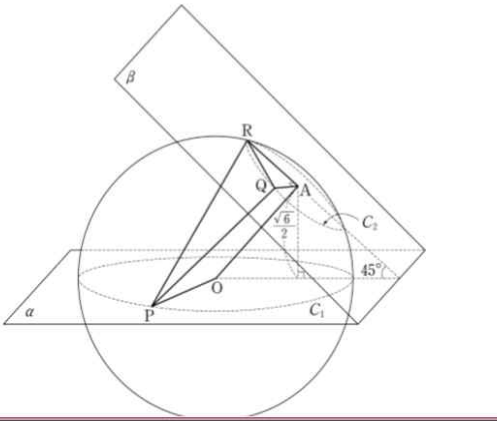
14학년도 5월 30번

30. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

> (가) ∠QAR = 90°
> (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Step 1) 평면 PQR과 평면 AQPO가 이루는 각의 크기를 구하는게 목표이므로, 우리는

1. 이면각을 직접 구하는 방법
2. 두 평면의 방정식을 구해서 법선벡터를 이용해 각을 구하는 방법
3. 정사영 넓이를 이용한 방법

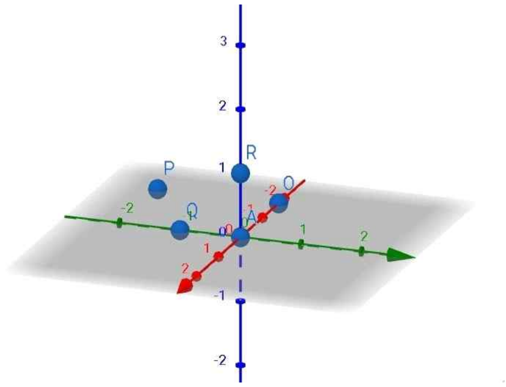
3가지 중 한 방법으로 답을 구할 수 있음을 염두해 둔다.

Step 2)

$\overline{AO}$는 평면 β와 수직이므로, 점 A에서 평면 α로 내린 수선의 발을 H라고 할때, $\angle AOH = \frac{\pi}{4}$ 이고, $\overline{AO}$= $\sqrt{3}$

$\overline{AO}$ $=\sqrt{3}$ 이므로, 원 C_1의 반지름은 1이다.

$\angle QAR = \frac{\pi}{2}$ 이므로, $\overline{AO}, \overline{AQ}, \overline{AR}$를 각각 점 A를 원점으로 하는, x, y, z축으로 하는 공간 좌표에 나타낼 수 있다.



즉 A(0,0,0), O($-\sqrt{3}$,0,0), Q(0,-1,0), R(0,0,1) 이고, 조건 (나)에서 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하고, OP의 길이가 2임을 고려해, 좌표상에 나타내면,

P($-\sqrt{3}$,-2, 0) 으로 나타 낼 수 있다.

Step 3)

Step 1) 의 각도를 구하는 방법중, 2 번 방법을 사용해서 구해볼수 잇으므로,

두 평면의 법선 벡터를 구한다.

평면 AQPO 의 법선벡터는 위 그림에서 (0,0,1) 이고, 평면 PQR은 P($-\sqrt{3}$,-2, 0), Q(0,-1,0), R(0,0,1) 을 지나는 평면이므로 평면의 방정식이 $x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}z=\sqrt{3}$ 이므로, 법선 벡터는 $(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 이 된다.

따라서 두 법선 벡터를 통해 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 이고 답은 10 이다.

19학년도 6월 29번

29. 좌표평면 위에 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\cos(\angle CAB)=\frac{3}{5}$
>
> (나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=30$이고 $|\overrightarrow{CD}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

점 A(0,0) , B(5,0) 으로 설정할때,

$O_1 : x^2+y^2=25, O_2=(x-5)^2+y^2=25$

점 C는 O_1위의 점이므로 $C(5\cos\theta,5\sin\theta)$로 잡을 수 있고, $\cos\theta=\frac{3}{5}$ 이므로, C(3,4) 혹은 C(3,-4) 이다.

C의 y축 좌표에 따라 D의 좌표가 변할 것이고, 선분 CD는 그에 따라 대칭적인 모양이기 때문에, C(3,4)로 잡아도 일반성을 잃지 않기 때문에, C3,4)라 하자.

이때 D(x,y) 라고 하면, 조건 (나) 에 의해, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(5,0)\cdot(x-3,y-4)=30$ 이므로, x=9

또한, D는 O_2위의 점이므로, D(9,3) 혹은 D(9,-3) 인데, 조건 (나) 의 CD의 길이가 9보다 작다에 의해 D(9,3)

CD를 지름으로 하는 원의 중심을 M이라고 하면 M(6,$\frac{7}{2}$) 이고

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})=$
$|\overrightarrow{PM}|^2+\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$
이다.

