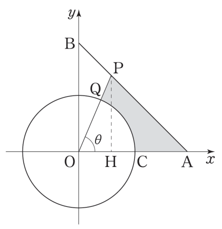
2019학년도
인수·제헌's 마지막 디딤돌

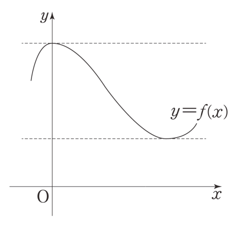
1	②	**2**	⑤	**3**	④	**4**	②	**5**	①
6	③	**7**	④	**8**	③	**9**	⑤	**10**	①
11	45	**12**	19	**13**	121	**14**	780	**15**	17
16	50	**17**	52	**18**	8	**19**	22	**20**	53

1.
점 P 에서 선분 OA 에 내린 수선의 발을 H,
$\angle\mathrm{POA}=\ \theta$라 하자.



주어진 영역의 넓이는 삼각형 OPA 의 넓이에서 부채꼴 QOC 의 넓이를 뺀 것과 같다.
우선 t와 θ에 대한 관계식부터 찾아보면 다음과 같다.
직선 OP 의 기울기 : $\frac{2-t}{t}=\frac{2}{t}-1=\tan\theta$
삼각형 OPA 의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times2\times(2-t)$,
부채꼴 QOC의 넓이는 $\frac{1}{2}\theta$ 이다.
따라서 $f(t)=(2-t)-\frac{1}{2}\theta$ 이다.
양변을 t에 대하여 미분하면 $f'(t)=-t-\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}$ 이고,
$\frac{2}{t}-1=\tan\theta$에서 양변을 t에 대하여 미분하면
$-\frac{2}{t^2}=\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$이므로 $t=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이고,
이때, $\frac{d\theta}{dt}$ 의 값은 -1 이다.
따라서 $f'(1)=\ -1-\frac{1}{2}\times(-1)=\ -\frac{1}{2}$이다.

2.
ㄱ.
함수 $f(x)$ 는 $x=2$에서 극소, $x=0$에서 극대이다.
따라서 $f(2)<f(0)$ 이므로 $f(0)<0$ 이면
$|f(0)|<|f(2)|$ 이다. (O)
ㄴ.
함수 $f'(x)$ 의 최솟값이 -2 이면 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(0,\ f(0))$ 과 $(2,\ f(2))$ 를 지나는 직선의 기울기인
함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$의 값이 -2 보다는 크다.



즉, $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}>-2\ \Leftrightarrow\ f(2)-f(0)>-4$ 이다. (O)

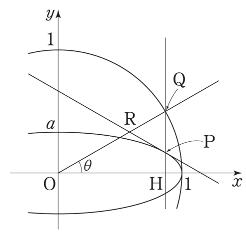
ㄷ.
곡선 $y=f(x)$의 점근선의 방정식이 각각
$y=f(0)-1$, $y=f(2)+1$ 이므로 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 $f''(x)=0$ 인 x가 적어도 하나 이상 존재하며,
구간 $(0,\ \infty)$에서 $f''(x)=0$인 x가 적어도 하나 이상 존재한다. 방정식 $f''(x)=0$은 적어도 세 개의 실근을 갖는다. (O)

3.
$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=m$ 이라 하자.
$f(x)=x+me^{-x}$이고, 함수 $f(x)$ 를 미분하면
$f'(x)=1-me^{-x}$ 이다.
이때, $f'(a)=1-me^{-a}=0$ 이 되는 a에서 극소이자 최소이다.
$1-me^{-a}=0$ 에서 $e^a=m$ 이고,
$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=m$ 이라 하였으므로
적분을 해보면,
$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=$
$\int_0^1 e^t(2-me^{-t})dt=2e-2-m=m$, $m=e-1$ 이다.
따라서 $e^a=e-1$ 이고, 최솟값은 $f(a)$ 이므로
$f(x)=x+me^{-x}$에서 $f(a)=a+1=\ln(e-1)+1$이다.

