-x_1}=x_3+x_1=2x_2$

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\pi+\beta-\alpha)=\tan(\beta-\alpha)\\&=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\\&=\frac{2x_2-(2x_2-1)}{1+2x_2(2x_2-1)}\\&=\frac{1}{4x_2{}^2-2x_2+1}\\&=\frac{1}{4\left(x_2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

따라서, $\tan\theta$는 $x_2=\dfrac{1}{4}$일 때 최댓값 $\dfrac{4}{3}$를 가진다.

신유형

21. 수학 외적 문제 해결 능력 – 수열 〔4점〕 정답 ③

시행	각 시행에 사용된 구슬의 개수	각 시행까지 사용된 구슬의 개수	사용된 마지막 구슬에 적힌 번호
시행 1	3	3	3
시행 2	3	6	6
시행 3	6	12	12
시행 4	12	24	24
⋮	⋮	⋮	⋮
시행 n	$3\cdot2^{n-2}(n\geq2)$	$3\cdot2^{n-1}(n\geq1)$	$3\cdot2^{n-1}(n\geq1)$

시행 9까지 사용된 구슬은 $3\cdot2^{9-1}=768$개이므로 9번째 시행 후 시행 1에서 2가 적힌 구슬은

$\dfrac{768}{3}=256=2^8$번째 위치한다.

시행 2에서 첫 번째 위치시킨 4가 적힌 구슬은

$\dfrac{768}{3\times2}=128=2^7$번째 위치한다.

…

시행 $k(k>1)$에서 첫 번째 위치시킨 구슬은

$\dfrac{3\cdot2^{9-1}}{3\cdot2^{k-1}}=2^{9-k}$번째 위치한다.

따라서, 시행 4에서 첫 번째 위치시킨 13이 적힌 구슬이 $2^5=32$번째 위치한다.

22. 계산 능력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 2

$AX=A+X$에서

$AX-X=A$

$(A-E)X=A$

$$\begin{aligned}\therefore X&=(A-E)^{-1}A\\&=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서, 행렬 X의 모든 성분의 합은 2이다.

23. 이해력 – 삼각함수 〔3점〕 정답 70

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$에서

$\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}=0$

$\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x=0$

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$

$\sqrt{3}\cos x=-\sin x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}$

$\therefore \tan x=-\sqrt{3}$

$\therefore x=n\pi-\dfrac{\pi}{3}$

$0\leq x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서, 모든 해의 합은 $\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{5}{3}\pi=\dfrac{7}{3}\pi$

$\therefore \dfrac{30S}{\pi}=\dfrac{30\cdot\frac{7}{3}\pi}{\pi}=70$

24. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 정답 35

$2a^{2x}=a^x+3$에서

$2a^{2x}-a^x-3=0$

$(2a^x-3)(a^x+1)=0$

$\therefore a^x=\dfrac{3}{2}\ (\because a^x>0)$

$\therefore a^{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}$

$\therefore p+q=35$

25. 이해력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 6

$\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}a&2\\2&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a-1&2\\2&b-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

연립방정식의 해가 무수히 많으므로 $\begin{pmatrix}a-1&2\\2&b-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$\therefore (a-1)(b-1)-4=0$

$(a-1)(b-1)=4$

이때, $a>1,\ b>1$이므로

$(a-1)+(b-1)\geq2\sqrt{(a-1)(b-1)}$

$(a-1)+(b-1)\geq4$

$a+b\geq6$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

따라서, $a+b$의 최솟값은 6이다.

26. 수학 내적 문제 해결 능력 – 행렬과 그래프 〔3점〕 정답 25

$X^2-2xX=O$에서

$X(X-2xE)=O$

$\begin{pmatrix}x+y&2y+1\\1&x-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x+y&2y+1\\1&-x-y\end{pmatrix}=O$

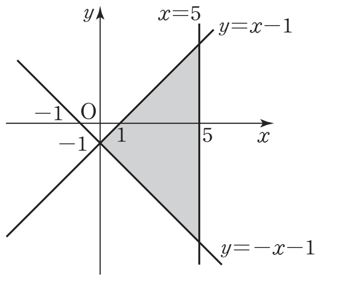
$\begin{pmatrix}-x^2+y^2+2y+1&0\\0&2y+1-x^2+y^2\end{pmatrix}=O$