PM의 길이는 CD를 지름으로 하는 원의 반지름 이므로 $\frac{\sqrt{37}}{2}$이고,

$\overrightarrow{MA}=(-6,\frac{-7}{2}),\overrightarrow{MB}=(-1,\frac{-7}{2})$이므로

$|\overrightarrow{PM}|^2+\overrightarrow{PM}\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=
$\frac{37}{4}+\overrightarrow{PM}\cdot(-7,-7)+6+\frac{49}{4}$

이때 $\overrightarrow{PM}$이 (-7,-7) 과 같은 방향이면 값이 최대이므로

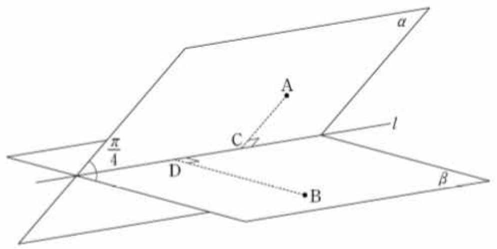
$\frac{37}{4}+\overrightarrow{PM}\cdot(-7,-7)+6+\frac{49}{4}$

= $\frac{55}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\times7\sqrt{2}=\frac{55}{2}+7\frac{\sqrt{74}}{2}$

답은 31

17학년도 9월 29번

29. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



직선 l 을 x축으로, 직선 DB를 y축으로 잡고, A의 수선의 발을 H라고 할때,

HB이의 이면각이므로 $\angle ACH=\frac{\pi}{4}$ 이고,

삼각형 ACH는 직각 이등변 삼각형이다.

따라서 CH= AH

또한 직선 AB와 평면 β가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 삼각형 AHB는 세 내각이 각각 $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$인 삼각형이다.

따라서 AB=2, HB= $\sqrt{3}$, AH=1 이므로

D(0,0,0) B(0,a,0) C(-b,0,0) H(-b,1,0) A(-b,1,1) 로 좌표를 잡을 수 있다.
(단 a,b > 0)

AD= $\sqrt{b^2+1+1}=\sqrt{3}$
AB= $\sqrt{b^2+(a-1)^2+1}=2$
이므로 $a=\sqrt{2}+1, b=1$

사면체 ABCD의 부피는

$\overline{AH}\times BCD$ 이 $\times\frac{1}{3}$ 이므로

$1\times[\frac{1}{2}\times1\times(\sqrt{2}+1)]\times\frac{1}{3}$

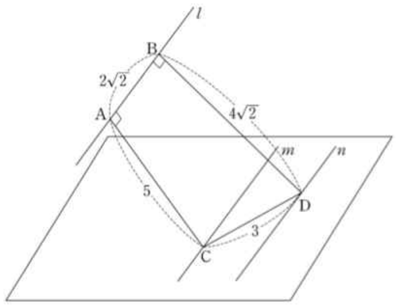
= $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{6}$

답은 12

11학년도 9월 25번

25. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

평행한 두 직선 l, m 위의 점 A, C에 대해서, $\overline{CA}$ l 면, $\overline{CA}\perp m$이다

마찬가지로 $\overline{BD}\perp n$이다.

직선 l을 평면에 내린 정사영을 직선 k라고 하고, A의 k로의 수선의 발을 X, B의 k로의 수선의 발을 Y 라고 할때,
각각 직선은 삼수선 정리에 의해
$\overline{XC}\perp k,m / \overline{YC}\perp k,n$ 이다.

점 C에서 n에 내린 수선의 발을 H라고 하고
$|AX|=|BY|=a, |XC|=b, |CH|=c$라고하자

주어진 길이와 미지수를 피타고라스 정리로 표현하면
$a^2+b^2=25, c^2+(2\sqrt{2})^2=3^2$
$a^2+(b+c)^2=32$

따라서 $a=4, b=3, c=1$ 이다.

X를 (0,0,0) , k,m,n이 포함된 평면을 xy 평면, k를 x축, $\overline{XH}$를 y축, $\overline{XA}$를 z축으로 잡으면
A(0,0,4) C(0,3,0) D($-2\sqrt{2}$,4,0) 이 되고,
ACD의 평면의 방정식은
$\sqrt{2}x+4y+3z=12$ 이다.

따라서, 두 평면이 이루는 각의 크기는, 두 평면의 법선벡터가 이루는 각의 크기 와 같고, 두 평면의 법선벡터는 각각
$(\sqrt{2},4,3),(0,0,1)$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{2},4,3)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+4^2+3^2}\times 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 $\tan\theta=\sqrt{2}$

답은 30

14학년도 11월 19번

19. 좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축에 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

구 S가 x,y축과 각각 접한 다는 것은, 구 S가 xy 평면과 만나 잘리는 단면 (원)이 x축, y축과 접함을 의미한다.