$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=m$ 이라 하자.
$f(x)=x+me^{-x}$이고, 함수 $f(x)$ 를 미분하면
$f'(x)=1-me^{-x}$ 이다.
이때, $f'(a)=1-me^{-a}=0$ 이 되는 a에서 극소이자 최소이다.
$1-me^{-a}=0$ 에서 $e^a=m$ 이고,
$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=m$ 이라 하였으므로
적분을 해보면,
$\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}dt=$
$\int_0^1 e^t(2-me^{-t})dt=2e-2-m=m$, $m=e-1$ 이다.
따라서 $e^a=e-1$ 이고, 최솟값은 $f(a)$ 이므로
$f(x)=x+me^{-x}$에서 $f(a)=a+1=\ln(e-1)+1$이다.

4.
$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면,
$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\times2x=x\sqrt{x^2+2}$ 이다.
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이고, 이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $g(t)$ 이므로
$\tan(g(t))=f'(t)$ 이다. 즉, $\tan g(t)=t\sqrt{t^2+2}$ 이고,
다음과 같이 부호를 나눌 수 있다.
$t<0$ 일 때, $\tan g(t)<0$ 이므로 $\frac{\pi}{2}<g(t)<\pi$ 이고,
$t>0$ 일 때, $\tan g(t)>0$ 이므로 $0<g(t)<\frac{\pi}{2}$ 이다.
한편, $\tan g(t)=t\sqrt{t^2+2}$ 에서
$\cos g(t)=\pm\frac{1}{t^2+1}$ 인데 위에서 t에 따른 $g(t)$ 의 부호를 나눴으므로 다음과 같이 계산할 수 있다.
$\int_{-1}^{\sqrt{3}} t\cos g(t)\,dt=\int_{-1}^{0} t\cos g(t)dt+\int_0^{\sqrt{3}} t\cos g(t)dt$
$=\int_{-1}^{0}-\frac{t}{t^2+1}dt+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t}{t^2+1}dt$[1)]
$=\left[-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^{\sqrt{3}}$
$=\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{2}\ln4=\frac{3}{2}\ln2$ 이다.

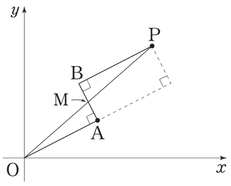
5.
점 Q 는 원 위의 점이므로 반지름의 길이가 1 인 원 위의 한 점의 x좌표가 $\cos\theta$이면 y좌표는 $\sin\theta$ 이다.
따라서 $p=\sin\theta$이다.



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle\mathrm{QOH}=\theta$이고, $\angle\mathrm{OQH}=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이다.
그러므로 $p=\sin\theta=\frac{1}{2}$ 이다.
직선 $(\cos\theta)x+\frac{\sin\theta}{a}y=1$의 기울기는
$-\frac{a\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$
이므로 $a=\frac{1}{3}$ 이다.
직선 OQ의 방정식은 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 타원 위의 점 P 에서의 접선의 방정식은 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}$ 이므로
두 방정식을 연립하면 두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$,
$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 구할 수 있다.
$\frac{\sqrt{3}}{3}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2}{3}$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.
$r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $p\times q\times r=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}$ 이다.

6.
두 점 A, B를 모두 지나는 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 직선 AB 는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ -4)$ 이므로 기울기가
$\frac{-4}{2}=-2$ 이다.
한편, x절편이 5 이므로 방정식을 세울 수 있다.
=> $y=-2x+10$
이때, 이차함수 $f(x)$ 의 그래프가 두 점 A, B 를 모두 지나므로 인수정리를 통해 실수 k에 대하여
$f(x)-(-2x+10)=(x-k)(x-k-2)$ 라 할 수 있다.
함숫값 $f(-2)=(k+4)(k+2)+14$ 에서 k는 실수이므로
$k=-3$ 일 때, 최솟값 13 을 갖는다.

