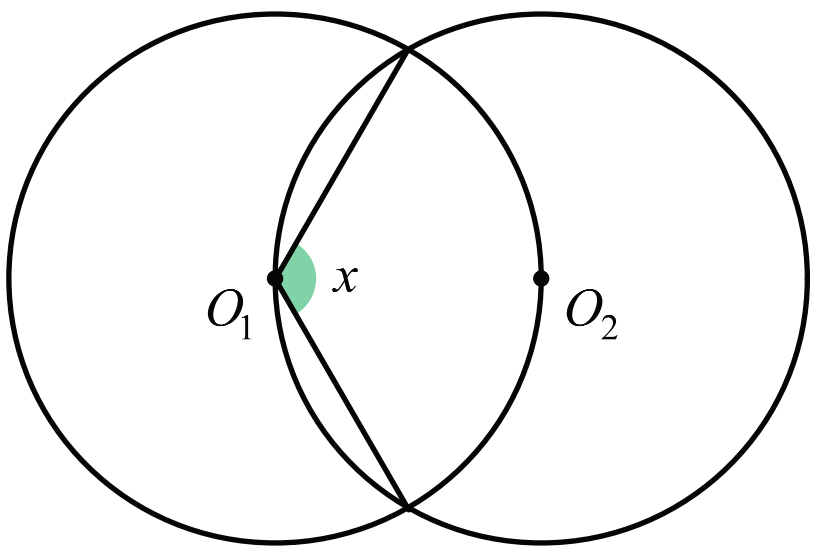
[도형의 닮음과 $\sum^{\infty}$]

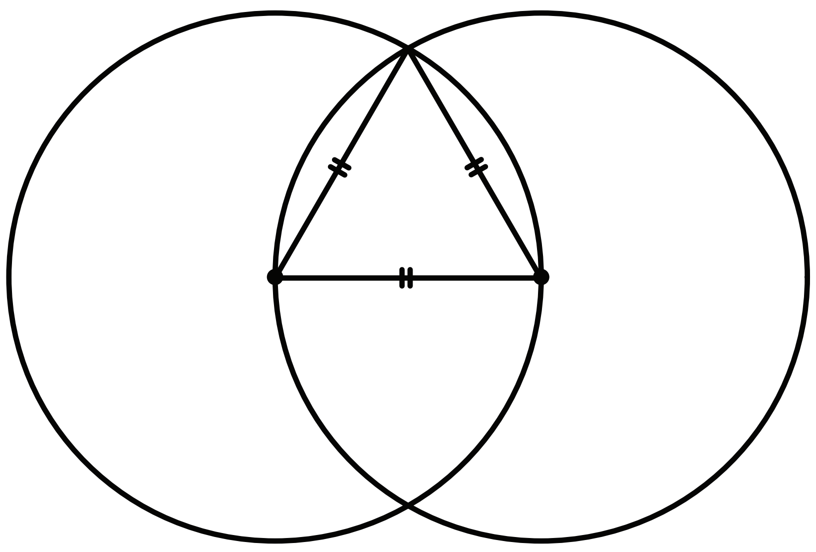
※ 도형의 기본

1. 원 : 중심으로부터 거리가 같은 점의 모임.

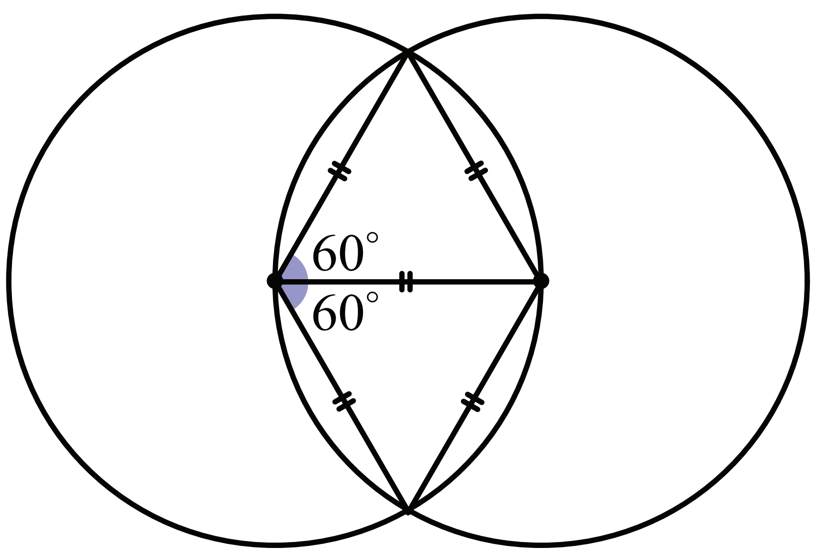
[Quiz]



중심이 각각 O_1, O_2인 두 원에 대해 $x = ?$



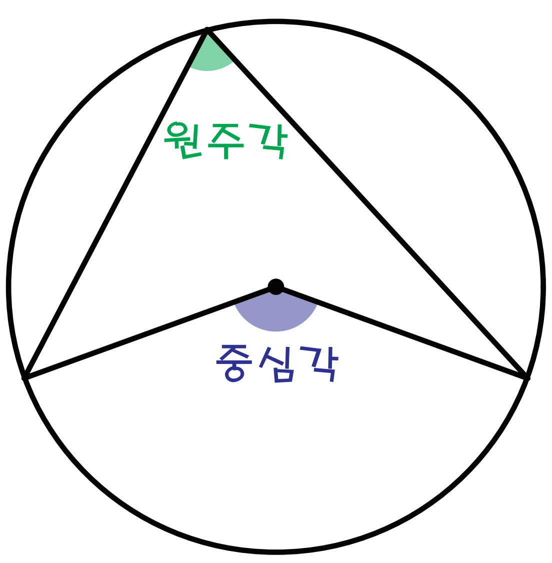
각 중심으로부터 여러 보조선을 그으면



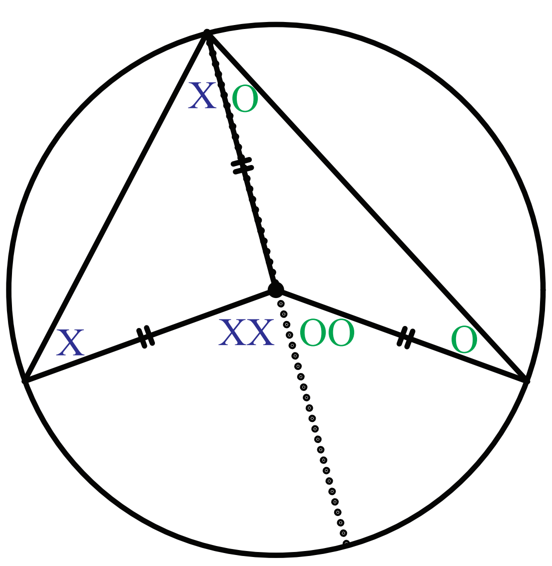
정삼각형이 형성됨을 알 수 있다.

$\therefore\ x = 120^\circ$

[Quiz]

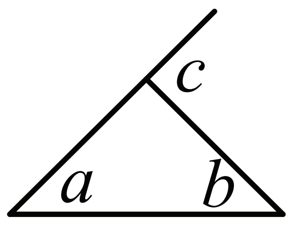


호의 중심각이 원주각의 두 배임을 보이시오.



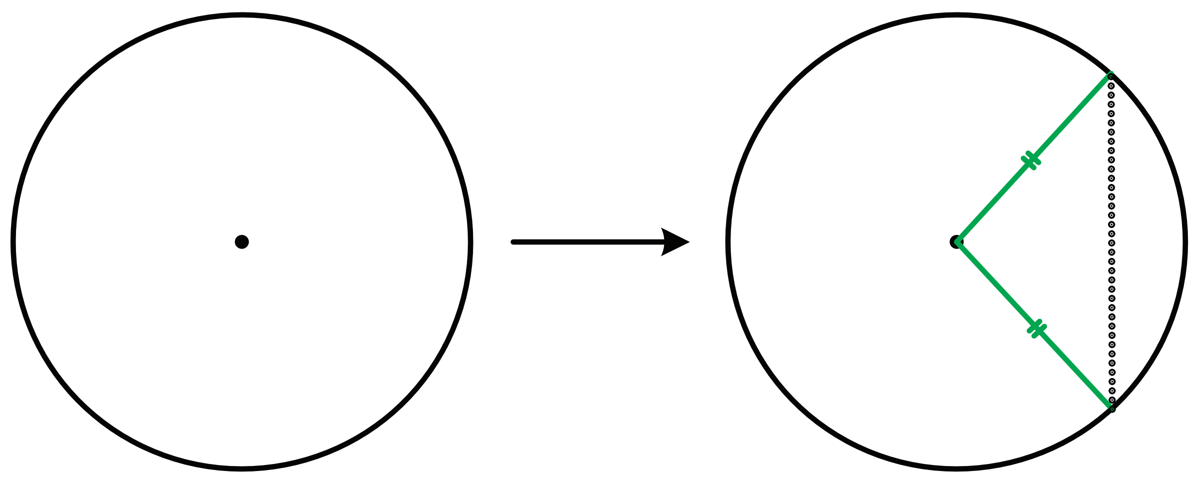
원의 중심으로부터 보조선을 그어 이등변 삼각형을 만들어보면

그림을 통해 중심각 $(OO+XX)$이 원주각 $(O+X)$의 두 배임을 알 수 있다.

( $a+b=c$됨도 알아두세요.)

결국, 원의 중심으로부터 모든 거리가 같으므로

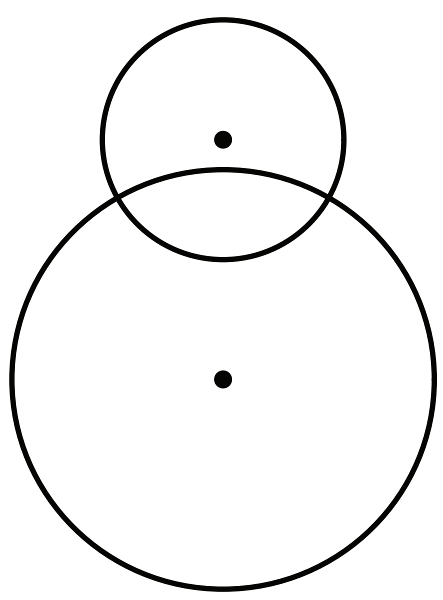
이등변삼각형이 원을 통해 자주 발생한다는 것을 알아야 한다.

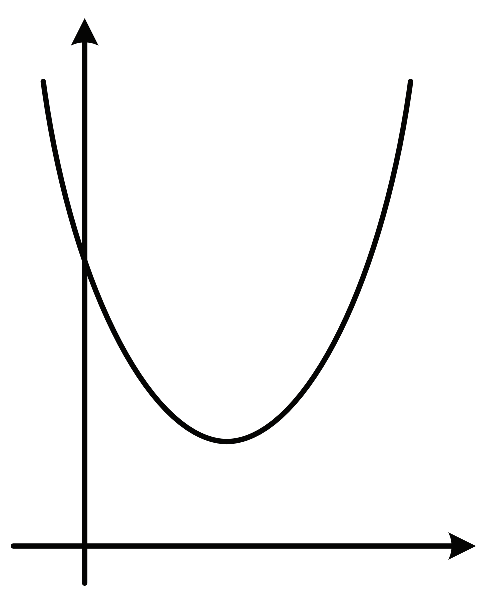


2. 대칭성

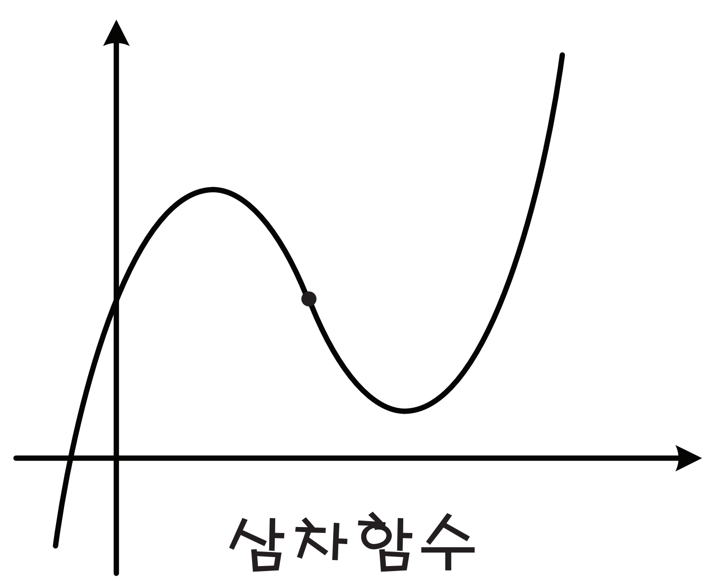
원, 정사각형, 정삼각형, 정사면체, 정육면체, 이차함수, 이등변 삼각형, 수열... 등 많은 도형들은 대칭성을 가지고 있다.

[Quiz] 다음 도형들의 대칭축, 대칭점을 생각해보자.