즉 단면 원(A라 칭하자) 의 반지름을 a 라 하면, 단면의 중심은 (a,a,0) 이 되고, 단면 A의 넓이는 64π 이므로, a=8 이다.

따라서 구의 중심을 (8,8,k)로 잡을 수 있다.

한편, 이 구 는 x축에 접하므로, 반지름은 $\sqrt{64+k^2}$ 이 된다.

따라서 구의 방정식은
$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-k)^2=64+k^2$

한편 이 구와 z축이 만나는 점을 구하려면, x=0, y=0을 대입 하면 되므로,
$(z-k)^2=k^2-64$

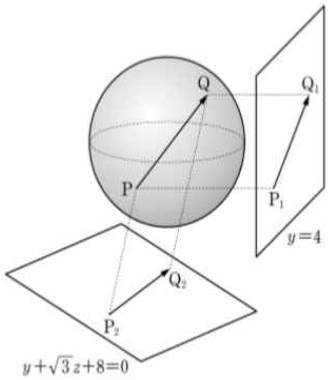
따라서 $z=k\pm\sqrt{k^2-64}$

이때, 두 점
$(0,0,k+\sqrt{k^2-64}),(0,0,k-\sqrt{k^2-64})$
사이의 거리가 8 이므로,
$2\sqrt{k^2-64}=8, k^2=80$

따라서 구 S의 반지름은 $\sqrt{k^2+64}=12$

14학년도 11월 29번

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



PQ의 길이를 k, PQ와 y=4가 이루는 각이 θ_1, PQ와 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 이 이루는 각을 θ_2라고 하면, 우리가 구하는 값은 $k^2(1-\cos^2\theta_1)+k^2(1-\cos^2\theta_2)$ 이고, 정리하면, $k^2(2-\cos^2\theta_1-\cos^2\theta_2)$ ....① 인데, 이 값은 k값이 커질수록 최대이다.

따라서 구 위의 두 점을 이은 PQ가 최대가 되려면, 이는 구의 중심을 지나야 하고, 우리는 P(-a,-b,-c), Q(a,b,c), $a^2+b^2+c^2=4$ 로 좌표를 잡을 수 있다.

PQ의 방향벡터는 (a,b,c) 이고 , y=4의 법선벡터는 (0,1,0) 이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{1}\,sin\theta_1=(a,b,c)$ • $(0,1,0)$

$\sin\theta_1=\dfrac{b}{2},\cos^2\theta_1=1-\sin^2\theta_1=1-\dfrac{b^2}{4}$

같은 방법으로, PQ의 방향벡터는 (a,b,c) 이고, $y+\sqrt{3}z+8=0$ 의 방향 벡터는 $(0,1,\sqrt{3})$ 이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{0^2+1^2+(\sqrt{3})^2}\,sin\theta_2$

= (a,b,c) • $(0,1,\sqrt{3})$ = $b+\sqrt{3}c$

$\sin\theta_2=\dfrac{b+\sqrt{3}c}{4},\cos^2\theta_2=1-\sin^2\theta_2=1-(\dfrac{b+\sqrt{3}c}{4})^2$

① 식에 k, $\cos^2\theta_1,\cos^2\theta_2$ 값을 집어 넣어 주고 정리하면, $5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2$

즉, 우리는 $a^2+b^2+c^2=4$ 의 조건 하에, $5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2$ 의 최대값을 구해주면 된다.

$5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2$는 , b,c의 부호가 같고, b,c의 절댓값이 클수록 최대가 되므로, 우리는 a=0, bc > 0 으로 둘 수 있다.

즉, $b^2+c^2=4$, b,c의 부호는 같다

$5b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2$=
$(3b^2+3c^2)+2b^2+2\sqrt{3}bc=12+2b^2+2\sqrt{3}bc$

이때, b,c는 부호가 같으면 되므로, b,c가 둘다 양수인 경우를 가정해도 일반성을 해치지 않는다. 따라서,

$b=2\cos t, c=2\sin t(0<t<\dfrac{\pi}{2})$ 라 두고 정리하면, (연산하는 방법 알려주신 zhuny 님 감사합니다 ㅎㅎ)

12 + $8\cos^2t+8\sqrt{3}\,sint cost$

= $12+8\times\dfrac{(1+\cos 2t)}{2}+4\sqrt{3}\,sin2t$

= $16+8\sin(2t+\dfrac{\pi}{6})$

즉, $t=\dfrac{\pi}{6}$ 일때, 최댓값 24를 가진다.