7.



위 그림에서 점 B의 좌표는 $\left(2-\frac{k}{2},\ k+1\right)$이다.

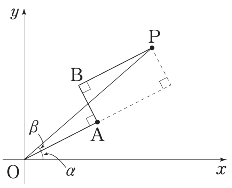
선분 AB의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 OAM, PBM은 서로 합동이고, 점 M의 좌표는 $\left(2-\frac{k}{4},\ k+\frac{1}{2}\right)$이다.

이 점이 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 위의 점이므로

$3\left(k+\frac{1}{2}\right)=4\left(2-\frac{k}{4}\right)$,

따라서 $k=\frac{13}{8}$이다.

참고)



$\tan\alpha=\frac{k}{2}$, $\tan\beta=\frac{1}{4}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}$ 이므로

삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 있다.

8.

벡터 $\vec{a}$를 원점에 대한 위치벡터로 나타내면 $(4,\ 3)$이고, 벡터 $\vec{b}$를 원점에 대한 위치벡터로 나타내면 $(-2,\ -1)$이므로

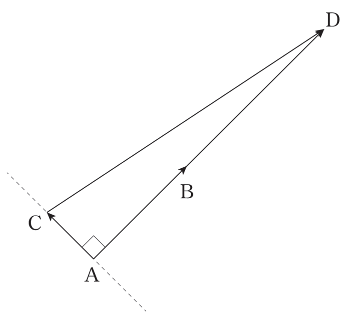
두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 각각 $\overrightarrow{AB}=(2,\ 2)$, $\overrightarrow{CD}=(6,\ 4)$이다.

네 점 A, B, C, D에 대하여 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(\angle BAC=\frac{\pi}{2})$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$와 $\overrightarrow{AC}$는 수직이고, 어떤 실수 k에 대하여 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AB}$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$는 서로 평행하다.

이를 통해 네 점에 대한 위치를 평면에 나타내 보면 다음과 같다.



이때, $|\overrightarrow{BD}|^2$을 구하기 위하여 직각삼각형 CAD를 이용하자. $\overrightarrow{CD}$의 크기는 $\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}$이고

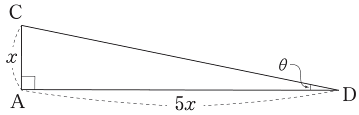
벡터 $\overrightarrow{AB}$에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{1}=1$,

벡터 $\overrightarrow{CD}$에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이므로

$\angle CDA=\theta$라 할 때, $\tan\theta=\dfrac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$ 이다.

그러므로 $\overline{AC}=x$라 하면, $\overline{CD}=5x$이다.

참고) 덧셈정리를 이용하지 않고, 평면벡터의 내적을 통해 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.



$\overrightarrow{CD}$의 크기가 $\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}$이므로 피타고라스 정리를 이용하면

$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2=x^2+(5x)^2=26x^2$

$\Leftrightarrow\ x=\sqrt{2}$이다.

점 A의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, 점 B의 좌표는 $(p+2,\ q+2)$, C의 좌표는 $(p-1,\ q+1)$이고,

$\overrightarrow{CD}=(6,\ 4)$이므로 D의 좌표는 $(p+5,\ q+5)$이다. 즉, $\overrightarrow{BD}=(3,\ 3)$이다.

$\therefore\ |\overrightarrow{BD}|=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

삼각형 CBD에서 밑변의 길이가 $\overline{BD}$, 높이가 $\overline{AC}$이므로 답은 $\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\sqrt{2}=3$이다.

다른 풀이)

점 A의 좌표를 원점 O로 설정하자. => A(=O)라 하면 C의 좌표를 $(-a,\ a)$라 할 수 있다.

$\overrightarrow{CD}=(6,\ 4)$이므로 D의 좌표는 $(6-a,\ 4+a)$이고,

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$6-a=4+a\ \Leftrightarrow\ a=1$이다.

