제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-3\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\vec{a}=(3,2)$, $3\vec{b}=(3,-3)$

$\therefore \vec{a}-3\vec{b}=(0,5)$

따라서, $\vec{a}-3\vec{b}$의 모든 성분의 합은 5이다. $\therefore$ ⑤

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{1-e^{2x}}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ 임을 이용하자.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{1-e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{2x}{-(e^{2x}-1)}\times\frac{5x}{2x}=-\frac{5}{2}$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{1-e^{2x}}=-\frac{5}{2}$, ①

3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5,\ a)$, $\mathrm{B}(9,\ -7,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(3,\ b,\ 4)$이다. $a+b$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

두 점 A(0,5,a), B(9,-7,6)에 대하여
선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times9+2\times0}{1+2},\ \frac{1\times(-7)+2\times5}{1+2},\ \frac{1\times6+2\times a}{1+2}\right)$, 즉 $\left(3,1,\frac{6+2a}{3}\right)$ 이다.

$\therefore b=1,\ \frac{6+2a}{3}=4$

$\therefore a=3,\ b=1,\ a+b=4$ ③

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A\cap B^{C})=\frac{1}{6}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, B^{C}은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{11}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{7}{8}$ ⑤ $\frac{15}{16}$

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B^c)=\frac{1}{6}$ 이므로

$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^c)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ 이다.

두 사건 A와 B는 독립이므로 $P(A)\times P(B)=P(A\cap B)$ 이다.

$\frac{2}{3}\times P(B)=\frac{1}{2}$ $\therefore P(B)=\frac{3}{4}$, ②

5. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$2\cos^2\frac{x}{2}+3\sin\frac{x}{2}=3$$

의 모든 해의 합은? [3점]

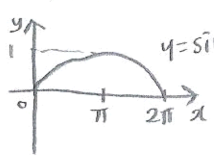
① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

$\cos^2\frac{x}{2} = 1-\sin^2\frac{x}{2}$ 임을 이용하면

$2(1-\sin^2\frac{x}{2})+3\sin\frac{x}{2}=3$

$2\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}+1=0$

$\sin\frac{x}{2}=1$ or $\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$



$\therefore x=\pi$ or $x=\frac{\pi}{3}$ or $x=\frac{5\pi}{3}$

따라서, 주어진 방정식의 모든 해의 합은 3π이다. ④

6. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\ y)$가

$$x=\ln(t+1),\quad y=2\sqrt{t+1}$$

이다. 시각 $t=2$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t+1}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{2\sqrt{t+1}}=\frac{1}{\sqrt{t+1}}$ 이므로

점 P의 시각 t에서의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{t+1}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{t+2}}{t+1}$ 이다.

$\therefore$ (시각 $t=2$에서 점 P의 속력) $=\frac{\sqrt{2+2}}{2+1}=\frac{2}{3}$. ④

7. 함수 $y=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+k$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

함수 $y=3\cos(2x+\frac{\pi}{4})+k$의

최댓값은 $3+k$, 최솟값은 $-3+k$이다.

따라서 주어진 함수의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나기 위해서는

$-3+k \le -4 \le 3+k$를 만족해야 한다.

$\therefore -7 \le k \le -1$, 실수 k의 최솟값은 -7이다. ②

8. 5명의 학생 중 3명의 학생을 뽑아 서로 다른 연필 4자루를 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 뽑힌 학생 중 연필을 갖지 못하는 학생은 없다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280 ④ 320 ⑤ 360

• 5명의 학생 중 연필을 받을 학생 3명을 뽑는 경우의 수 : $_5C_3 = 10$

• 3명의 학생이 서로 다른 연필 4자루를 한 자루 이상씩 가져가려면, 각 학생이 2자루, 1자루, 1자루씩 가져야 한다.

$$\underbrace{{}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}}_{\text{연필 4자루를 2,1,1개로 나누는 경우의 수}} \times \underbrace{3!}_{\text{3명의 학생에게 분배하는 경우의 수}} = 36$$

• $\therefore 10 \times 36 = 360$ $\therefore 360$, ⑤

9. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(3)=5$, $f'(3)=\frac{1}{8}$을 만족시킨다. 함수 $f(2x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(5)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$f(2x-1) = h(x)$라 하자.

$g'(5) = \dfrac{1}{h'(g(5))}$

$g(5) = k$ 라하면

$h(k) = f(2k-1) = 5$ $\therefore k=2$, $g(5)=2$

$h'(x) = 2f'(2x-1)$ 에서

$h'(2) = 2f'(3) = \frac{1}{4}$ 이므로

$g'(5) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ $\therefore$ ②

※ $y=f(x)$, $y=2x-1$이 증가함수이므로 $y=f(2x-1)$도 증가함수이다. 따라서 함수 $f(2x-1)$은 역함수가 존재한다.

10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선이 원 $(x-2)^2+(y-6)^2=16$의 넓이를 이등분하도록 하는 모든 a의 값의 합은? [3점]

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

점 (a,b)는 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{12} = 1$ … ①

점 (a,b) 위에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{4} - \frac{by}{12} = 1$ … ②

이 접선이 원 $(x-2)^2+(y-6)^2=16$의 넓이를 이등분하므로

접선 ②가 점 $(2,6)$을 지난다. $\therefore \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = 1$ … ③

①과 ③을 연립하여 b를 제거하면,

$a^2+2a-8=0$ $\therefore a=-4$ or $a=2$

따라서 주어진 조건을 만족하는 모든 a의 값의 합은 -2이다. $\therefore$ ⑤

※ 주어진 조건을 만족하는 모든 순서쌍 (a,b)는 $(-4,-6)$, $(2,0)$이다.

11. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고,

$$\mathrm{P}(5 \le X \le 8) = \mathrm{P}(4 \le X \le 7)$$

을 만족시킨다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 $\mathrm{P}(X \le 8)$의 값을 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3085 ② 0.6915 ③ 0.8413 ④ 0.9332 ⑤ 0.9772

$X \sim N(m, 2^2)$

$P(5 \le X \le 8) = P(5 \le X \le 7) + P(7 \le X \le 8)$

$P(4 \le X \le 7) = P(4 \le X \le 5) + P(5 \le X \le 7)$

$\therefore P(7 \le X \le 8) = P(4 \le X \le 5)$

구간의 길이 동일하므로

$\frac{4+8}{2} = \frac{5+7}{2} = m$

$\therefore m = 6$

$\therefore X \sim N(6, 2^2)$

$P(X \le 8) = P(Z \le \frac{8-6}{2}) = P(Z \le 1) = 0.8413$

(단, $Z \sim N(0, 1^2)$)

$\therefore$ ③

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + x\tan^2 x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$ ② $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ ③ $\frac{\pi}{4} - \ln 2$ ④ $\frac{\pi}{4} + \ln 2$ ⑤ $\frac{\pi}{4} - 2\ln 2$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + x\tan^2 x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx \quad (\because 1 + \tan^2 x = \sec^2 x)$

$= [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4} - (-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$

$\therefore$ ①

13. 두 주머니 A, B에 각각 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 들어있다. 갑은 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행을 하고, 을은 두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼내는 시행을 할 때, 갑이 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수와 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적혀 있는 수의 합이 서로 같을 확률은? [3점]

① $\frac{5}{96}$ ② $\frac{7}{96}$ ③ $\frac{3}{32}$ ④ $\frac{11}{96}$ ⑤ $\frac{13}{96}$

i) 갑이 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1일때

→ 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 합 1 (x)

ii) 주사위 눈의 수 2

→ 순서쌍 (A,B) : (1,1)

→ $\frac{1}{6} \times \frac{1}{4\times4}$

iii) 주사위 눈의 수 3

→ (1,2), (2,1)

→ $\frac{1}{6} \times \frac{2}{4\times4}$

iv) 주사위 눈의 수 4

→ (1,3), (2,2), (3,1)

→ $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4\times4}$

v) 주사위 눈의 수 5

→ (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

→ $\frac{1}{6} \times \frac{4}{4\times4}$

vi) 주사위 눈의 수 6

→ (2,4), (3,3), (4,2)

→ $\frac{1}{6} \times \frac{3}{4\times4}$

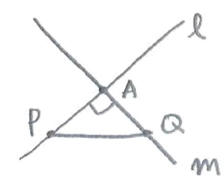
∴ i)~vi) : $\frac{13}{96}$, ⑤

14. 좌표공간에서 점 A를 지나는 두 직선

$$l : \frac{x+4}{a} = y = \frac{6-z}{2}, \quad m : x = z - b,\ y = 2$$

는 서로 수직이고, 두 직선 l과 m이 xy평면과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ의 넓이는? (단, a, b는 0이 아닌 상수이다.) [4점]

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$



l의 방향벡터 : $(a, 1, -2)$

m의 방향벡터 : $(1, 0, 1)$

$(a,1,-2)\cdot(1,0,1) = a-2 = 0$ ∴ $a=2$

직선 l과 직선 m의 교점 $A(0,2,2)$ ∴ $b=2$

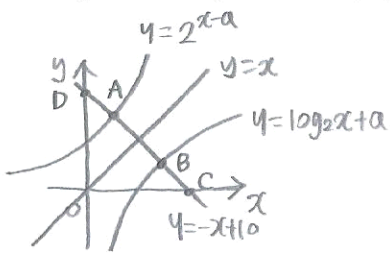
$P(2,3,0)$, $Q(-2,2,0)$

$\overline{AP}=3$, $\overline{AQ}=2\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle APQ = 3\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$, ①

15. 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^{x-a}$, $y=\log_2 x+a$가 직선 $y=-x+10$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $y=-x+10$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, $5\overline{\mathrm{AB}}=3\overline{\mathrm{CD}}$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



$y=2^{x-a}$와 $y=\log_2 x+a$는 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$A(t, 10-t)$라하면 $B(10-t, t)$이다.

$C(10,0)$, $D(0,10)$, $\overline{CD}=10\sqrt{2}$이므로

$\overline{AB}=6\sqrt{2}$이다.

$\overline{AB}=\sqrt{\{t-(10-t)\}^2+\{(10-t)-t\}^2}=6\sqrt{2}$

$\therefore t=2$ or $t=8$

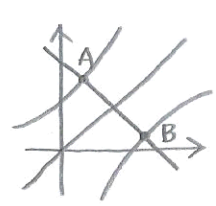
$t=2$; $A(2,8)$, $8=2^{2-a}$, $a=-1$

$t=8$; $A(8,2)$, $2=2^{8-a}$, $a=7$

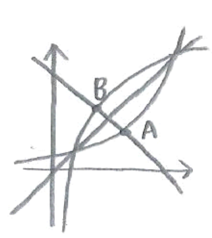
$\therefore$ 모든 a 값의 합은 6, ③

※ 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같이 두 가지가 존재한다.

i) $t=2$;



ii) $t=8$;



16. 어느 대학교 학생들의 하루 열람실 이용시간은 평균이 m, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 대학교 학생 중 n명을 임의추출하여 하루 열람실 이용시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a, b]$이고, 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $[c, d]$이다. $l_1=d-a$, $l_2=d-b$라 할 때, $l_1+l_2=\frac{43}{10}$이다. n의 값은?