$-x^2+y^2+2y+1=0$

$x^2-(y+1)^2=0$

$\{x-(y+1)\}\{x+(y+1)\}=0$

따라서, $y=x-1$ 또는 $y=-x-1$



따라서, 이 두 직선과 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\{4-(-6)\}\cdot5=25$

27. 이해력 – 수열의 극한 〔4점〕 정답 12

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2n^2+n$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2n^2+n)-\{2(n-1)^2+(n-1)\}\\&=4n-1\ (n\geq2)\end{aligned}$$

$S_1=a_1=3$이므로

모든 자연수 n에 대하여

$a_n=4n-1$

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-1)(4k+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right]\\&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

$\therefore S=\dfrac{1}{12}$

$\therefore \dfrac{1}{S}=12$

28. 이해력 – 방정식과 부등식 〔4점〕 정답 4

$\overline{\mathrm{A'P}}=x$로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{x^2+3^2},\ \overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(12-x)^2+6^2}$이므로

$\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(12-x)^2+36}=15$ ………………… ㉠

$\sqrt{x^2+9}-15=-\sqrt{x^2-24x+180}$

양변을 제곱하면

$x^2+9-30\sqrt{x^2+9}+225=x^2-24x+180$

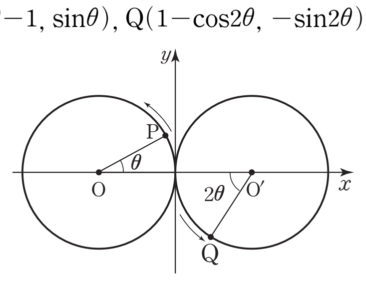
$4x+9=5\sqrt{x^2+9}$
다시 양변을 제곱하면
$16x^2+72x+81=25x^2+225$
$x^2-8x+16=0,\ (x-4)^2=0$
$\therefore x=4$
이 값은 ㉠을 만족시키므로 근이 된다.
$\therefore \overline{A'P}=4$

29. 이해력 – 수열 〔4점〕 정답 128

$a_{n+1}=a_n(a_n+2)$에서
$a_{n+1}=a_n^2+2a_n$
$a_{n+1}=(a_n+1)^2-1$
$a_{n+1}+1=(a_n+1)^2$
$b_n=a_n+1$이라 하면
$b_1=a_1+1=2$이고 $b_{n+1}=b_n^2$
$\log_2 b_{n+1}=2\log_2 b_n$
따라서, 수열 $\{\log_2 b_n\}$은 첫째항이 $\log_2 b_1=1$이고, 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore \log_2 b_n=1\cdot 2^{n-1}$
$\therefore b_n=2^{2^{n-1}}$
$\therefore a_n=b_n-1=2^{2^{n-1}}-1$
$\therefore \log_2(a_8+1)=\log_2\{(2^{2^7}-1)+1\}$
$=\log_2 2^{2^7}=2^7=128$

30. 수학 내적 문제 해결 능력 – 삼각함수 〔4점〕 정답 81

그림과 같이 점 A가 원점이 되도록 하고, 출발 후 점 P가 θ만큼 움직였다고 하면 점 Q는 2θ만큼 움직이므로
$P(\cos\theta-1,\ \sin\theta),\ Q(1-\cos2\theta,\ -\sin2\theta)$



$\overline{PQ}^2=(-2+\cos\theta+\cos2\theta)^2+(\sin\theta+\sin2\theta)^2$
$=4+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta-4\cos\theta-4\cos2\theta$
$+2\cos\theta\cos2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta\sin2\theta+\sin^2 2\theta$
$=6-4\cos\theta-4\cos2\theta+2\cos\theta\cos2\theta$
$+2\sin\theta\sin2\theta$
$=6-4\cos\theta-4\cos2\theta$
$+2(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)$
$=6-4\cos\theta-4\cos2\theta+2\cos\theta$
$=6-2\cos\theta-4\cos2\theta$
$=6-2\cos\theta-4(2\cos^2\theta-1)$
$=10-2\cos\theta-8\cos^2\theta$
$=-8\left(\cos\theta+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{81}{8}$