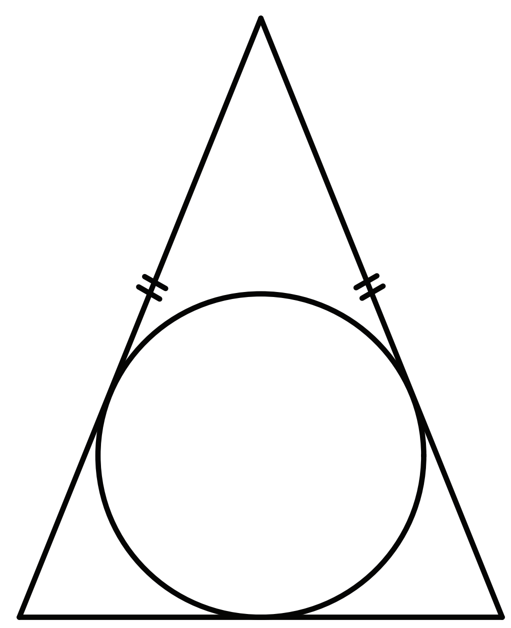


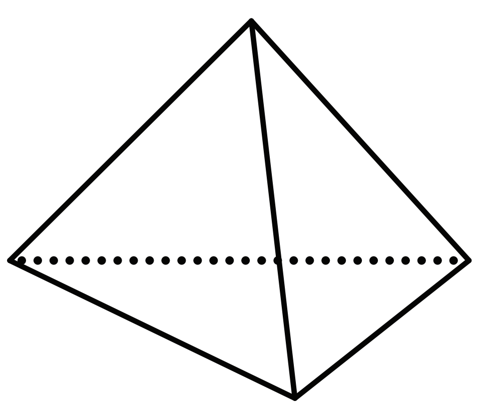


이차함수

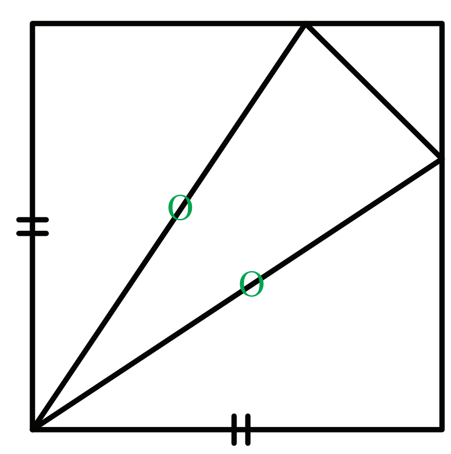


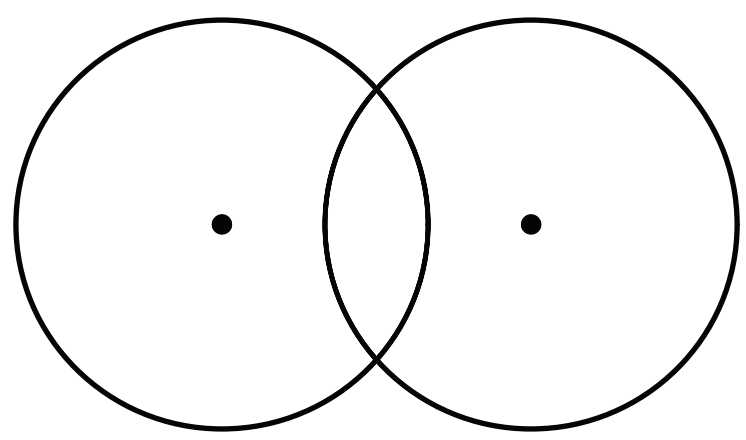
삼차함수





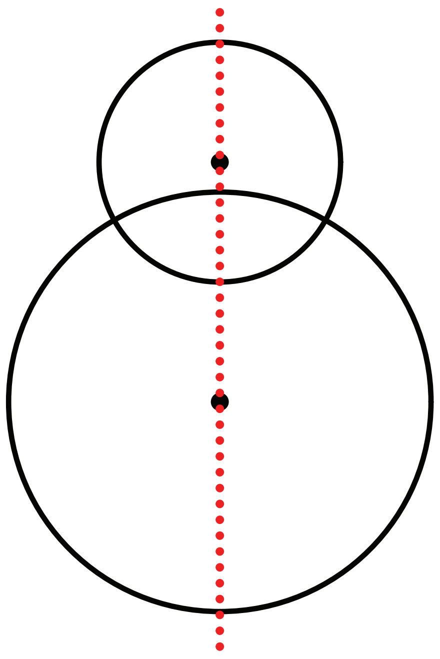
정사면체

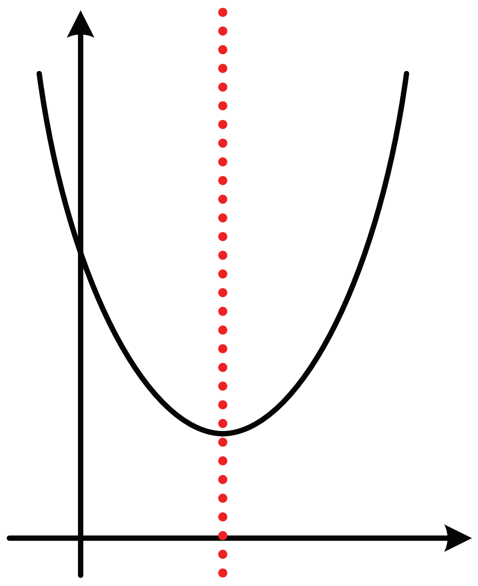




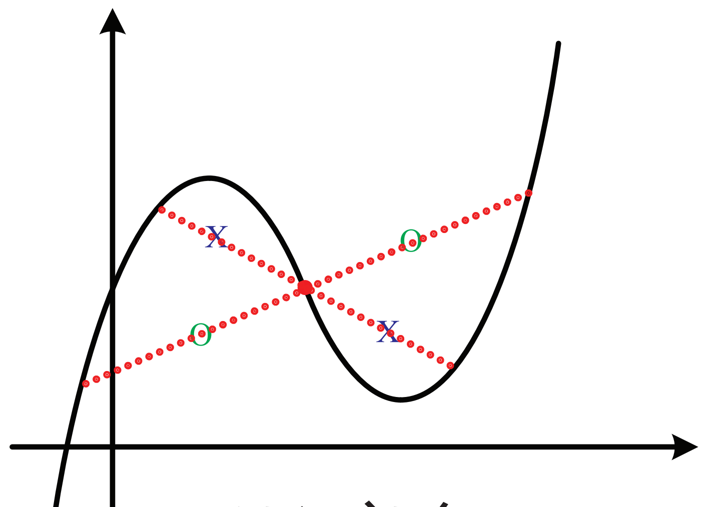
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

빨간점선으로 대칭성을 확인하자.