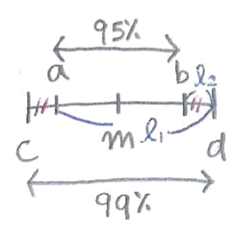
(단, 열람실의 이용시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$로 계산한다.) [4점]

① 81 ② 100 ③ 121 ④ 144 ⑤ 169

학생들의 하루 열람실 이용시간 : X

$X \sim N(m, 10^2)$

모평균 m 추정 시 신뢰도가 낮을수록 신뢰구간의 길이가 짧다.



$d-b=a-c$이므로 $l_1+l_2=(d-a)+(d-b)=(d-a)+(a-c)=d-c$

$l_1+l_2=d-c=2\times 2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{43}{10}$

$\therefore n=144$, ④

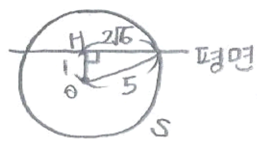
17. 좌표공간의 구 $S: x^2+y^2+z^2=25$ 와 평면 $3x-4z=5$ 가 만나서 생기는 원 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB}=6$ 이다. 구 S 위의 점 P 가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{OP},\quad |\overrightarrow{PA}|>|\overrightarrow{OP}|$$

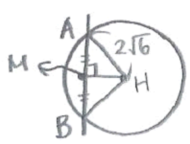
를 만족시킬 때, 실수 k 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-\frac{18}{5}$ ② $-\frac{14}{5}$ ③ -2 ④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

구와 평면 사이의 거리: $\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$



원의 반지름은 $2\sqrt{6}$이다.
원점에서 평면에내린 수선의발을 H라하자.



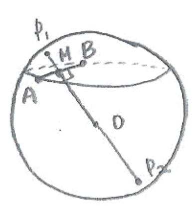
두 점 A, B의 중점을 M이라 하자.
$\overline{AM}=\overline{MB}=3$, $\overline{HM}=\sqrt{15}$, $\overline{OM}=4$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=k\overrightarrow{OP}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OP}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}=(k+2)\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{k+2}{2}\overrightarrow{OP}$

∴ 두벡터 $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$는 일직선 상에 위치한다.

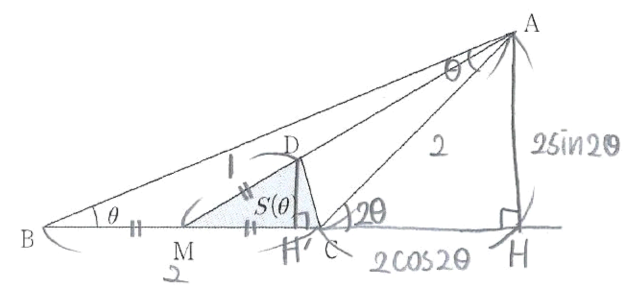


구 S 위의 두 점 P_1, P_2 중 $|\overrightarrow{PA}|>|\overrightarrow{OP}|$ 을 만족시키는 점은 점 P_2이다. ∴ $\frac{k+2}{2}<0$

$|\overrightarrow{OM}|=4$, $|\overrightarrow{OP}|=5$ 이므로 $\overrightarrow{OM}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{OP}$

∴ $\frac{k+2}{2}=-\frac{4}{5}$, $k=-\frac{18}{5}$, ①

18. 그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{BC}=2$, $\angle ABC=\theta$ 인 이등변삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 의 중점을 M 이라 할 때, 선분 AM 위에 점 D 를 $\overline{CM}=\overline{DM}$ 이 되도록 잡는다. 삼각형 DMC 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$\triangle MDH' \backsim \triangle MAH$ (AA 닮음)

$\overline{MD}:\overline{MA}=\overline{DH'}:\overline{AH}$ 에서

$\overline{MA}=\sqrt{\overline{MH}^2+\overline{HA}^2}=\sqrt{(1+2\cos2\theta)^2+(2\sin2\theta)^2}$

$=\sqrt{5+4\cos2\theta}$ 이므로

$1:\sqrt{5+4\cos2\theta}=\overline{DH'}:2\sin2\theta$

∴ $\overline{DH'}=\frac{2\sin2\theta}{\sqrt{5+4\cos2\theta}}$

∴ $S(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\sin2\theta}{\sqrt{5+4\cos2\theta}}=\frac{\sin2\theta}{\sqrt{5+4\cos2\theta}}$

∴ $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{\theta}\times\frac{1}{\sqrt{5+4\cos2\theta}}=\frac{2}{3}$, ②

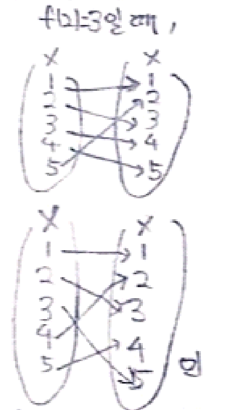
19. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 A에서 A로의 일대일대응 중 임의로 하나를 택하여 f라 할 때, $(f\circ f)(t)=t$를 만족시키는 실수 t의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하는 과정이다.