이하 생략..

9.

세 구 O_1, O_2, O_3의 중심을 각각 A, B, C라 하고

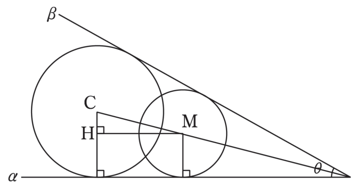
세 구에 모두 접하는 두 평면을 각각 α,β라 하자.

$A(0,0,0)$, $B(2,2\sqrt{3},0)$, $C(4,0,3)$에서 $\overline{AB}=2+2$, $\overline{BC}=2+3$, $\overline{CA}=3+2$이므로

세 구 O_1, O_2, O_3은 서로 외접한다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면, $M(1,\ \sqrt{3},0)$이다.

두 평면 α,β에 수직이고 두 점 C, M을 지나는 단면을 나타내면 다음 그림과 같다.

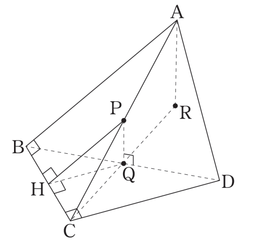


이 때 $\angle CMH=\frac{\theta}{2}$, $\overline{CM}=\sqrt{21}$, $\overline{CH}=1$에서

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{21}}$이므로 덧셈정리에 의해서

$\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{19}{21}$이다.

10.



문제의 조건에 의하여 직선 PQ는 평면 BCD에 수직이다.

점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직선 QH는 직선 BC와 수직이다.

따라서 삼수선의 정리에 의하여 직선 PH는 직선 BC와 수직이다.

이때, 점 Q는 선분 BD의 중점이고, 선분 HQ와 선분 CD가 서로 평행하므로 점 H는 선분 BC의 중점이다.

마찬가지로 삼각형 ABC에서 점 P는 선분 AC의 중점이다.

한편, 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 R라 하면, 점 Q는 선분 CR의 중점이며, 직선 PQ와 직선 AR은 서로 평행하므로 $\angle PQA=\angle QAR$이다. ($\because$ 엇각)

또한, 사각형 RBCD는 직사각형이다.

따라서 $\mathrm{tna}(\angle PQA)=\mathrm{tna}(\angle QAR)=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{AR}}$이며,

$\overline{QR}=\frac{1}{2}\overline{CR}=\frac{1}{2}\overline{BD}=4$,

$\overline{AR}=2\overline{PQ}=2\times\sqrt{\overline{PC}^2-\overline{CQ}^2}=2\times\sqrt{25-16}=6$

이므로 $\tan(\angle PQA)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ 이다.

11.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$\overline{AH}=\sin\theta$, $\overline{BH}=\cos\theta$이다. 따라서

$\overline{BC}=2\cos\theta$이고, $\overline{BD}=2\cos\theta-1$이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}(2\cos\theta-1)\sin\theta$이다.

한편, 점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H'이라 하면, $\overline{AH'}=\sin\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{AD}=2\sin\frac{\theta}{2}$ 이다.

삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DA})\times r(\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(1+(2\cos\theta-1)+2\sin\frac{\theta}{2}\right)\times r(\theta)$

$=\left(\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)\times r(\theta)$ 이다.

그러므로

$\frac{1}{2}(2\cos\theta-1)\sin\theta=\left(\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)\times r(\theta)$ 에서

$r(\theta)=\dfrac{(2\cos\theta-1)\sin\theta}{2\left(\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{3}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}\frac{(2\cos\theta-1)\sin\theta}{2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\left(\cos\theta+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}\frac{(2\cos\theta-1)}{\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$ ⋯㉠ 이고,

$\frac{\pi}{3}-\theta=t$라 하면,

㉠ $\displaystyle=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{t\to0+}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)-1}{t}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{3}}{4}\lim_{t\to0+}\frac{\cos t+\sqrt{3}\sin t-1}{t}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\lim_{t\to0+}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,\sin t}{t} - \dfrac{1-\cos t}{t}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}+0) = \dfrac{3}{4}$ 이다.