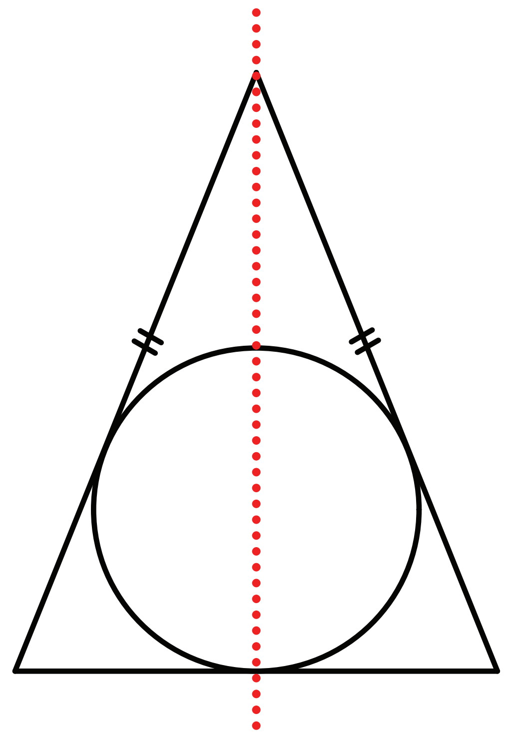


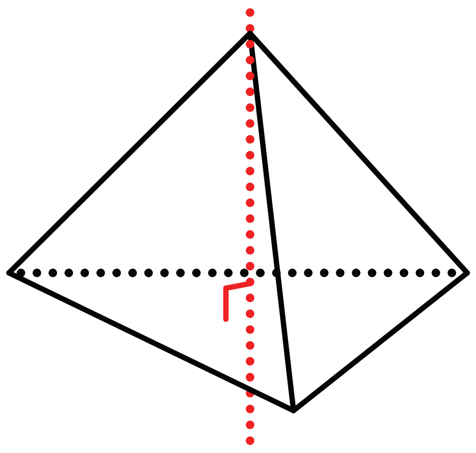


이차함수

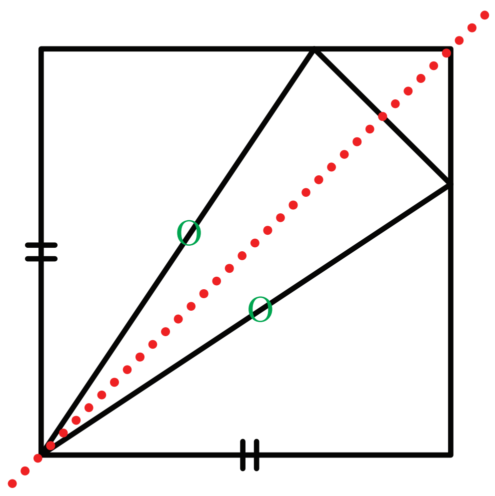


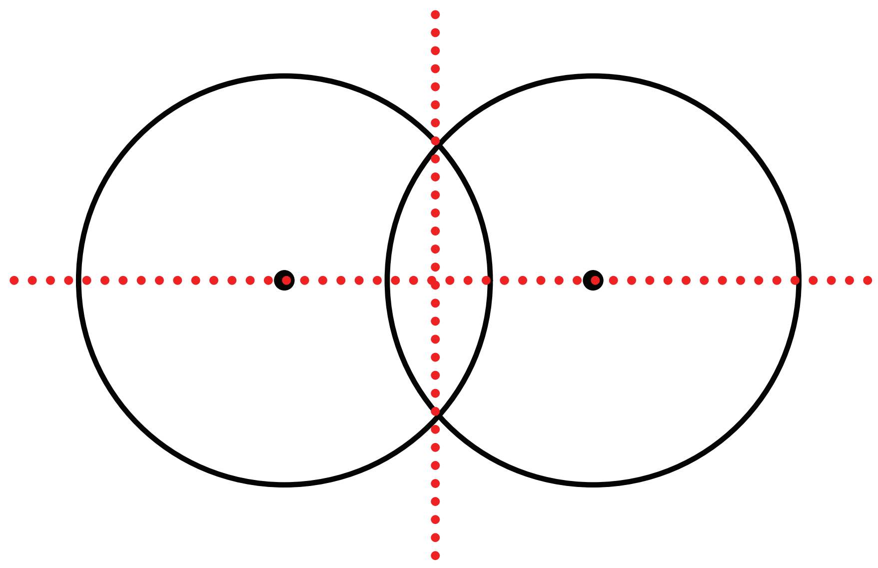
삼차함수





정사면체

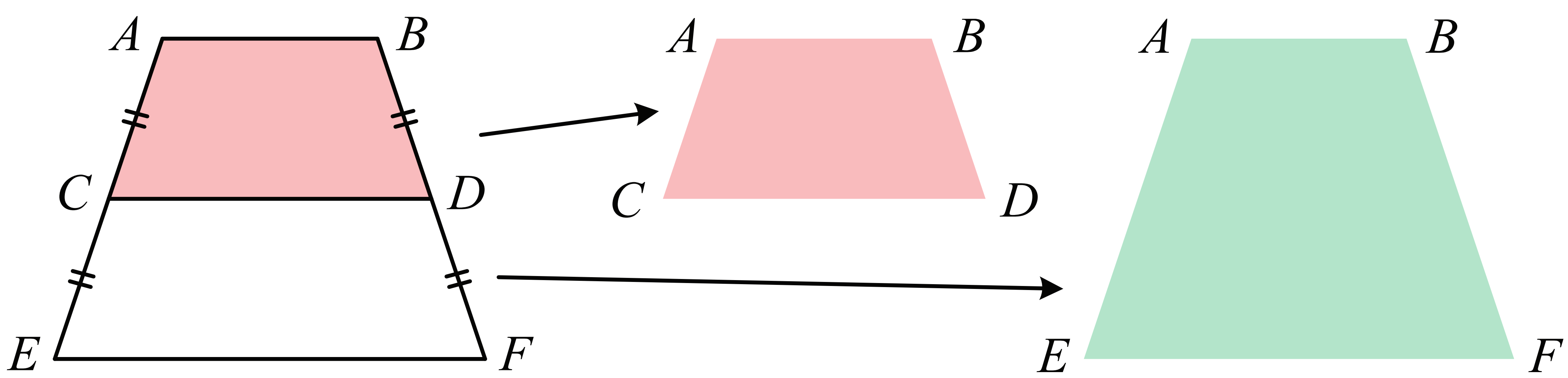




$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

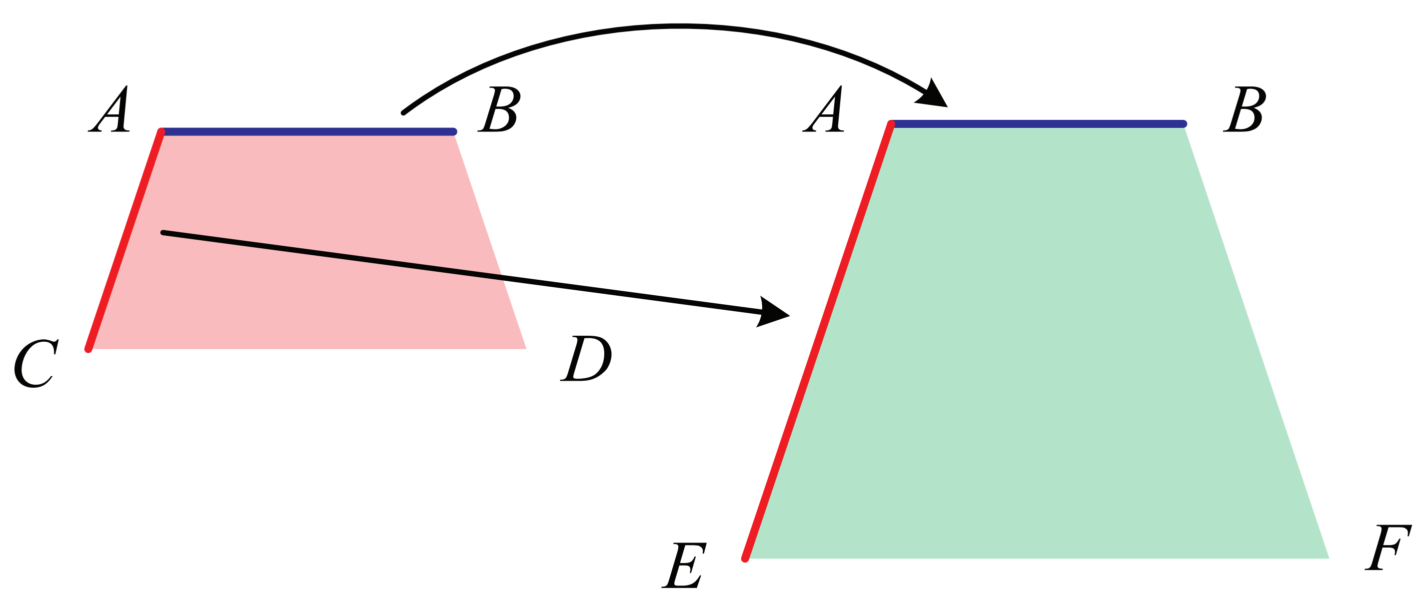
3. 닮음

[Quiz] 다음 두 등변사다리꼴은 닮음일까?



두 사다리꼴은 닮아 보이지만 수학적 의미로써 닮음은 아니다.

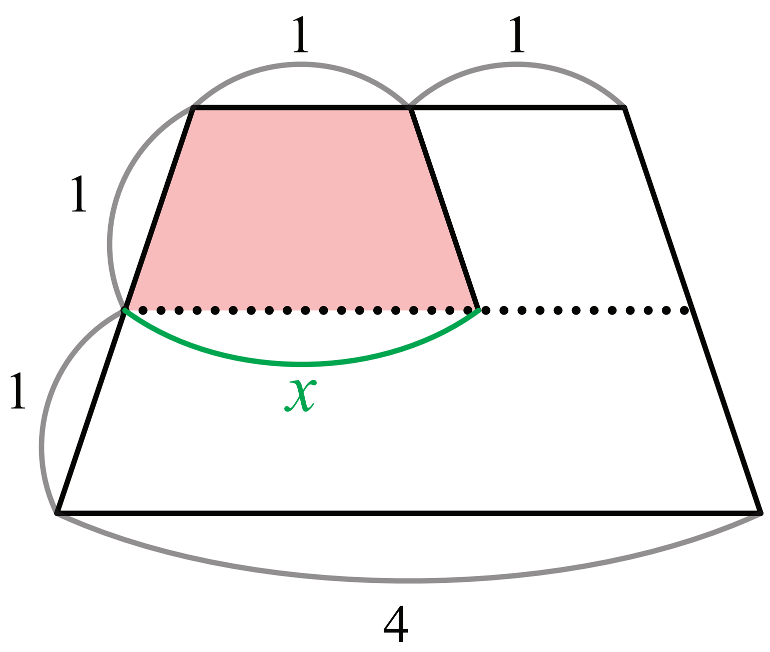
수학에서 말하는 닮음은 어떤 한 도형을 축소 또는 확대해서 다른 한 도형과 일치하면 두 도형을 닮음이라고 한다.



(축소 또는 확대는 모든 변의 길이가 같은 비율로 줄거나 늘어남을 의미한다.)

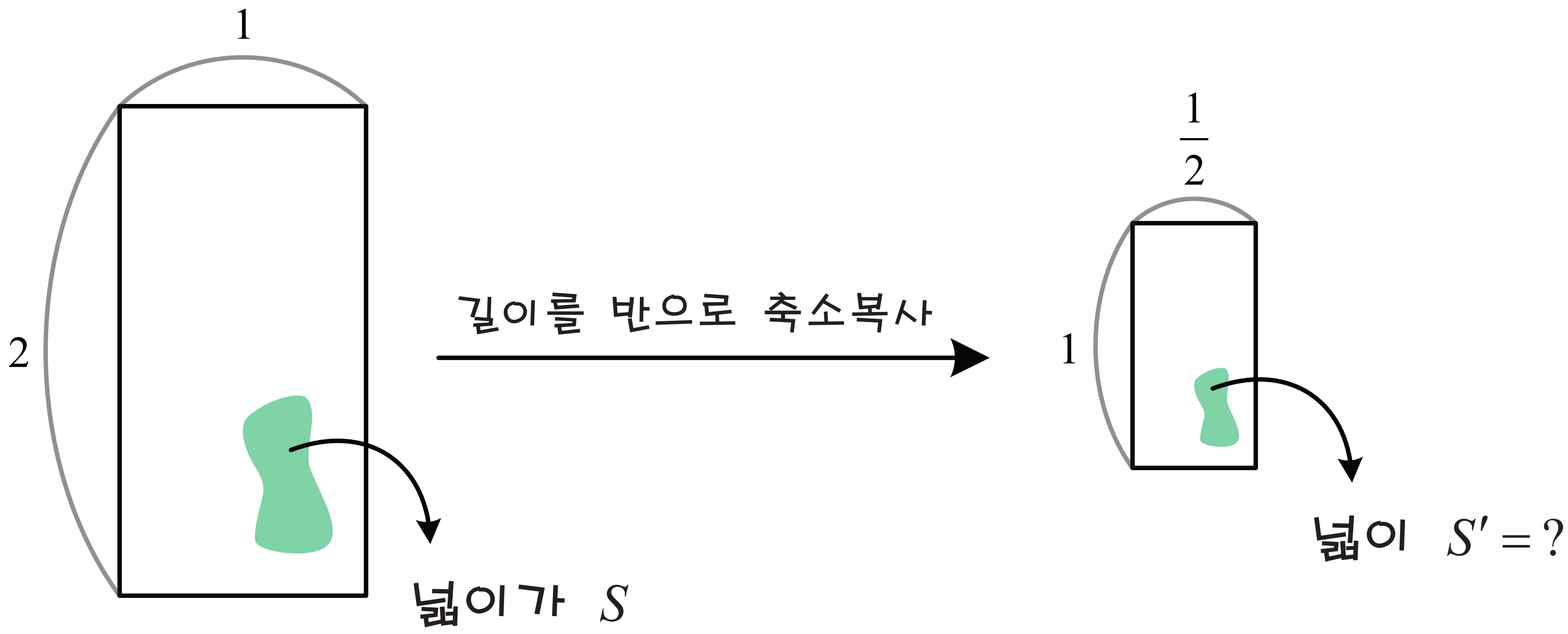
위 두 도형은 $\overline{AC} \to \overline{AE}$로 두 배 커지지만 $\overline{AB} \to \overline{AB}$는 그대로이므로 닮음이 아니다.

[Quiz] 다음 큰 사다리꼴과 작은 사다리꼴은 닮음이다. x는 몇일까?



각변이 2배 비율을 가지고 있으므로 $x=2$

[Quiz]