따라서, $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\cos\theta=-\frac{1}{8}$일 때 $\sqrt{\frac{81}{8}}$이다.
$\therefore 8M^2=81$

● [나형]

1. 가형과 동일 〔2점〕 정답 ⑤

2. 계산 능력 – 행렬과 그래프 〔2점〕 정답 ②

$A-B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
$\therefore (A-B)A=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-9 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$
따라서, 행렬 $(A-B)A$의 모든 성분의 합은 $(-9)+1+1+(-3)=-10$이다.

3. 가형과 동일 〔2점〕 정답 ④

4. 이해력 – 지수함수와 로그함수 〔3점〕 정답 ①

$A=\sqrt[3]{\sqrt{11}}=11^{\frac{1}{6}}$
$B=\sqrt[4]{5}=5^{\frac{1}{4}}$
$C=\sqrt{\sqrt[3]{13}}=13^{\frac{1}{6}}$
$A^{12}=\left(11^{\frac{1}{6}}\right)^{12}=11^2=121$
$B^{12}=\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{12}=5^3=125$
$C^{12}=\left(13^{\frac{1}{6}}\right)^{12}=13^2=169$
$\therefore A^{12}<B^{12}<C^{12}$
$\therefore A<B<C$

5. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ④

6. 이해력 – 수열 〔3점〕 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 $a,\ d$라 하면
$a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=128$
$(a+3d)+(a+7d)+(a+11d)+(a+15d)=128$
$4a+36d=128$
$a+9d=32$
$\therefore a_{10}=a+9d=32$

7. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ④

8. 이해력 – 수열의 극한 〔3점〕 정답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-3\right)=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=3$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3n+2}{a_n+2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}-3+\frac{2}{n}}{\frac{a_n}{n}+2-\frac{1}{n}}$
$=\frac{2\cdot3-3}{3+2}=\frac{3}{5}$

9. 이해력 – 수열 〔3점〕 정답 ③

$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2$이므로
$a_n=2+(n-1)2=2n$
$b_1=1,\ a_n=b_{n+1}-b_n$이므로
$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=1+\frac{2(n-1)n}{2}=n^2-n+1$
$\therefore b_{10}=100-10+1=91$

10. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ④

11. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ⑤

12. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ②

13. 추론 능력(추측) – 행렬과 그래프 〔4점〕 정답 ①

$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
$A_2=PA_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
$A_3=A_2P=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$
$A_4=PA_3=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$
$A_5=A_4P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
…
$\therefore A_{4n-3}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_{4n-2}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix},$
$A_{4n-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ A_{4n}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
$\therefore A_{2012}+A_{2013}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$
따라서, $A_{2012}+A_{2013}$의 $(1,\ 1)$ 성분은 -1이다.

14. 이해력 - 수열의 극한 〔3점〕 정답 ③

$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{\triangle A_nB_nD_n}{\triangle C_nB_nD_n}=\dfrac{\overline{A_nD_n}}{\overline{C_nD_n}}$

$\angle A_nB_nC_n$의 이등분선이 $\overline{B_nD_n}$이므로

$\dfrac{\overline{A_nD_n}}{\overline{C_nD_n}}=\dfrac{\overline{A_nB_n}}{\overline{B_nC_n}}=\dfrac{\sqrt{n^2+(2n+1)^2}}{2n-(-n)}$

$=\dfrac{\sqrt{5n^2+4n+1}}{3n}$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n^2+4n+1}}{3n}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

15. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ②

16. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ③

17. 가형과 동일 〔3점〕 정답 ①

18. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 〔4점〕 정답 ⑤

ㄱ. (참) 점 P_{15}의 좌표는 $(1, 5)$이므로 점 P_{21}의 좌표는 $(1, 6)$이다.