> A에서 A로의 일대일대응 중에서 임의로 하나를 택하는 경우의 수는 $5!=120$이다.
> $(f\circ f)(t)=t$를 만족시키는 실수 t는 $f(t)=t$이거나 t와 서로 다른 실수 s에 대하여 $f(t)=s$이면서 $f(s)=t$를 만족시켜야 한다.
> $f(t)=t$인 실수 t의 개수를 a,
> $f(t)=s$이면서 $f(s)=t$인 서로 다른 두 실수 $t,\ s$의 모든 순서쌍 $(t,\ s)$의 개수를 b라 하자.
> (i) $X=1$인 사건은 $a=1,\ b=0$인 경우이므로
> $$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times\boxed{(가)}}{5!}$$
> (ii) $X=2$인 사건은 $a=2,\ b=0$이거나 $a=0,\ b=1$인 경우이므로
> $$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times2+{}_5\mathrm{C}_2\times2}{5!}$$
> (iii) $X=3,\ 4$인 사건은 존재하지 않으므로
> $\mathrm{P}(X=3)=0,\quad \mathrm{P}(X=4)=0$
> (iv) $X=5$인 사건은 $a=5,\ b=0$이거나 ①
> $a=3,\ b=1$이거나 ②
> $a=1,\ b=2$인 경우이므로 ③
> $$\mathrm{P}(X=5)=\frac{\boxed{(나)}}{5!}$$
> (v) $X=0$인 사건은 $X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$인 사건의 여사건이므로
> $$\mathrm{P}(X=0)=1-\sum_{k=1}^{5}\mathrm{P}(X=k)$$
> (i), (ii), (iii), (iv), (v)에 의하여 확률변수 X의 평균은
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$라 할 때, $\frac{q\times r}{p}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{3}$ ② $\frac{49}{6}$ ③ $\frac{26}{3}$ ④ $\frac{55}{6}$ ⑤ $\frac{29}{3}$

(가) f(1)=1이라 하자.
f(1)=3일 때,



두 가지 경우만 가능하다
f(1)=3, 4, 5 가능하므로
f(1)=1일 때, $2\times3=6$가지
∴ X=1일 때, ${}_5C_1\times6=30$가지
∴ (가)=6

(나) ① ${}_5C_5=1$
② ${}_5C_2\times{}_3C_3=10$
③ $({}_5C_2\times{}_3C_2\times\frac{1}{2!})\times{}_1C_1=15$
(나)=①+②+③=26

(다) E(X)
$=\frac{1}{5!}(1\times30+2\times40+3\times0+4\times0+5\times26+0\times(1-\sum_{k=1}^{5}P(X=k))$
$=\frac{1}{120}\times240=2$
∴ (다)=2.

p=6, q=26, r=2
∴ $\frac{q\times r}{p}=\frac{26}{3}$

③

20. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_1^4 f(t)dt=8,\quad \int_1^4 f(t)\ln t\,dt=16\ln2+6$$

을 만족시킨다. 모든 양수 x에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_1^x f(t)\ln\frac{x}{t}\,dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(4)-g'(1)=2$
ㄴ. $g'(a)=-2$를 만족시키는 실수 a가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $g''(b)=0$을 만족시키는 실수 b가 열린구간 $(1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(x)=\int_1^x f(t)\ln\frac{x}{t}\,dt$
$=\ln x\int_1^x f(t)dt-\int_1^x f(t)\ln(t)\,dt$

g(x)는 연속함수인 f(t)의 정적분 형태로 정의된 함수이므로 g(x)는 미분 가능하다.

$g'(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt.$

ㄱ. $g'(4)=\frac{1}{4}\times\int_1^4 f(t)dt=2$
$g'(1)=\frac{1}{1}\times\int_1^1 f(t)dt=0$

ㄴ. $g(4)=\ln4\times\int_1^4 f(t)dt-\int_1^4 f(t)\ln t\,dt=-6$
$g(1)=\ln1\times\int_1^1 f(t)dt-\int_1^1 f(t)\ln t\,dt=0$
평균값정리에 의해 $g'(a)=\frac{g(4)-g(1)}{4-1}=-2$ 인 a가 열린구간 (1, 4)에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $g'(x)=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$ 도 미분 가능한 함수이다.
ㄴ에 의해 $g'(a)=0$인 a가 열린구간 (1,4)에 존재하고,
ㄱ에 의해 $g'(1)=0$ 이므로
롤의 정리에 의해 $g''(b)=0$인 b가 열린구간 (1, a)에 적어도 하나 존재한다.

21. 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[-\pi,\ \pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=x\sin x+(t+1)\cos x-t-1$$

이 있고, 함수 $|f(x)|$가 열린 구간 $(-\pi,\ \pi)$에서 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to a+}g(t)-\lim_{t\to a-}g(t)=b$$

를 만족시키는 두 실수 $a,\ b\ (b\neq 0)$의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$를 구하면 $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2)$이다. $a_1+b_1+2(a_2+b_2)$의 값은? (단, $a_1<a_2$) [4점]

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

$f(x)=x\sin x+(t+1)\cos x-t-1$

$f(-x)=f(x)$가 성립하므로 $x\geq 0$의 구간에서 생각하자.

$f'(x)=x\cos x-t\sin x$, $f(0)=0$, $f(\pi)=-2(t+1)$, $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1-t$

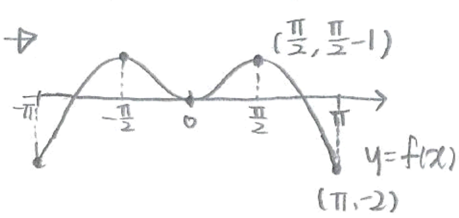
→ $f'(x)=0$이 되는 지점을 찾아야 한다.