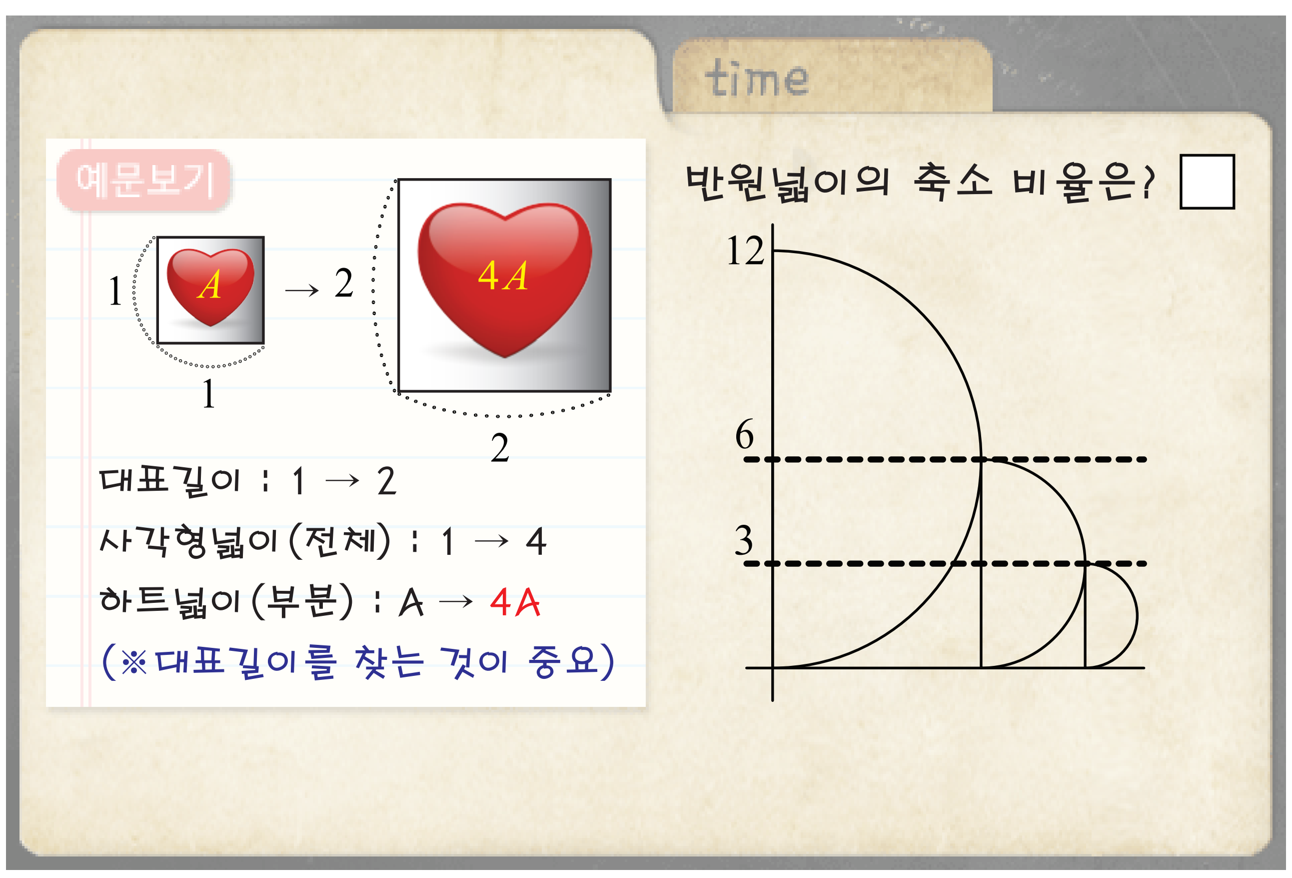


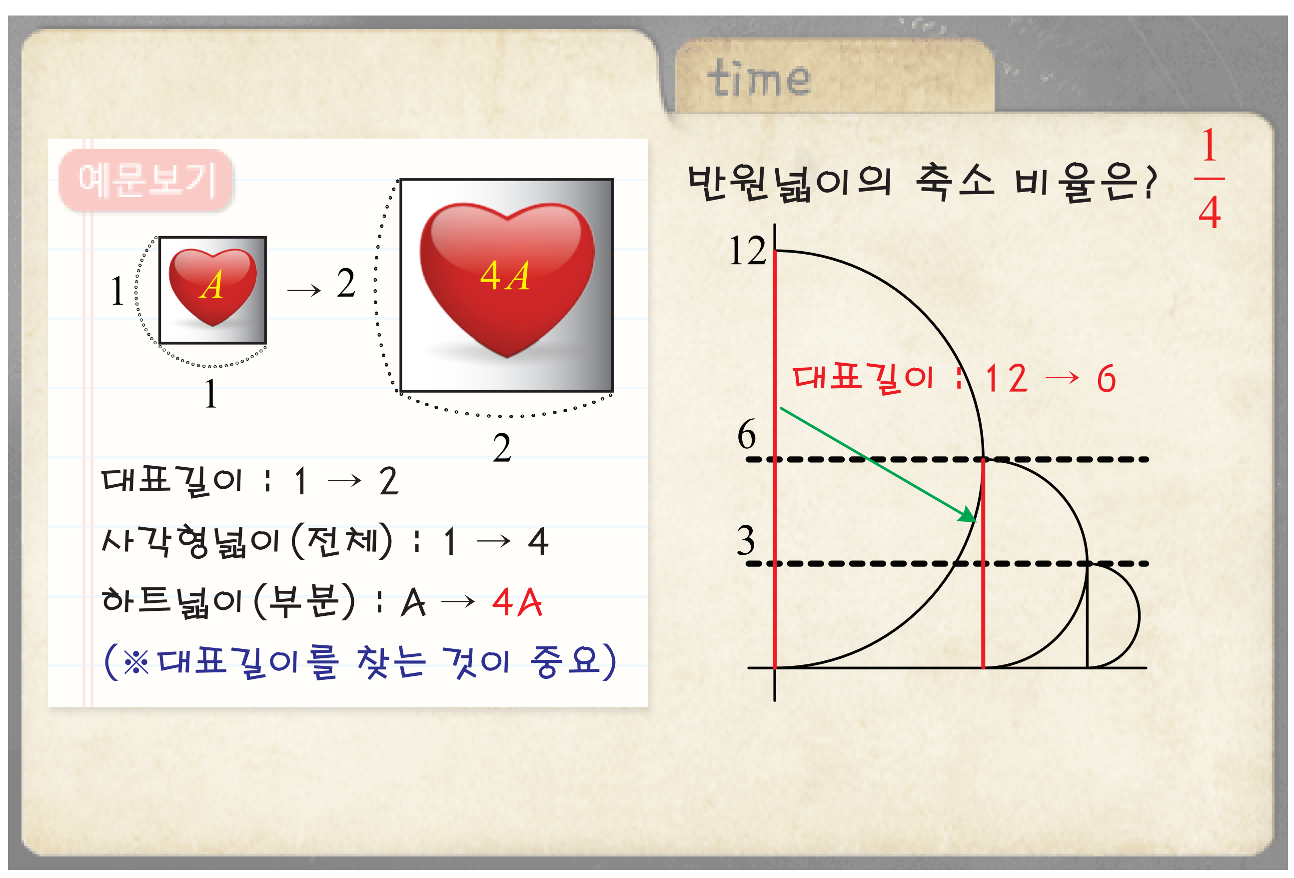
배경지가 일정한 비율로 줄면 배경지 안의 모든 도형(S)도 일정한 비율로 준다.

(2 × 1 직사각형)

넓이는 (길이)^{2}에 비례하므로 $S' = \frac{1}{4}S$

[Quiz] 수능에 꼭 나오는 단위개념 (닮음비의 기준찾기)





10년 수능 15번

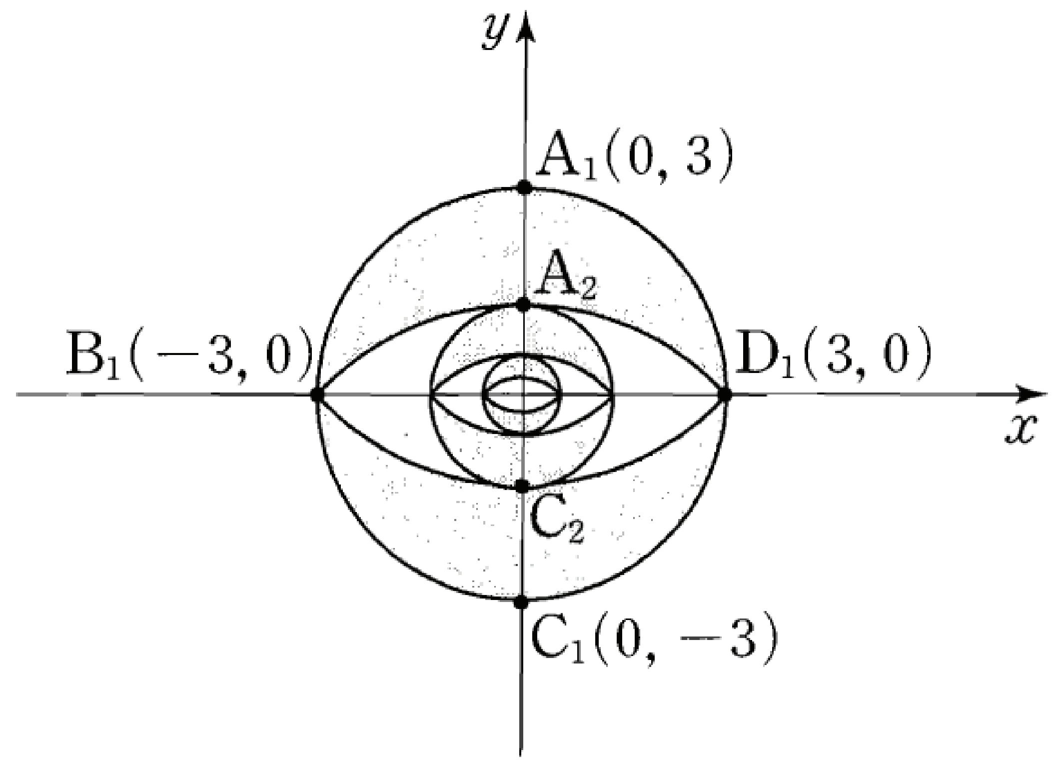
그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $\mathrm{A_1}(0,\ 3)$, $\mathrm{B_1}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C_1}(0,\ -3)$, $\mathrm{D_1}(3,\ 0)$이라 하자. 두 점 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 모두 지나고 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{A_2}$라 하자.

호 $\mathrm{B_1A_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_1A_2D_1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $\mathrm{B_1C_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_1C_2D_1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.

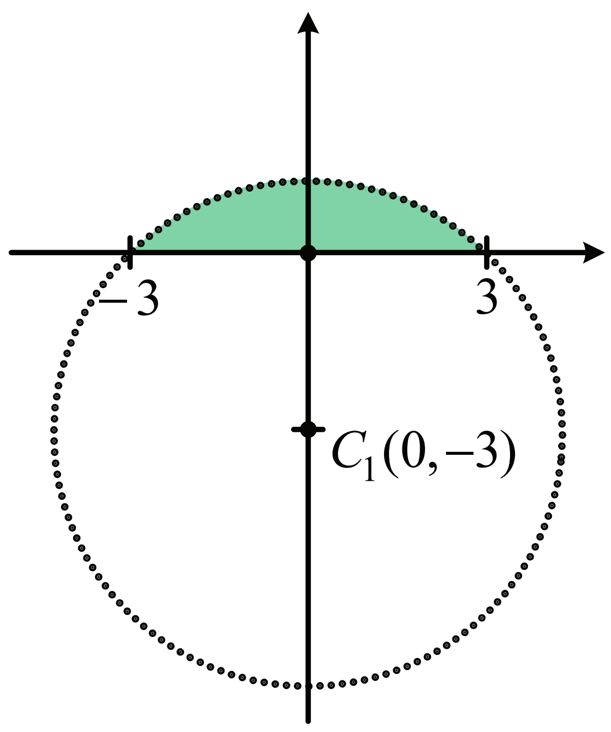
선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자. 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{D_2}$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{C_2}$를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{A_3}$이라 하자.

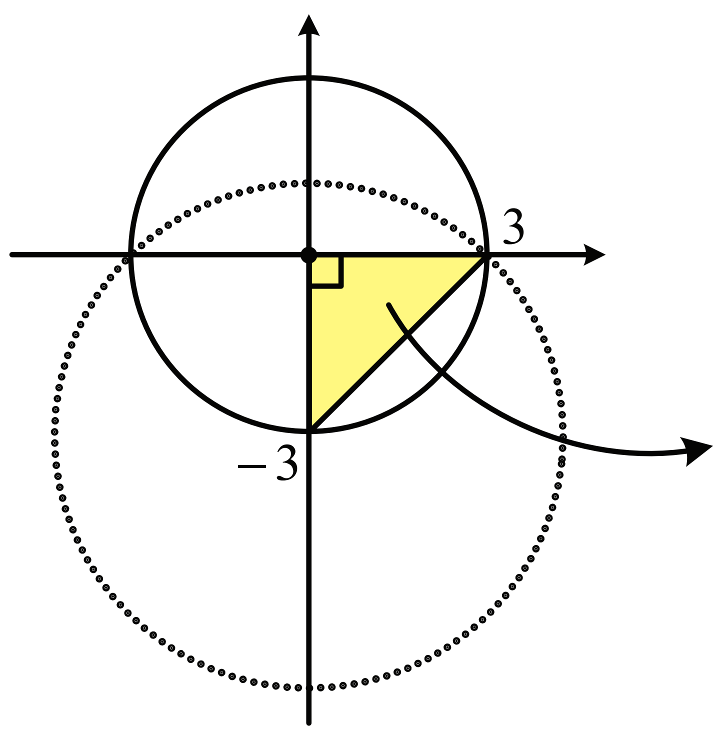
호 $\mathrm{B_2A_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_2A_3D_2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $\mathrm{B_2C_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_2C_3D_2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.

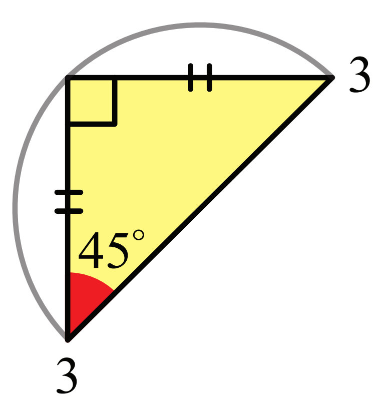
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은? (4점)



(Step 1)  부분의 넓이는 어떻게 될까?

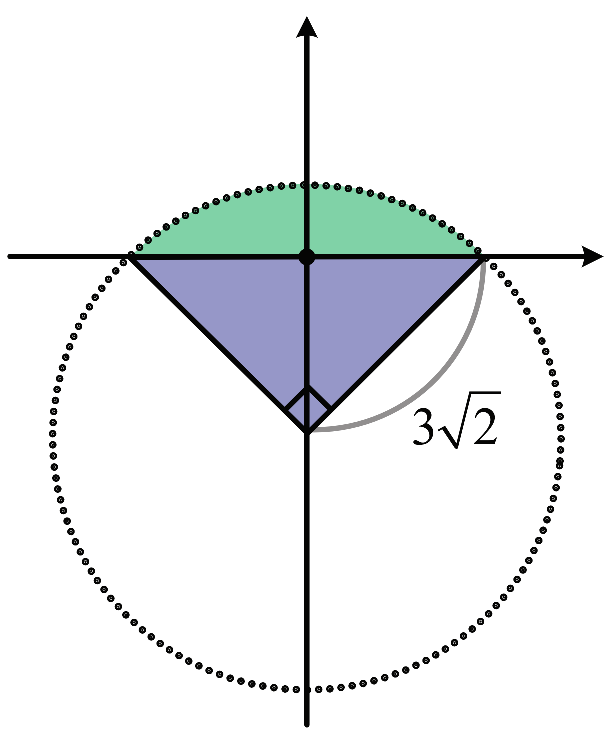


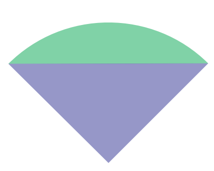
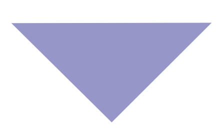




이등변삼각형

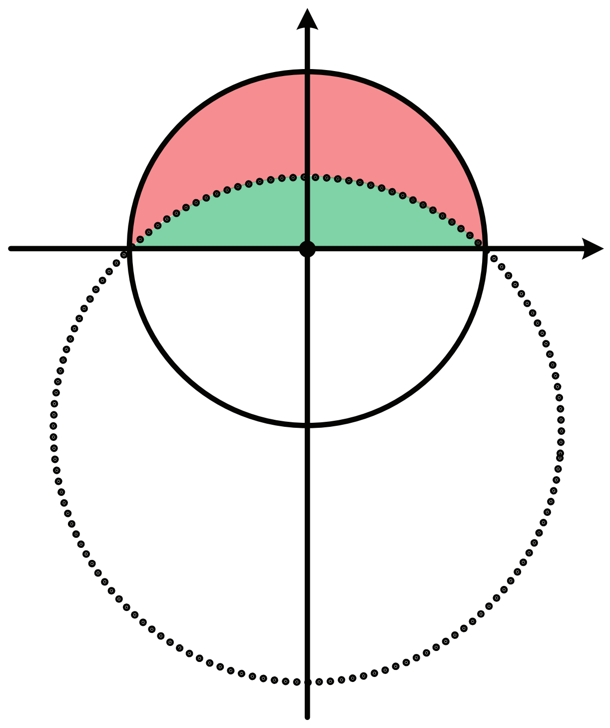
이 때 원의 중심으로부터 보조선을 그어 보면 이등변삼각형이 보인다.