17학년도 11월 29번

29. 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

한변의 길이가 4인 정사면체의 좌표는 다음과 같이 잡을 수 있다. (파급효과 님의 기하와 벡터 좌표잡기 참고해주세요 !! 저도 쓰고 싶은데 시간이 없어서 죄송합니다 ㅠㅠ)

$A(2\sqrt{2},2\sqrt{2},2\sqrt{2}),B(2\sqrt{2},0,0)$
$C(0,2\sqrt{2},0),D(0,0,2\sqrt{2})$

이때 평면 BCD의 평면의 방정식은,
$x+y+z=2\sqrt{2}$ 이고,

$O(\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}),P(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2})$
이다.

정사면체 ABCD 의 한 면 BCD 위의 점 Q를 (a,b,c)로 잡으면

우선 Q(a,b,c)는 $x+y+z=2\sqrt{2}$ 안의 점이고....① , $OQ \cdot OP=$ 0... ② 이므로

①: a+b+c = $2\sqrt{2}$
②:
$(a-\frac{4\sqrt{2}}{3},b-\frac{4\sqrt{2}}{3},c-\frac{2\sqrt{2}}{3})\cdot(\frac{-\sqrt{2}}{3},\frac{-\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3})$
= 0

a+b-4c = 0

이때, ①, ②은 평면이고, 점Q는 두 평면의 교선, $a+b=\frac{8\sqrt{2}}{5},c=\frac{2\sqrt{2}}{2}$ 위의 자취이다.

즉 Q는 삼각형 BCD ($x+y+z=2\sqrt{2}$) **안쪽의** , $x+y=\frac{8\sqrt{2}}{5},z=\frac{2\sqrt{2}}{2}$ 의 **선분**을 움직이고,
$P(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 이므로,

점 P에서 Q의 자취인 선분에 수선의 발을 내리면, 이 선분의 중심에 수선의 발이 내려오므로, PQ의 길이가 최대가 될때는,
Q가 선분의 양끝점 일때다.

$Q(\frac{8\sqrt{2}}{5},0,\frac{2\sqrt{2}}{5})$or $Q(0,\frac{8\sqrt{2}}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5})$

따라서 PQ의 길이의 최대값은

$$\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{5})^2+(\sqrt{2})^2+(\frac{8\sqrt{2}}{5})^2}=\sqrt{\frac{196}{25}}=\frac{14}{5}$$

답은 19

18학년도 11월 29번

29. 좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

(0,0,0) 에서 $x+2z-5=0$으로의 거리는 $\sqrt{5}$ 이고, 수선의 발의 좌표는 (1,0,2) 이므로, 구와 $x+2z-5=0$ 가 만나서 생기는 원 C의 중심은 (1,0,2) 이고, 반지름이 1이다.

이때, 원 C의 법선벡터는 (1,0,2) 이므로, C는 y축과 평행한 지름을 가지고 있다.

따라서 C위의 점중에서 y좌표가 최소가 되는 P는 (1,-1,2) , Q(1,-1,0) 이다.

$\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MX}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MX}$
= $(0,2,2)+2\overrightarrow{MX}$

$\overrightarrow{K}=(0,2,2)$라고 하면,

$\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}=\overrightarrow{K}+2\overrightarrow{MX}$ 이고,
$|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2=|\overrightarrow{K}+2\overrightarrow{MX}|^2$
= $|\overrightarrow{K}|^2+4|\overrightarrow{MX}|^2+4\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{K}$
= 12 + $4\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{K}$

즉 우리는 $4\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{K}$ 의 최대값을 구하면 문제의 답을 풀어낼 수 있다.

$\overrightarrow{K}$와 $\overrightarrow{MX}$가 내적이 최대이려면 ,
$\overrightarrow{MX}$ 가, $\overrightarrow{K}$을 $x+2z-5=0$ 위로의 정사영을 내린 벡터와 같은 방향이면 된다.

$\overrightarrow{K}$와 $x+2z-5=0$ 가 이루는 각을 θ라고 하면,

$\overrightarrow{K}$ 와 $x+2z-5=0$ 의 법선벡터 (1,0,2) 에 대해서,

$|\overrightarrow{K}|\sqrt{1^2+0^2+2^2}\,sin\theta=\overrightarrow{K}\cdot(1,0,2)$
$\sqrt{0^2+2^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2+2^2}\sin\theta$
= $(0,2,2)\cdot(1,0,2)$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

따라서

$\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}=\overrightarrow{K}+2\overrightarrow{MX}$ 이고,
$|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2=|\overrightarrow{K}+2\overrightarrow{MX}|^2$
= $|\overrightarrow{K}|^2+4|\overrightarrow{MX}|^2+4\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{K}$
= 12 + $4\overrightarrow{MX}\cdot\overrightarrow{K}$
= 12 + $4|MX||K|\cos\theta$
= 12 + $4\times1\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$
= $12+\dfrac{8\sqrt{30}}{5}$

따라서 답은 136