① $t=0$; $f(x)=x\cos x$

$f'(x)=0$ 이려면 $x=0$ or $x=\frac{\pi}{2}$ or $x=-\frac{\pi}{2}$ → 극대/극소지점

→ $f(\frac{\pi}{2})=f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1>0$

→



→ $|f(x)|$ 미분불가 지점 2개

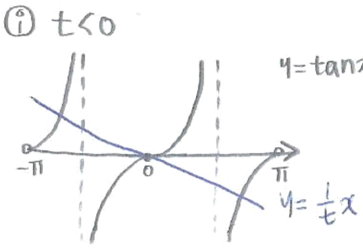
→ $g(0)=2$

② $t\neq 0$; $f'(x)=x\cos x-t\sin x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cos x-t\sin x=0 \Leftrightarrow \tan x=\frac{1}{t}x$

($\because t\neq 0$ 일때 $\cos x\neq 0$ 이므로 양변을 $t\cos x$로 나누어도 된다.)

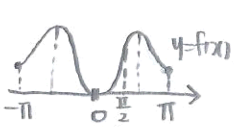
ⓘ $t<0$



→ 교점 반드시 3개 존재

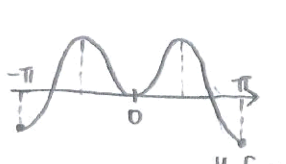
→ 도함수의 부호변화 지점 3개 ($\frac{\pi}{2}$보다 큰곳, $\frac{\pi}{2}$보다 작은곳, 0인곳)

→ $f(\pi)=-2(t+1)\geq 0$일때, $t\leq -1$일때



→ $g(t)=0$ ($t\leq -1$)

→ $f(\pi)=-2(t+1)<0$ 일때, $-1<t<0$ 일때



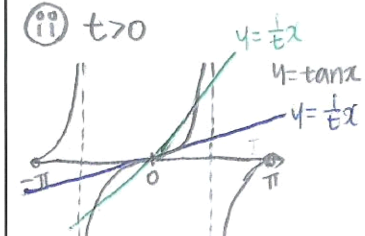
→ $g(t)=2$ ($-1<t<0$)

단답형

22. ${}_4C_2\times{}_4P_2$의 값을 구하시오. [3점]

${}_4C_2=6$, ${}_4P_2=12$ $\therefore {}_4C_2\times{}_4P_2=72$

ⓘⓘ $t>0$

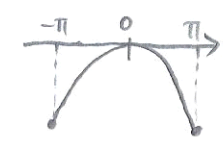


→ $x=0$에서 $y=\tan x$의 접선의 기울기 1이므로

$\frac{1}{t}\leq 1$ 일때 교점 1개
$\frac{1}{t}>1$ 일때 교점 3개
의 경우 존재.

→ $f(\pi)=-2(t+1)<0$

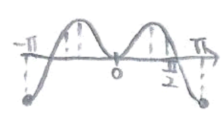
→ $\frac{1}{t}\leq 1$일때, $t\geq 1$일때



→ $x=0$에서만 도함수 부호변화

$g(t)=0$ ($t\geq 1$)

→ $\frac{1}{t}>1$ 일때, $0<t<1$ 일때



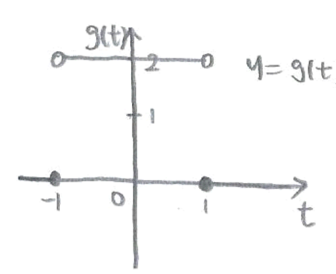
→ 0, $\frac{\pi}{2}$보다 작은곳, $-\frac{\pi}{2}$보다 큰곳 3개

→ $g(t)=2$ ($0<t<1$)

23. 함수 $f(x)=\ln(2x^2+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

풀이1) $f'(x)=\frac{4x}{2x^2+2}$, $f'(1)=\frac{4}{4}=1$

풀이2) $f(x)=\ln(x^2+1)+\ln 2$, $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $f'(1)=1$

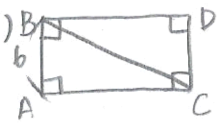


$\therefore a_1=-1,\ b_1=2-0=2$

$a_2=1,\ b_2=0-2=-2$

$\therefore$(준식) $=-1+2+2(1-2)=1-2=-1$, ②

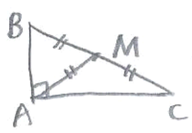
24. $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC 에 대하여 $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=10$ 일 때, $|\overrightarrow{AC}|$ 의 값을 구하시오. [3점]

풀이1)


직사각형 ABCD 정의하면
$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|=10$, $|\overrightarrow{AC}|=8$

풀이2) 선분BC의 중점 M이라 하면

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\times\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=2\overrightarrow{AM}$, $|\overrightarrow{AM}|=5$



→ 점 M은 선분 BC를 지름으로 하는 △ABC의 외접원의 중심.

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=5$

$\therefore \overline{BC}=10$, $|\overrightarrow{AC}|=8$

25. 곡선 $y=xe^{-x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ te^{-t})$ $(t>0)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 A라 하자. 삼각형 AOP 의 넓이의 최댓값이 pe^{-q}일 때, $2pq$의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이고, p, q는 유리수이다.) [3점]

$y=xe^{-x}$

$y'=e^{-x}(-x+1)$

점P에서의 접선의 방정식

→ $y=e^{-t}(-t+1)(x-t)+te^{-t}$

$\therefore y=e^{-t}(1-t)x+t^2e^{-t}$

$A(0, t^2e^{-t})$, $O(0,0)$, $P(t, te^{-t})$

$S(t)=\triangle AOP$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times t^2e^{-t}\times t=\frac{1}{2}t^3e^{-t}$

$S'(t)=\frac{1}{2}t^2(-t+3)e^{-t}$

$t=3$일때 $S(t)$가 최댓값 $S(3)=\frac{27}{2}e^{-3}$을 가진다.