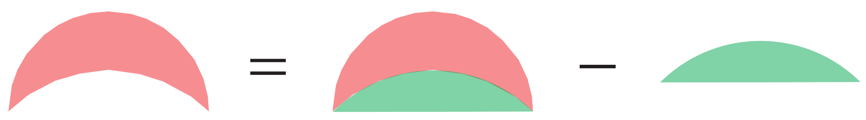


 =  − 

$$=\left(\frac{1}{4}\times\left(3\sqrt{2}\right)^2\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\times6\times3\right)$$

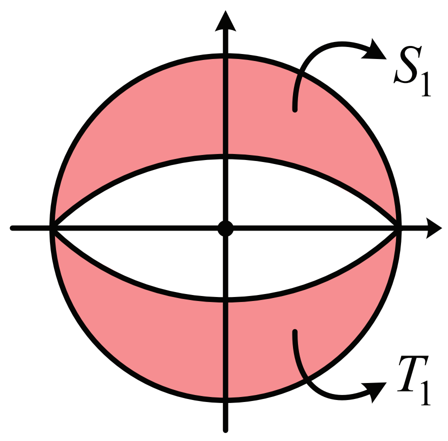
$$=\frac{9}{2}\pi-9$$



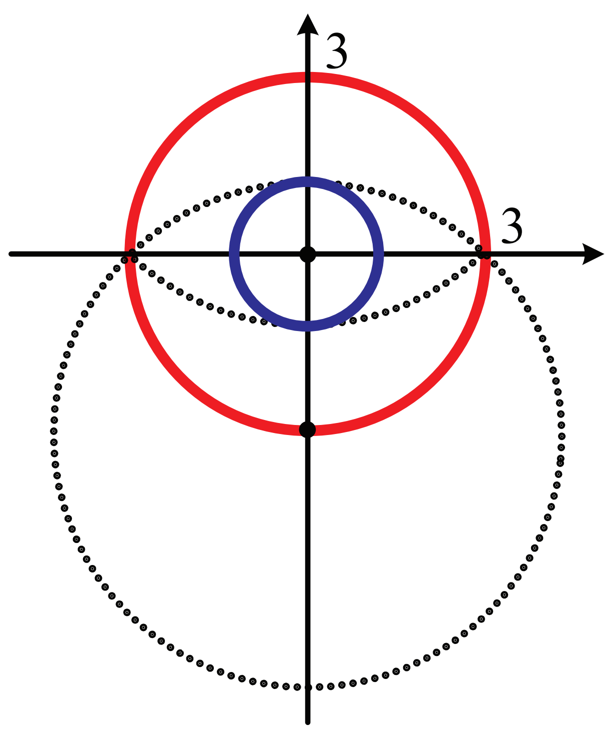


$$=\left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\pi\right)-\left(\frac{9}{2}\pi-9\right)$$
$$=9$$

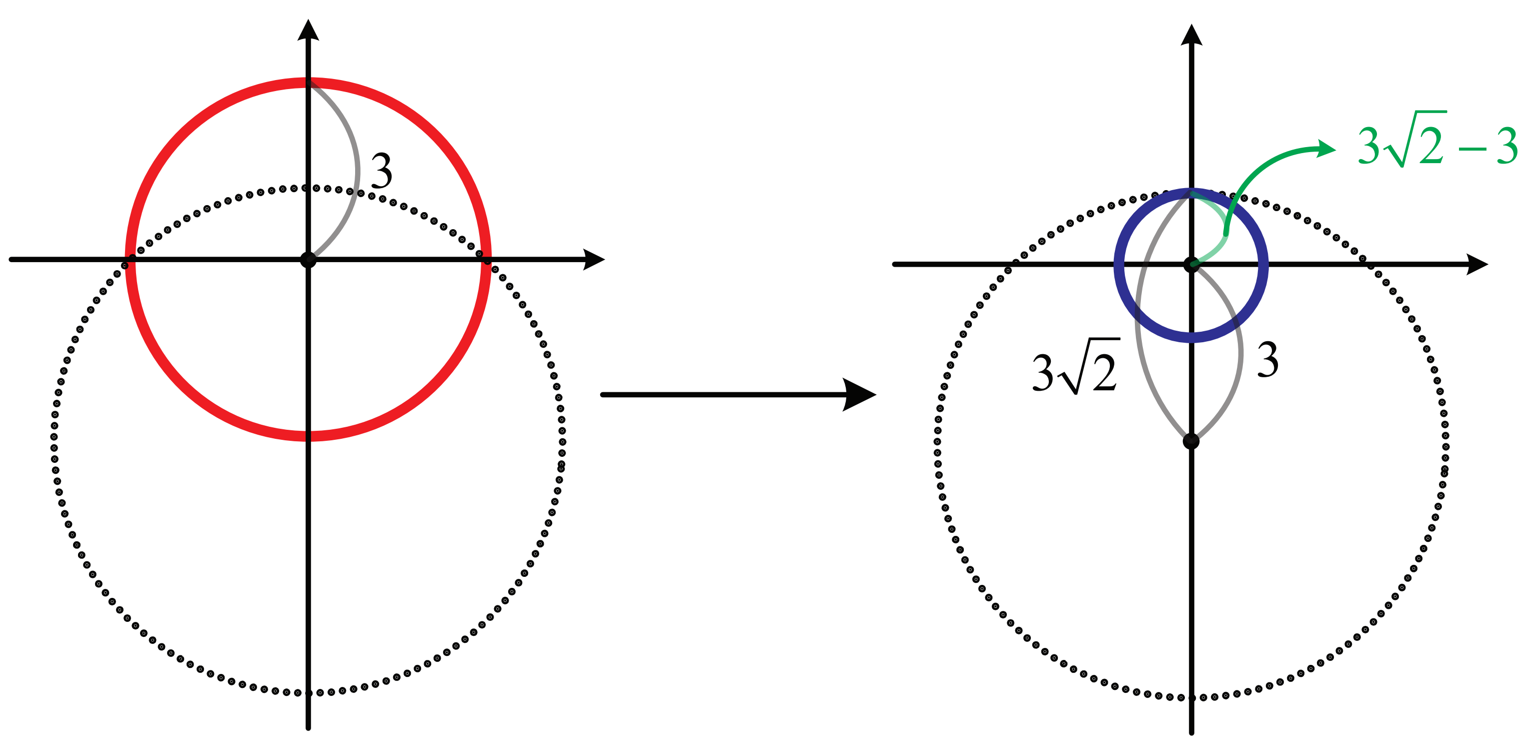
결국 초항 (S_1+T_1)은 18이다.



(Step2)



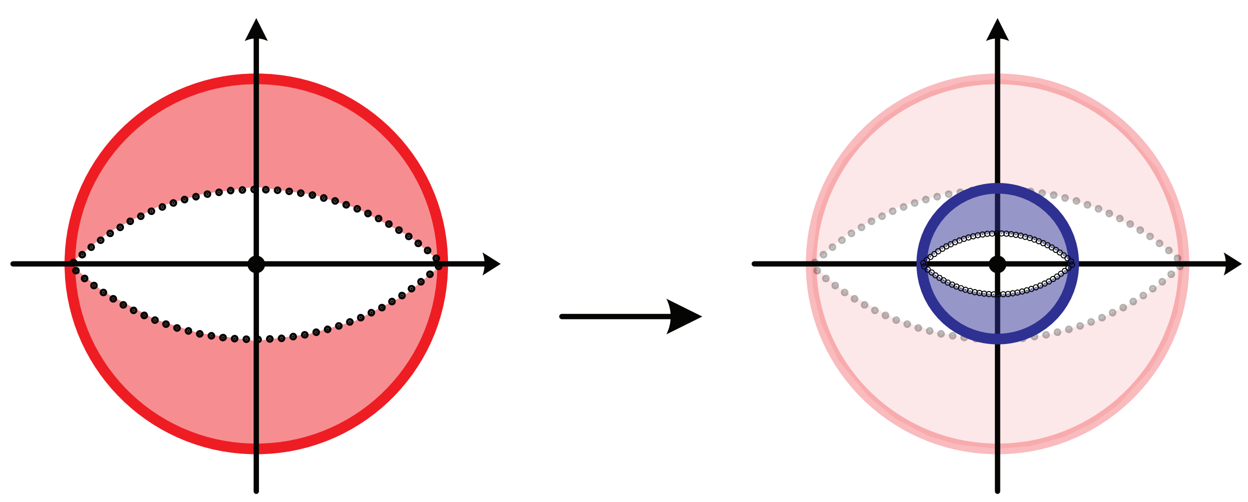
원 에서 원 으로 축소되는 비율은 얼마인가?



원의 반지름만 비교하면 $3:3\sqrt{2}-3$ 비율로 줄어든다.

$(1:\sqrt{2}-1)$

넓이의 축소비율은 $1:(\sqrt{2}-1)^2$ 이다.



의 축소비율은

배경지의 축소비율과 같다.

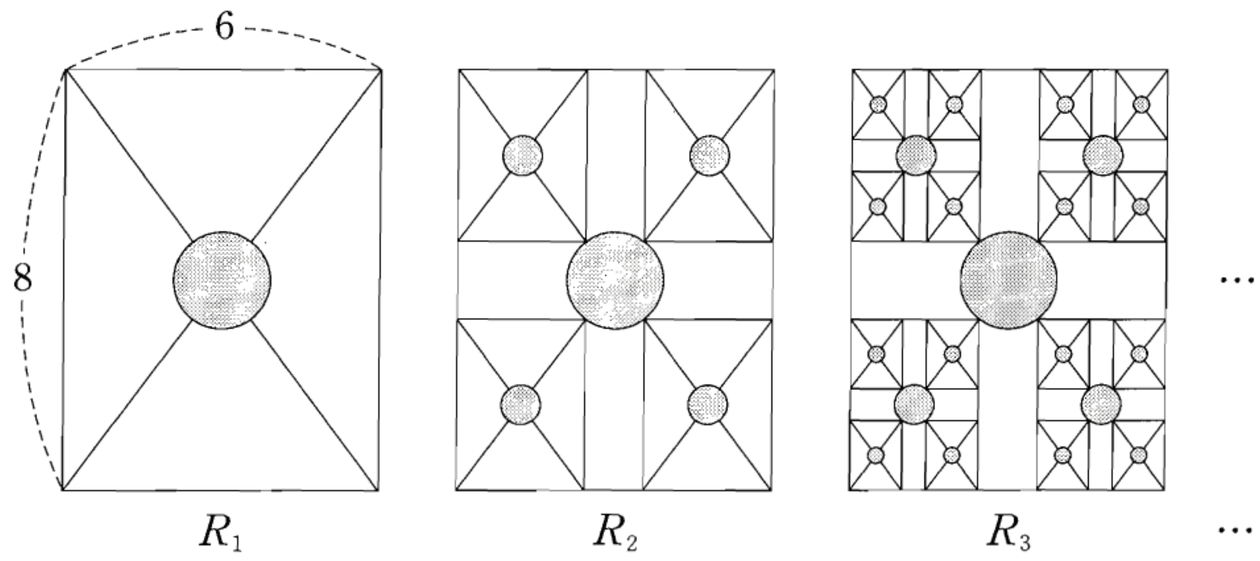
그러므로, (S_2+T_2)를 구할 필요 없이 등비는 $(\sqrt{2}-1)^2$ 임을 알 수 있다.

(Step3) $\sum_{n=0}^{\infty}(S_n+T_n)=\dfrac{18}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=9(\sqrt{2}+1)$

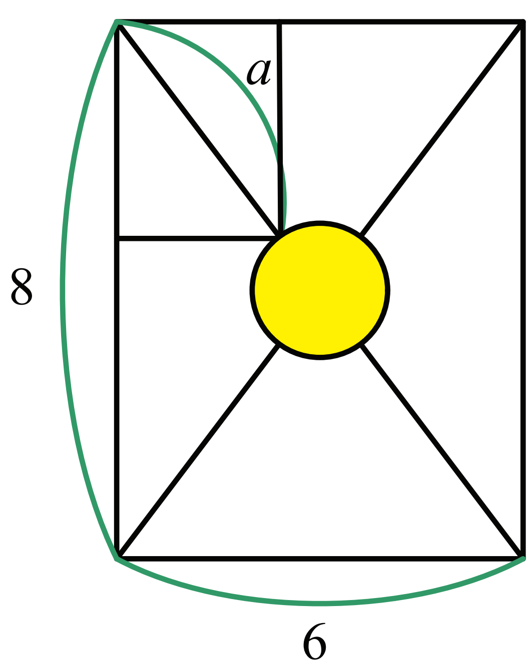
도형의 축소비율(등비)을 배경지의 축소비율을 통해 구하는 문제였다.
다음 문제를 풀어보면 배경지의 축소비율을 통해 도형의 축소비율(등비)을 구하는게
얼마나 편한지 알 수 있다.