ㄴ. (참) $1+2+3+\cdots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$이므로

$k=\dfrac{m(m+1)}{2}$

ㄷ. (참) $P_1(1, 1)$ …… 1개

$P_2(2, 1)$, $P_3(1, 2)$ …… 2개

$P_4(3, 1)$, $P_5(2, 2)$, $P_6(1, 3)$ …… 3개

…

위와 같이 배열을 하면 x좌표와 y좌표의 합이 같은 것들의 개수는 $\{(x\text{좌표})+(y\text{좌표})-1\}$이다. 따라서, 좌표가 $(n+1, m+1)$인 점을 찾으려면 $1+2+3+\cdots+\{(n+1)+(m+1)-1-1\}$의 값에 $m+1$을 더해 주어야 한다.

$\therefore 1+2+\cdots+(m+n)+(m+1)$

$=\dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m+1$

$\therefore a=\dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m+1$

19. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ①

20. 수학 외적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 ②

$x=100\left(1-k^{-\frac{7}{2}t}\right)$에서

$1-k^{-\frac{7}{2}t}=\dfrac{x}{100}$

$k^{-\frac{7}{2}t}=1-\dfrac{x}{100}$

$-\dfrac{7}{2}t=\log_k\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

$\therefore t=-\dfrac{2}{7}\log_k\left(1-\dfrac{x}{100}\right)$

(i) 50%가 증발하는 데 걸리는 시간을 m이라 하면

$m=-\dfrac{2}{7}\log_k\left(1-\dfrac{50}{100}\right)$

$=-\dfrac{2}{7}\log_k\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{7}\log_k 2$

(ii) 75%가 증발하는 데 걸리는 시간을 n이라 하면

$n=-\dfrac{2}{7}\log_k\left(1-\dfrac{75}{100}\right)$

$=-\dfrac{2}{7}\log_k\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{7}\log_k 2^2$

$\therefore \dfrac{n}{m}=\dfrac{\frac{2}{7}\log_k 2^2}{\frac{2}{7}\log_k 2}=2$

21. 가형과 동일 〔4점〕 정답 ③

22. 가형과 동일 〔3점〕 정답 2

23. 이해력 - 수열의 극한 〔3점〕 정답 24

$f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^n}{\left(\frac{5}{2}\right)^n+2}=2$

$f(1)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot 1^n}{1^n+2}=\dfrac{2}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}=0$

$\therefore 9\left\{f\left(\dfrac{5}{2}\right)+f(1)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}=9\left(2+\dfrac{2}{3}+0\right)=24$

24. 가형과 동일 〔3점〕 정답 35

25. 가형과 동일 〔3점〕 정답 6

26. 가형과 동일 〔3점〕 정답 25

27. 가형과 동일 〔4점〕 정답 12

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 26

$A=\begin{pmatrix}2 & -4\\0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$(A^{-1})^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

$(A^{-1})^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\begin{pmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{pmatrix}$

…

$(A^{-1})^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times 2n=n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \log_2 a_{32}=\log_2 32\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{32-1}=\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{26}=-26$

$\therefore |\log_2 a_{32}|=26$

29. 가형과 동일 〔4점〕 정답 128

30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수 〔4점〕 정답 9

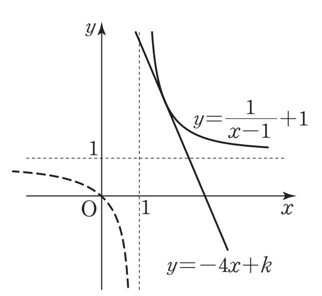
$\log_2(x+y)=\log_2 x+\log_2 y$에서

$x+y=xy$ (단, $x>0$, $y>0$) ……… ㉠

$(x-1)y=x$

$y=\dfrac{x}{x-1}$

$y=\dfrac{1}{x-1}+1$ ……… ㉡



㉡의 그래프는 그림과 같고, $4x+y=k$라 하면 $y=k-4x$이고 이 식을 ㉠에 대입하면

$x+k-4x=x(k-4x)$

$4x^2-(k+3)x+k=0$ ……… ㉢

이때, $4x+y$의 값이 최소가 되려면 그림과 같이 접해야 하므로 ㉢의 판별식을 D라 하면

$D=(k+3)^2-16k=0$

$k^2-10k+9=0$

$(k-1)(k-9)=0$

이때, 그림에서 $k>1$이므로 $k=9$

따라서, $4x+y$의 최솟값은 9이다.