$\therefore p=\frac{27}{2}$, $q=3$, $2pq=81$

26. 갑과 을이 각각 한 개의 주사위를 2번씩 던져 총 4번의 주사위를 던진다. 갑이 한 개의 주사위를 2번 던져 나온 눈의 수가 짝수인 횟수를 a, 을이 한 개의 주사위를 2번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 횟수를 b라 하자. $a+b\neq 0$ 일 때, $a+b=3$일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{q}{p}=\frac{(a+b\neq0\ \&\ a+b=3\text{ 일확률})}{(a+b\neq0\text{ 일 확률})}$

$=\frac{P(a+b=3)}{P(a+b\neq0)}$

⊗ $P(a+b\neq0)$

$P(a+b=0)={}_2C_0\times(\frac{3}{6})^0\times(\frac{3}{6})^2\times{}_2C_0\times(\frac{2}{6})^0\times(\frac{4}{6})^2=\frac{1}{9}$

$\therefore P(a+b\neq0)=\frac{8}{9}$

⊗ $P(a+b=3)$

i) $a=1$, $b=2$

${}_2C_1\times(\frac{3}{6})^1\times(\frac{3}{6})^1\times{}_2C_2\times(\frac{2}{6})^2\times(\frac{4}{6})^0=\frac{1}{18}$

ii) $a=2$, $b=1$

${}_2C_2\times(\frac{3}{6})^2\times(\frac{3}{6})^0\times{}_2C_1\times(\frac{2}{6})^1\times(\frac{4}{6})^1=\frac{1}{9}$

$\therefore P(a+b=3)=\frac{3}{18}$

$\therefore \frac{\frac{3}{18}}{\frac{8}{9}}=\frac{3}{16}=\frac{q}{p}$, $p+q=19$

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 네 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $2a+b+c+d=\sqrt{(b+c+d)^2+96}$
> (나) $a \le b$

(가)의 식의 양변을 제곱하면

$(2a+b+c+d)^2=(b+c+d)^2+96$

$\Leftrightarrow (2a)^2+2(2a)(b+c+d)+(b+c+d)^2=(b+c+d)^2+96$

$\Leftrightarrow a^2+a(b+c+d)=24$

$\Leftrightarrow a(a+b+c+d)=24$

이때, a, b, c, d는 음이 아닌 네 정수이므로

a와 $a+b+c+d$의 값이 될 수 있는 경우는 다음과 같다.

a	$\times$ $(a+b+c+d)=24$	
1	24	$\cdots$ ①
2	12	$\cdots$ ②
3	8	$\cdots$ ③
4	6	$\cdots$ ④
6	4	
8	3	
12	2	
24	1	

(6, 8, 12, 24 / 4, 3, 2, 1) → $a, b, c, d \ge 0$ 이므로 $a > a+b+c+d$ 인 경우는 불가능하다.

① $a=1$, $a+b+c+d=24$

$a=1$, $b+c+d=23$ $(b\ge1,\ c,d\ge0)$

$b-1=b'$이라 하면 $b'+c+d=22$ $(b',c,d\ge0)$

$\therefore\ {}_3H_{22}=276$ (개)

② $a=2$, $a+b+c+d=12$

$a=2$, $b+c+d=10$ $(b\ge2,\ c,d\ge0)$

마찬가지 방법으로 계산하면 ${}_3H_8=45$ (개)

③ $a=3$, $a+b+c+d=8$

$a=3$, $b+c+d=5$ $(b\ge3,\ c,d\ge0)$ $\therefore\ {}_3H_2=6$ (개)

④ $a=4$, $a+b+c+d=6$

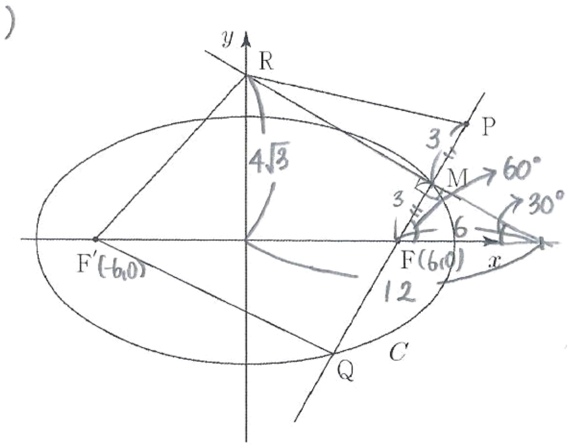
$a=4$, $b+c+d=2$ $(b\ge4,\ c,d\ge0)$

다음조건을 만족하는 순서쌍 (a,b,c,d)는 존재하지 않는다.