08년 수능 17번

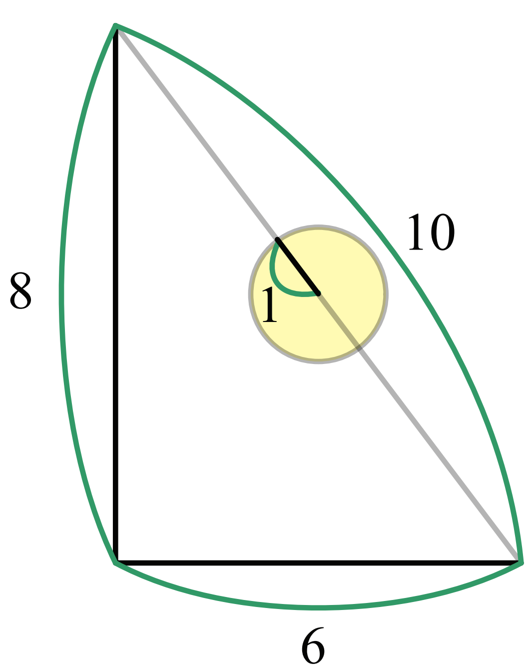
아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? (단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.) (4점)



(Step1)

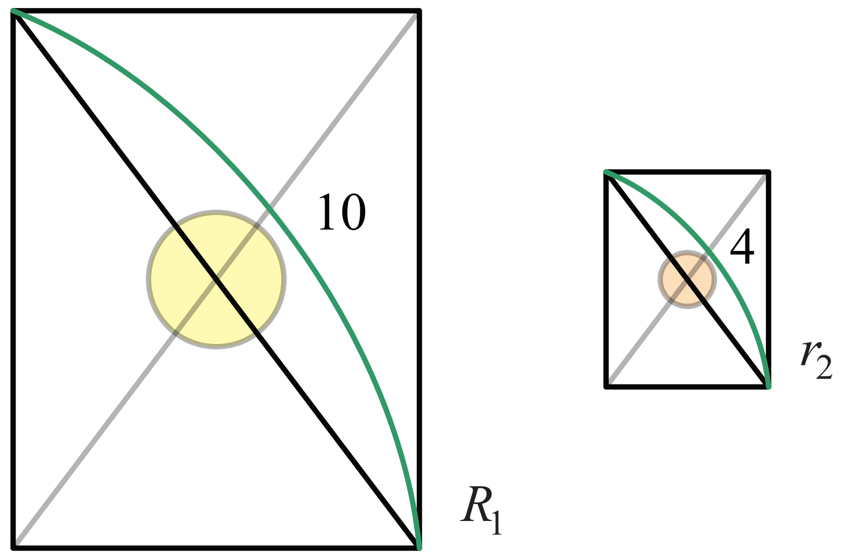


a의 값은 어떻게 될까?



원이 정 가운데 있으므로, 대칭성을 이용할 수 있고,
3:4:5 라는 삼각비로 쉽게 $a=4$ 라는 걸 알 수 있다.

(Step2) 직사각형 R_1과 r_2는 닮음비가 몇일까?



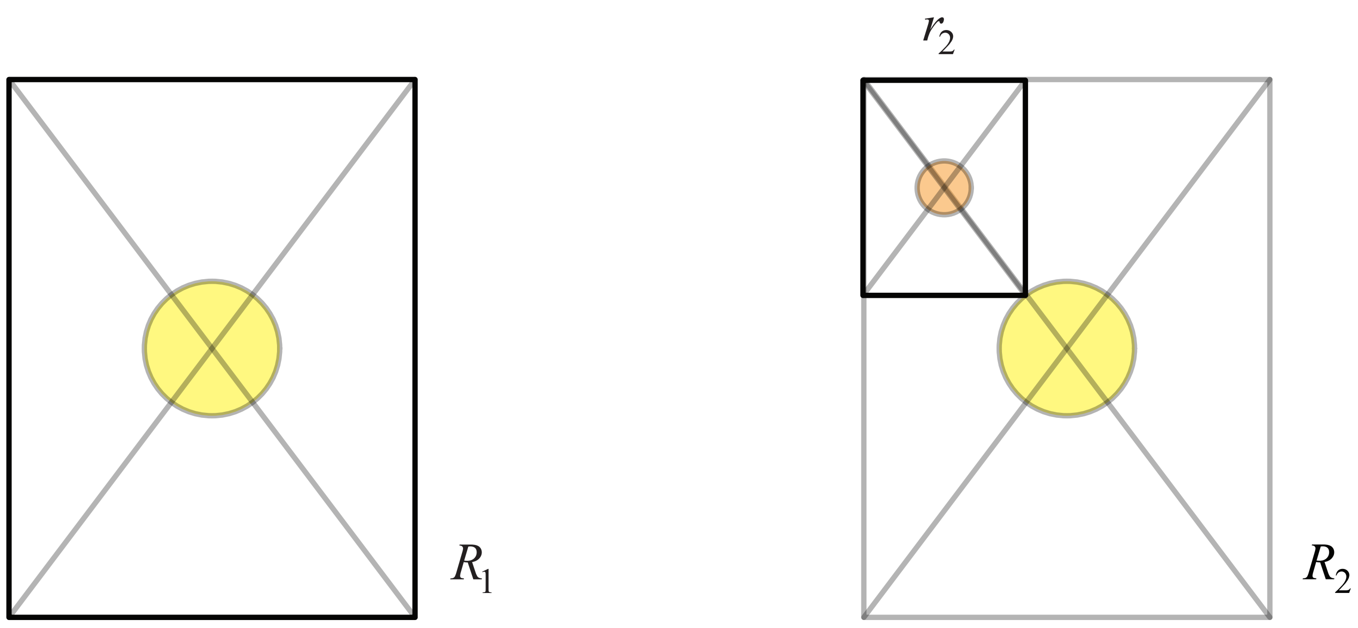
그렇다. 10:4 이다. 닮음비를 구할 때는

두 도형의 대응변 중 어떤 것과 비교해도 상관 없다.

(여기서는 각 사각형의 대각선을 비교했다.)

결국 R_1안에 있는 원과 r_2안에 있는 원의 닮음비도 10:4 라는 걸 알 수 있다.

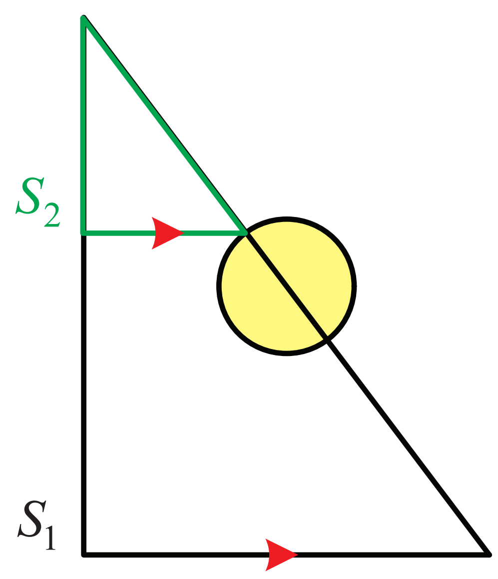
(Step3) 근데, 직사각형 R_1과 r_2가 닮았다는 보장은 어디 있는가?



'원래 이런 문제는 무조건 닮은 도형이야'나 '딱 보면 그래'는 좀 위험하다.

그럼 증명을 해보자.

다음 삼각형의 닮음을 보이면 직사각형 R_1과 r_2의 닮음을 알 수 있다.

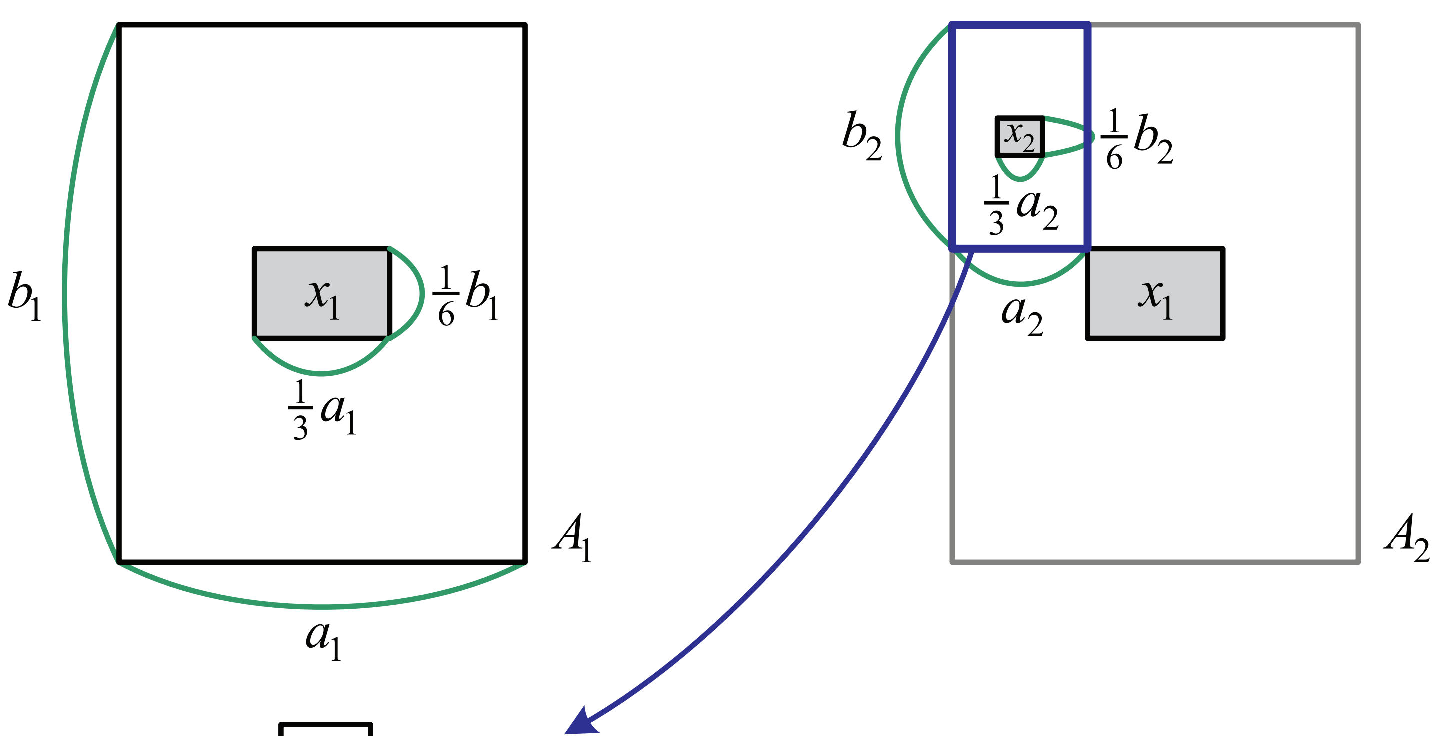


삼각형 S_1, S_2는 세 각이 모두 같으므로 닮음이다.

그러므로, 직사각형 R_1과 r_2도 닮음!

만약, 문제가 다음과 같이 직사각형 넓이 x_1, x_2라면 어떻게 될까?

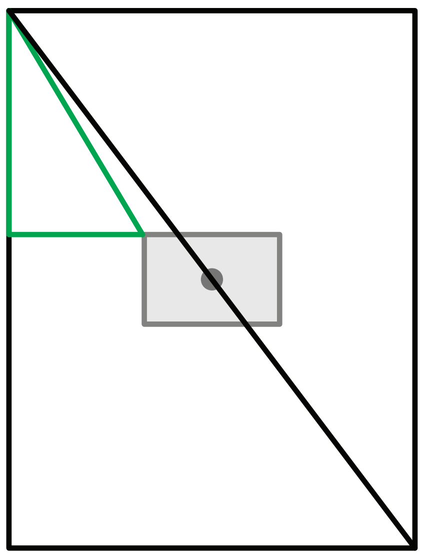
(직사각형 $x_1, x_2 \cdots$는 각 직사각형의 중앙에 있다.)

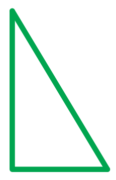
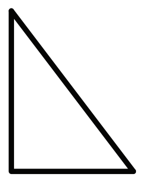


직사각형 $\square$과 $\square$는 닮음일까?

당연히 아니다. 하지만, x_1, x_2의 닮음비는 구할 수 있다.