$\therefore\ 276+45+6=327$, 327(개)

28. 그림과 같이 두 초점이 F$(6,\ 0)$, F$'(-6,\ 0)$인 타원 C가 있다. 제1사분면 위의 점 P에 대하여 $\overline{\text{PF}}=6$이고, 직선 PF의 기울기는 $\sqrt{3}$이다. 선분 PF의 중점을 M이라 할 때, 점 M은 타원 C 위의 점이고, 타원 C와 직선 PF가 만나는 점 중 M이 아닌 점을 Q, 점 M을 지나고 직선 PF와 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 R라 하자. 사각형 PRF′Q의 둘레의 길이가 $m+n\sqrt{21}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

풀이1)



$R(0, 4\sqrt{3})$, $\overline{F'R}=\overline{FR}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+6^2}=2\sqrt{21}$

또한 $\overline{RF}=\overline{RP}$ ($\because \triangle RMF \equiv \triangle RMP$) 이므로 $\overline{RP}=2\sqrt{21}$

$\overline{F'Q}+\overline{QF}=\overline{F'M}+\overline{MF}$ 에서

$M(\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ 이므로 $\overline{F'M}=3\sqrt{21}$, $\overline{MF}=3$

$\therefore \overline{F'Q}+\overline{QF}=3+3\sqrt{21}$

$\therefore$(준식) $=\overline{RP}+\overline{PF}+\overline{FQ}+\overline{QF'}+\overline{F'R}$

$=9+7\sqrt{21}$

$\therefore m+n=16$

풀이2) $F(6,0)$, 직선 PF의 기울기 $\sqrt{3} \rightarrow P(9, 3\sqrt{3})$, $M(\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

직선 RM의 기울기 $-\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \overleftrightarrow{RM}: y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{15}{2})+\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $R(0, 4\sqrt{3})$

$\overline{F'R}=\overline{RP}=2\sqrt{21}$

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 이라하면

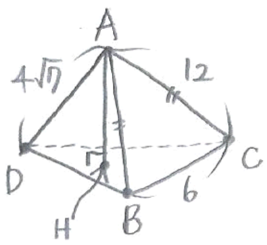
$\frac{225}{4a^2}+\frac{27}{4b^2}=1$, $a^2-b^2=36$

두 식을 연립하면 $a^2=\frac{9}{4}(22+2\sqrt{21})$, $b^2=\frac{9}{4}(6+2\sqrt{21})$

타원의 장축의 길이는 $3(1+\sqrt{21})$ 이다.

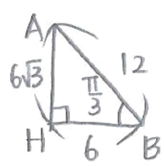
$\therefore$(준식) $=3(1+\sqrt{21})+2\times2\sqrt{21}+6=9+7\sqrt{21}$ $\therefore m+n=16$

29. $\overline{AB}=\overline{AC}=12$, $\overline{AD}=4\sqrt{7}$, $\overline{BC}=6$ 인 사면체 ABCD 가 있다. 평면 BCD 와 직선 AB 가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$ 이고, ① 두 직선 AD 와 BD 는 서로 수직이다. ② $\angle DBC > \frac{\pi}{3}$ 일 때, ③ 사면체 ABCD 의 부피는 $m+n\sqrt{6}$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 정수이다.) [4점]



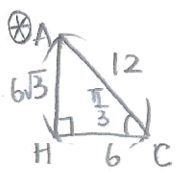
→ A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

<①조건>



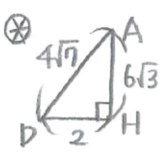
→ $\overline{HB}=6$, $\overline{AH}=6\sqrt{3}$

⊛



→ $\overline{HC}=6$, $\triangle HBC$는 한변의 길이가 6인 정삼각형

⊛



→ $\overline{DH}=2$

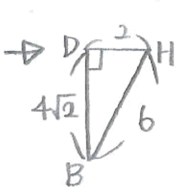
<②조건>

$\overline{AD}\perp\overline{BD}$

& 점H는 점A에서 평면BCD에 내린 수선의 발

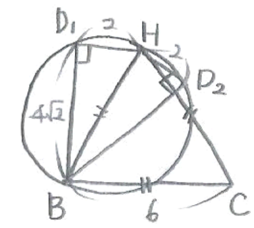
→ 삼수선정리, $\overline{HD}\perp\overline{BD}$

→



점D는 선분 BH를 지름으로 하는 원 위의 점 & $\overline{DH}=2$

<③조건>

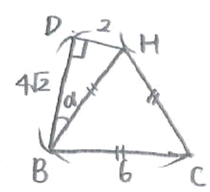


→ $\overline{HD}\perp\overline{BD}$ & $\overline{DH}=2$를 만족하는 두점 : D_1, D_2

→ $\angle DBC > \frac{\pi}{3}$을 만족하는 점D는 D_1이 된다.

<사면체 ABCD의 부피>

⊛ 삼각형 DBC의 넓이



$\angle HBD = \alpha$라하면,

→ $\triangle DBC = \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{BD}\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$

$\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}(1+2\sqrt{6})$

$\therefore \triangle DBC = \frac{1}{2}\times 6\times 4\sqrt{2}\times\frac{1}{6}(1+2\sqrt{6})$

$= 2(\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

⊛ 부피

$(\text{사면체 ABCD의 부피}) = \frac{1}{3}\times\triangle DBC\times\overline{AH}$

$= \frac{1}{3}\times 2(\sqrt{2}+4\sqrt{3})\times 6\sqrt{3}$

$= 48+4\sqrt{6}$ $\therefore m+n=52$

⊛마지막! ☺

$g(4)$의 최소를 구하자.

$g(4) = f(4) \times e^{-kf(4)} = \frac{9}{8}e^{-\frac{9}{8}k}$ ∴ k의 최댓값 필요.