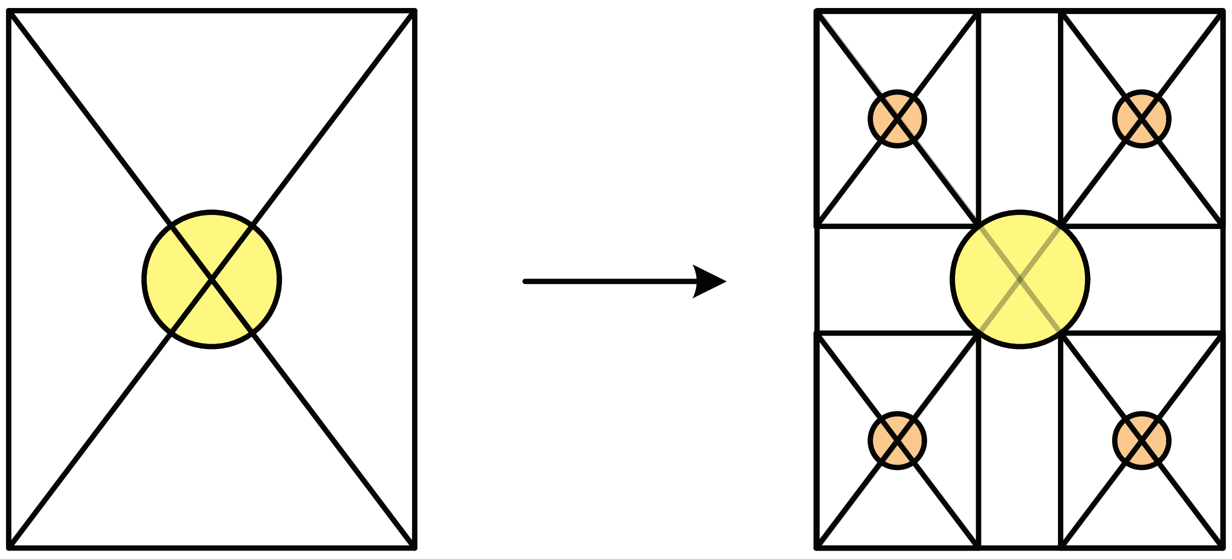
(다음 문제에서 다루겠다. ^^)

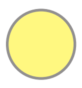
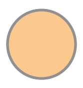


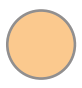
두 삼각형 ,  은 서로 대응각이 다르므로 닮음이 아니다.

(각 변의 축소비율이 다르다.)

(Step4)



원 에서 원 으로 넓이의 축소비율은 $10^2 : 4^2$이고,

원 이 4개 있으므로 넓이의 축소비율은 $10^2 : 4 \times 4^2$이다.

이는 $1 : 4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \to 1 : \frac{16}{25}$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}\pi$$

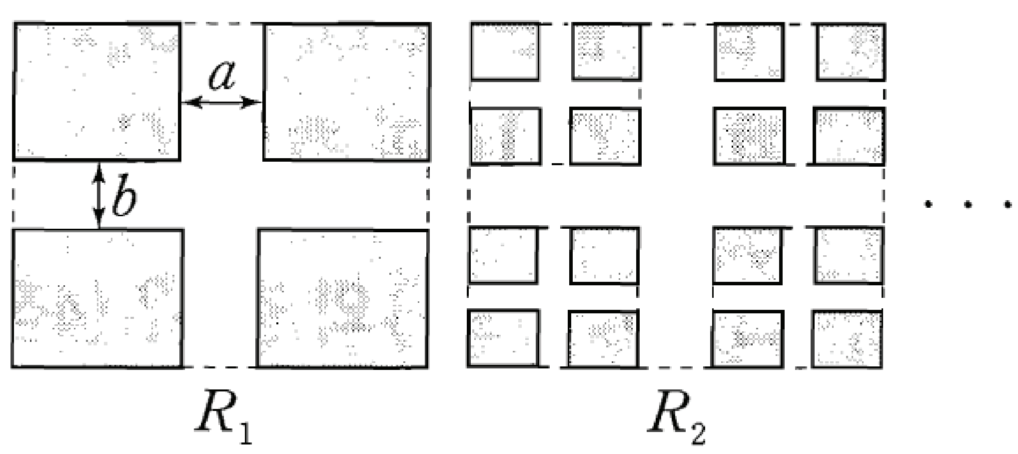
닮음을 확인하는게 얼마나 중요한지 다음 문제를 보자.

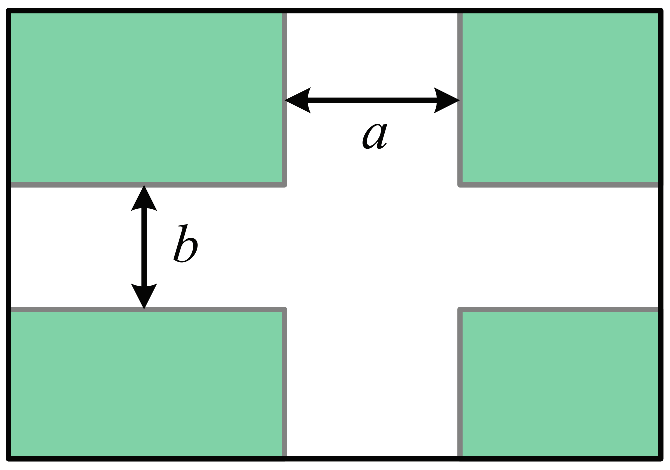
11년 6월 모의평가 10번

가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 $\boldsymbol{a}$가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 $\boldsymbol{b}$가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✣ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

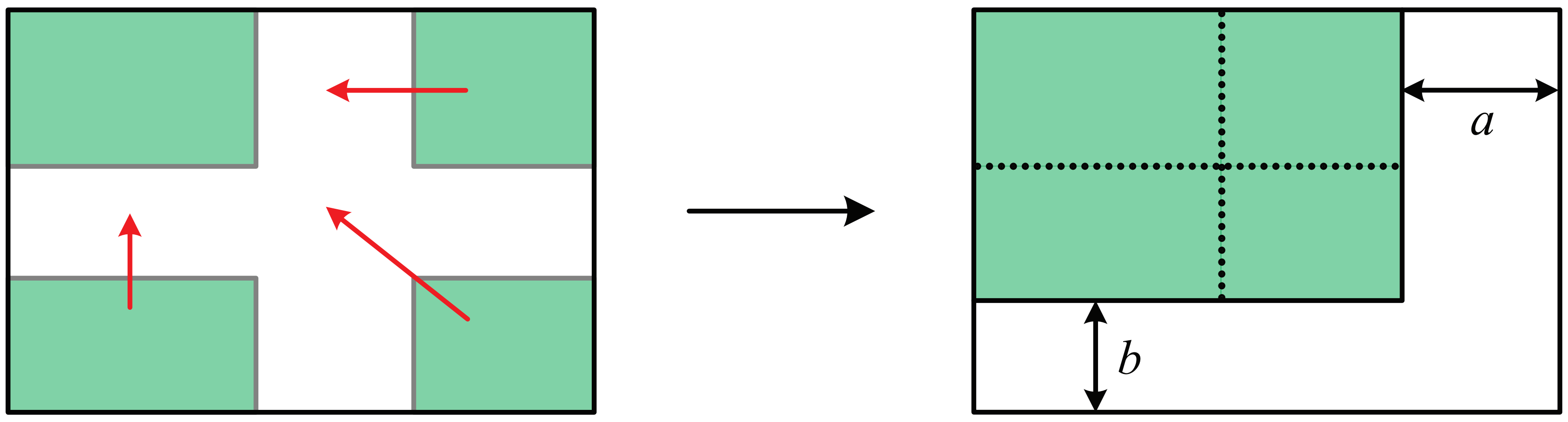
R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✣ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 R_n의 4^n개의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (4점)



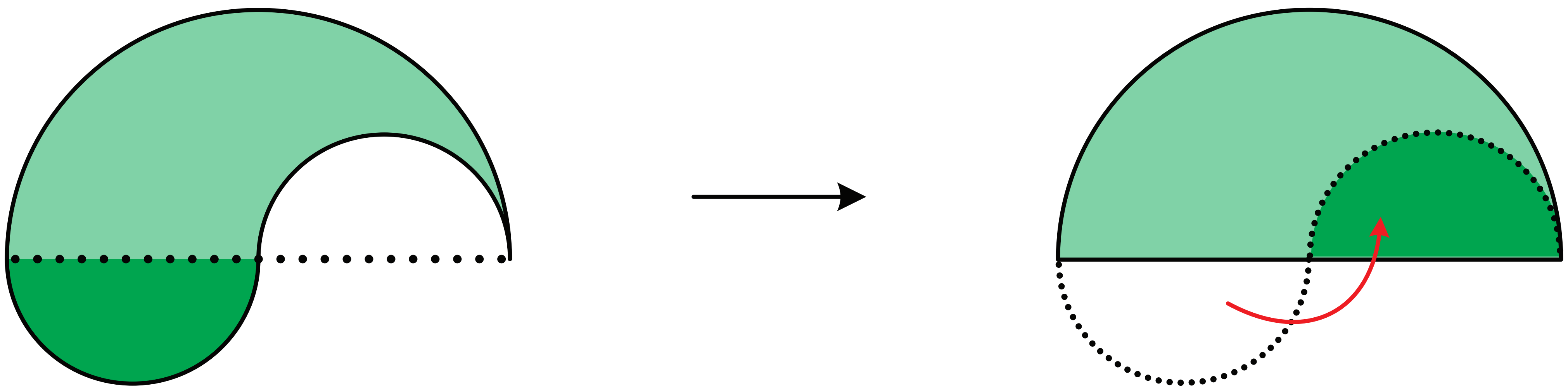
(Step1) 

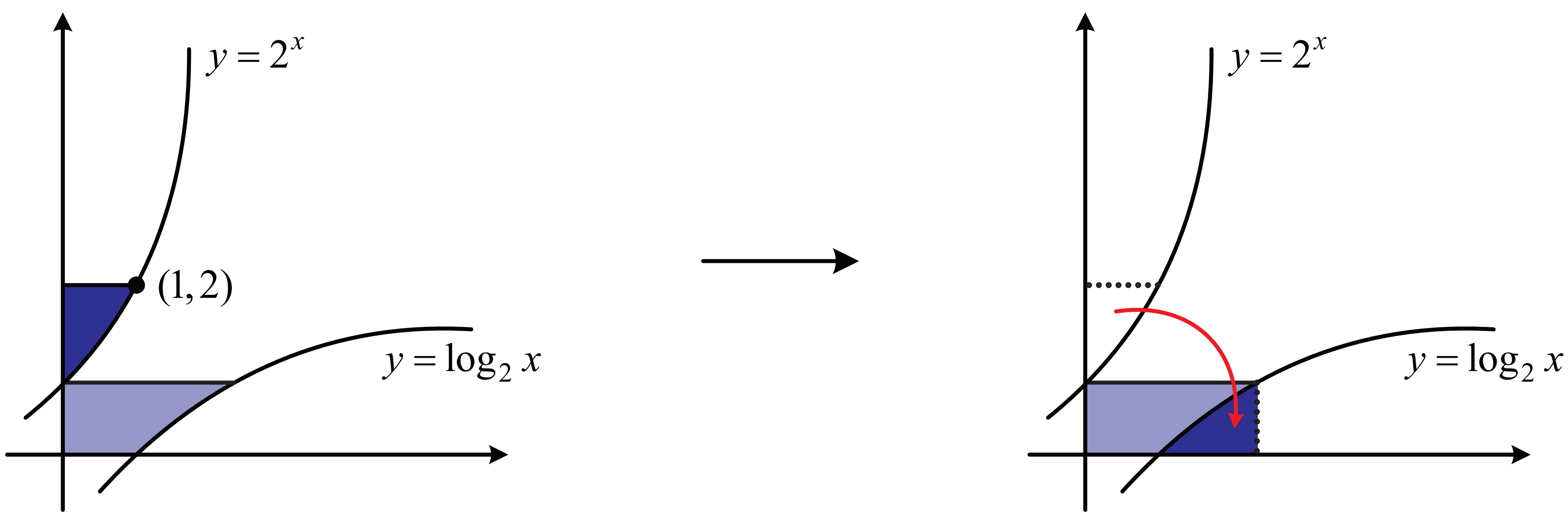
4개의 직사각형 R_1의 넓이의 합 S_1을 구해야 한다. R_1을 다음과 같이 변형하여 R_1의 넓이를 구하면 좀 더 쉬워진다.

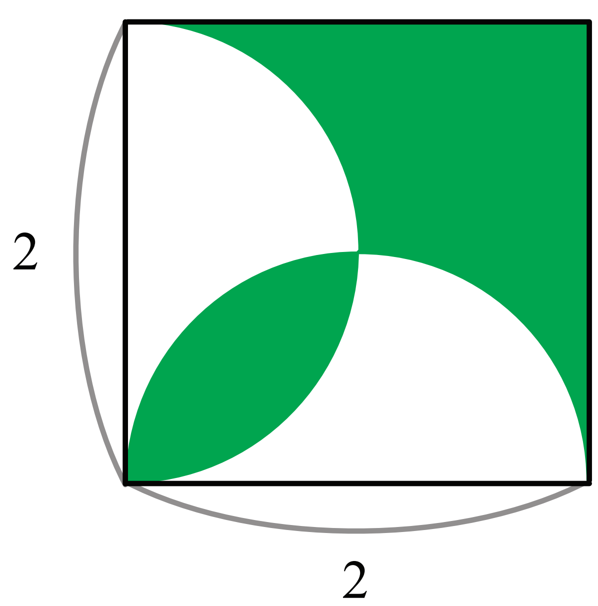


이러한 사고방식은 수학에서 자주 쓰인다.

(ex1)

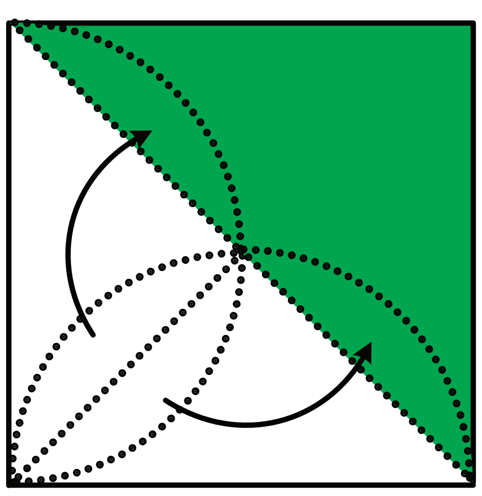




(ex2) 

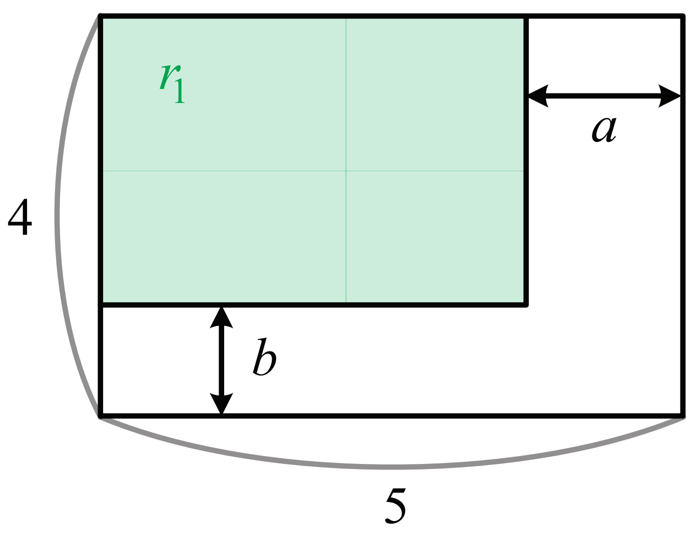
넓이를 구하시오.

(풀이)



$\therefore 2$

(Step2)



큰 직사각형 (4×5)과 r_1은 닮은 도형인가?

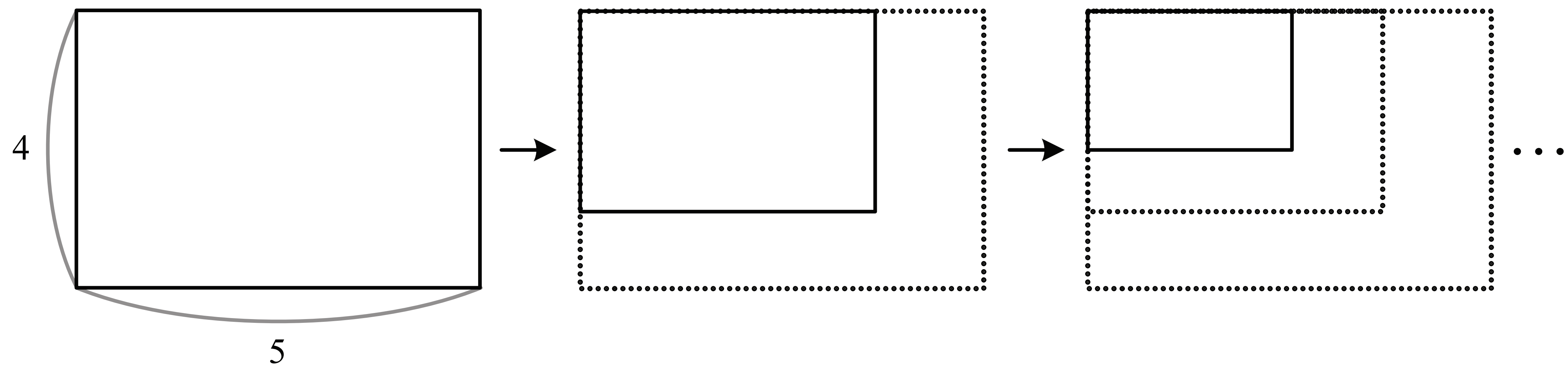
그렇지 않다. 각변의 축소비율이 다르므로

(가로는 $\frac{3}{4}$로, 세로는 $\frac{4}{5}$로 축소된다)

닮음은 아니다.

많은 학생들이 두 직사각형이 닮음이라 생각하여
가로의 축소비율, 또는 세로의 축소비율의 제곱을 등비로 착각하여 이 문제를 틀렸다.

(Step3)



직사각형 넓이의 축소비율은 어떻게 될까?

$$5\cdot4\rightarrow5\left(\frac{3}{4}\right)\cdot4\left(\frac{4}{5}\right)\rightarrow5\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot4\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdots$$

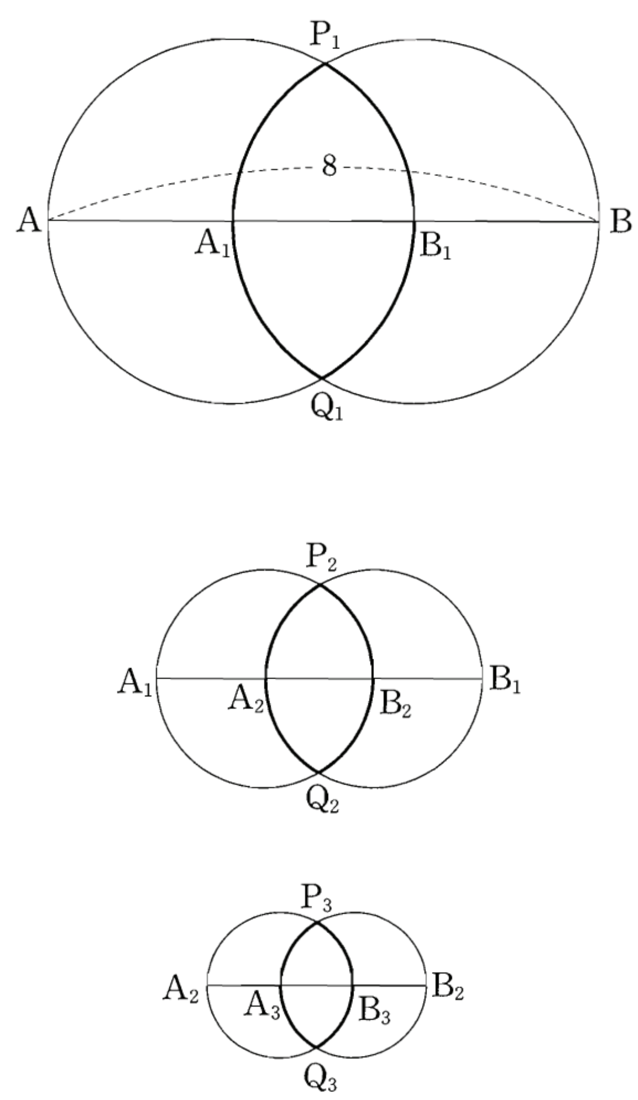
결국 $\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)$의 비율로 넓이가 줄어드는 것을 알 수 있다.

비록 각 직사각형들이 닮음은 아니지만, 각 직사각형들의 넓이의 축소비율은 일정하다.
가로의 길이, 세로의 길이가 각각 등비수열이므로 (가로) x (세로)도 등비수열이다.

(Step4) $$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{12}{1-\frac{3}{5}}=30$$

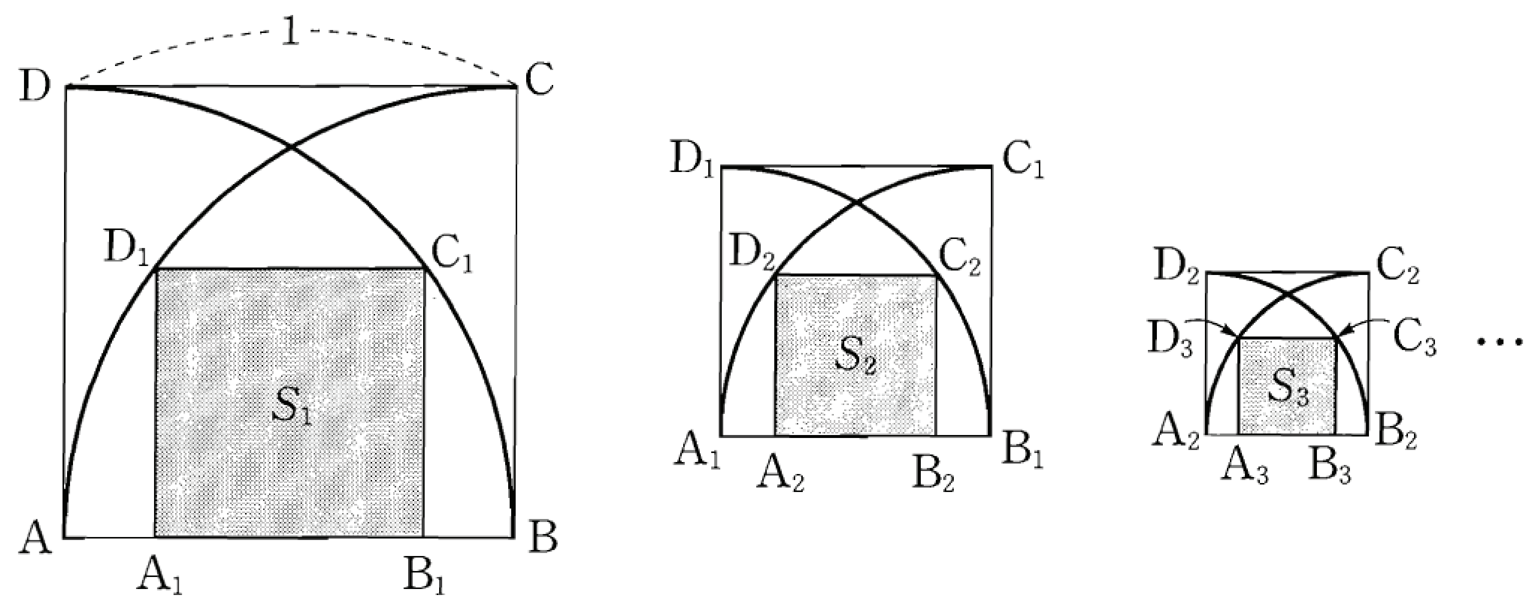
(ex1) 09년 6월 모의평가 14번

그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.
선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라고 하자.
선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라고 하자.
선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라고 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$의 값은? (3점)



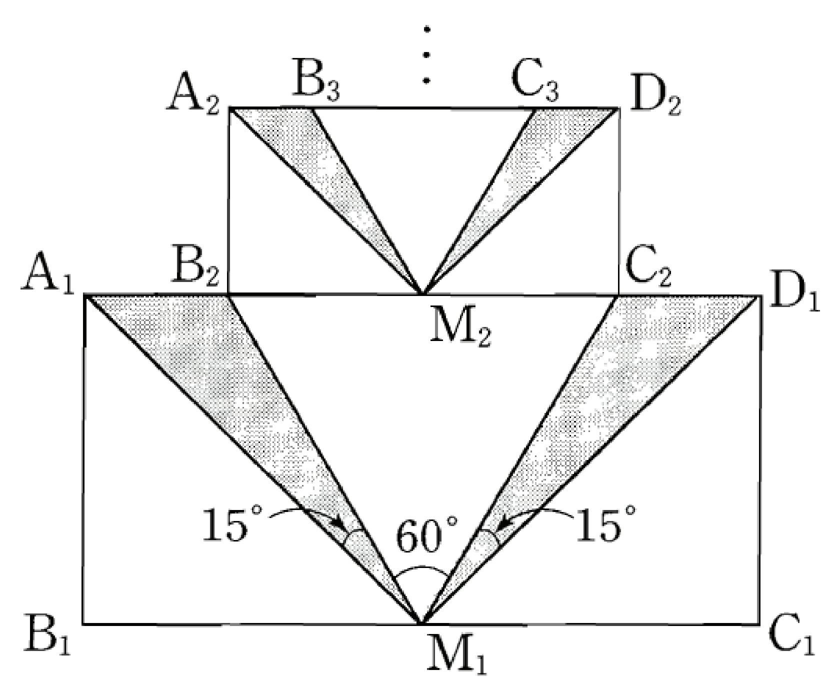
(ex2) 09년 9월 모의평가 17번

한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이라 하자.
정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 안에 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$을 각각 중심으로 하고 변 $\mathrm{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (4점)



(ex3) 11년 수능 10번

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=2$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 있다.
그림과 같이 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점을 $\mathrm{M_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1D_1}$ 위에 $\angle\mathrm{A_1M_1B_2}=\angle\mathrm{C_2M_1D_1}=15^\circ$, $\angle\mathrm{B_2M_1C_2}=60^\circ$가 되도록 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 정한다. 삼각형 $\mathrm{A_1M_1B_2}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{C_2M_1D_1}$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$가 $\overline{\mathrm{B_2C_2}}=2\overline{\mathrm{A_2B_2}}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{D_2}$를 정한다. 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 중점을 $\mathrm{M_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{A_2D_2}$ 위에 $\angle\mathrm{A_2M_2B_3}=\angle\mathrm{C_3M_2D_2}=15^\circ$, $\angle\mathrm{B_3M_2C_3}=60^\circ$가 되도록 두 점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$을 정한다. 삼각형 $\mathrm{A_2M_2B_3}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{C_3M_2D_2}$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (4점)



(ex4) 09년 수능 14번

좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.
중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.) (4점)