$ac^2 = 2+\frac{1}{k}$ & $c \geq 3$ 이므로 $\frac{1}{k} \geq \frac{9}{8}$

∴ $k \leq \frac{8}{9}$, k 최댓값 $\frac{8}{9}$ ∴ $g(4) \geq \frac{9}{8}e^{-1}$, 최솟값 $\frac{9}{8}e^{-1}$

∴ $16(p+q) = 34$

30. 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값이 -2인 이차함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f(x)e^{-kf(x)}$$

이라 할 때, 함수

$$h(x) = \int_1^x g(f(t))dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $h(1+x)+h(1-x)=0$이다.
> (나) 곡선 $y=h(x)$의 변곡점의 개수는 5이다.
> (다) 함수 $h(x)$가 극대 또는 극소가 되는 모든 x를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 x_1, x_2, x_3, x_4이고, 네 수 x_1, x_2, x_3, x_4는 등차수열을 이룬다.

$g(4)$의 최솟값이 pe^{-q}일 때, $16(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이다.) [4점]

$h(x) = \int_1^x g(f(t))dt$

$h(1) = 0$, $h'(x) = g(f(x))$

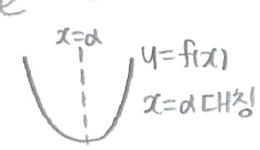
(가) $\frac{h(1+x)+h(1-x)}{2} = 0$: $h(x)$는 $(1, 0)$ 점대칭

$h'(1+x) = h'(1-x)$; $h'(x)$는 $x=1$ 대칭

$h'(x) = g(f(x)) = f(f(x))e^{-kf(f(x))}$

$f(\boxed{f(1+x)})e^{-kf(\boxed{f(1+x)})} = f(\boxed{f(1-x)})e^{-kf(\boxed{f(1-x)})}$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 - 2$ 라 하자. $\longrightarrow$



위의 등식을 만족하려면 $f(\square) = f(\square)$ 여야 하므로

$\square = \square$ or $\frac{\square+\square}{2} = \alpha$ 여야 한다.

즉, $f(1+x) = f(1-x)$ or $f(1+x)+f(1-x) = 2\alpha$

이때, $f(x)$는 이차함수이므로 $f(1+x)+f(1-x) = 2\alpha$를 만족시킬 수 없다.

∴ $f(1+x) = f(1-x)$, $\alpha = 1$

∴ $f(x) = a(x-1)^2 - 2$

(나) $y = h''(x)$ 부호변화 지점 5개

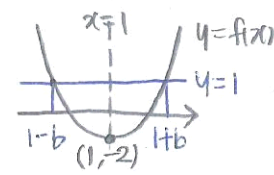
$h''(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{4개} \times \underbrace{f'(x)}_{x=1,\ 1개}$

⊛ $g(x) = f(x)e^{-kf(x)}$

$g'(x) = f'(x)(1-kf(x))e^{-kf(x)}$

→ $g'(f(x)) = f'(f(x))(1-kf(f(x)))\underbrace{e^{-kf(f(x))}}_{(X)}$ 부호변화지점 — $x=1$ 제외, 4개

① $f'(f(x)) = 0$ 되는 곳 ⇒ $f(x)=1$ 되는 곳 (∵ $f'(1)=0$)

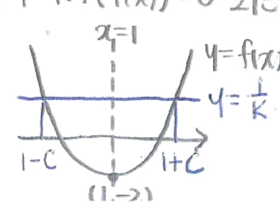


→ $f(1-b) = f(1+b) = 1$ 이라 하자.

변곡점 x좌표 : $1-b$, $1+b$

$\boxed{ab^2 = 3}$

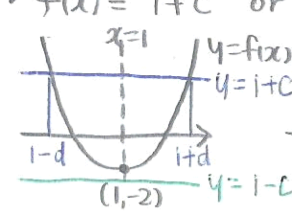
② $1-kf(f(x)) = 0$ 되는 곳 ⇒ $f(f(x)) = \frac{1}{k}$ 되는 곳 ($k>0$)



→ $f(1-c) = f(1+c) = \frac{1}{k}$ 이라 하자.

$\boxed{ac^2 = 2+\frac{1}{k}}$

→ $f(x) = 1+c$ or $f(x) = 1-c$ 만족하는 x가 두 개



→ $y=f(x)$ & $y=1-c$ 교점 (X)
$y=f(x)$ & $y=1+c$ 교점 2개
$1-c \leq -2$, $\boxed{c \geq 3}$ ($c=3$일 때 교점은 있지만 부호변화 불가하므로 조건(O))

→ $f(1-d) = f(1+d) = 1+c$ 라 하자.

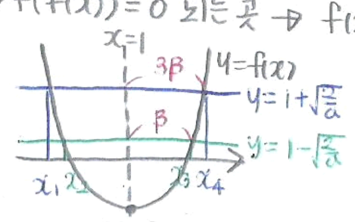
변곡점 x좌표 : $1-d$, $1+d$, $\boxed{ad^2 = 3+c}$

(다) $y = h'(x)$ 부호변화지점 4개

$h'(x) = g(f(x))$

$= f(f(x))\underbrace{e^{-kf(f(x))}}_{(X)}$ 부호변화 지점 4개

→ $f(f(x)) = 0$ 되는 곳 → $f(x) = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$ 되는 곳



→ x_1, x_2, x_3, x_4가 공차가 2β인 등차수열이라 하자.

→ $f(x_4) = f(1+3\beta) = 9a\beta^2 - 2 = 1+\sqrt{\frac{2}{a}}$

$f(x_3) = f(1+\beta) = a\beta^2 - 2 = 1-\sqrt{\frac{2}{a}}$

→ 두 식을 연립하면 $\beta = (2a)^{-\frac{3}{4}}$, $a = \frac{25}{72}$