따라서 $k=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $60k=45$ 이다.

12.
부분적분법을 이용하면

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = \left[\frac{x^2f(x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2f'(x)}{2}dx$

이다.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2f'(x)}{2}dx = \int_0^1 \frac{x^2e^{ax^3}}{2}dx$ 이고, $ax^3=t$

로 치환하면 $3ax^2 = \dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2e^{ax^3}}{2}dx = \frac{1}{6a}\int_0^a e^t dt = \frac{1}{6a}(e^a-1)$ 이다.

따라서

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx = \left[\frac{x^2f(x)}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2f'(x)}{2}dx$

$= \dfrac{3}{2a} - \dfrac{1}{6a}(e^a-1) = -\dfrac{3}{2a}$

이고, 정리하면 $3=\dfrac{1}{6}(e^a-1) \Leftrightarrow e^a=19$

이다. 그러므로 $f'(1)=e^a=19$ 이다.

13.
위 예시에 적힌 숫자들을 오른쪽으로 갈수록 숫자가 크거나 같도록 나열하면
$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5$ 이다.
1 이 쓰인 횟수를 a, 2가 쓰인 횟수를 b, 3이 쓰인 횟수를 c, 4가 쓰인 횟수를 d, 5가 쓰인 횟수를 e라 하면 $a+b+c+d+e=10$이다.
$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 는 모두 1이상의 자연수이므로
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1,$
$e=e'+1$이라 하면 $a'+b'+c'+d'+e'=5$이고, 이는 중복조합의 수 ${}_5\mathrm{H}_5=126$과 같다. 이때 (다) 조건에 의하여 같은 숫자가 6번 이상 오면 안 되므로
$(a',\ b',\ c',\ d',\ e')$의 순서쌍 $(5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$,
$(0,\ 5,\ 0,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 5,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 0,\ 5,\ 0)$,
$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 5)$인 경우를 제외하면 $126-5=121$이다.

14.
각 조에는 여자와 남자가 각각 1명 이상이므로 여자 4명을 먼저 3개의 조로 나누면 (2명, 1명, 1명)의 조로 나눌 수 있고, 이 경우로 나누는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이다.
(* (2명, 1명, 1명)을 $(2,\ 1,\ 1)$이라고 표기하자.)
남자 5명을 3개의 조로 나누는 방법은
$(2,\ 2,\ 1)$ 또는 $(3,\ 1,\ 1)$이 가능한데
$(2,\ 2,\ 1)$로 나누는 경우의 수는

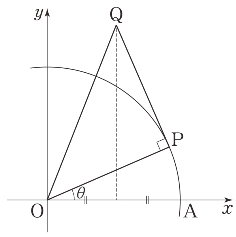
${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2}=15$ 이고,

$(3,\ 1,\ 1)$로 나누는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3=10$이다.
이제 나눠진 여자 3조와 남자 3조를 합치면 되는데, 여자 2명이 있는 조와 남자 3명이 있는 조가 같은 조가 되면, 이 조는 5명이 되므로 이 경우를 제외시켜야 한다.
여자 2명이 있는 조를 A조, 어떤 여자 1명이 있는 조를 B조, 남은 여자 1명이 있는 조를 C조라 하면, 남자를 $(2,\ 2,\ 1)$로 나눈 경우는 조를 합칠 수 있는 경우의 수가 6가지이고,
남자를 $(3,\ 1,\ 1)$로 나눈 경우는 조를 합칠 수 있는 경우의 수가 4가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는
$6\times(15\times6+10\times4)=780$이다.

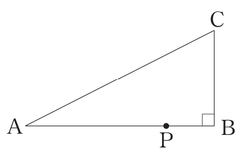
15.
점 P가 나타내는 곡선 C는 포물선이다. 이때, 준선의 방정식은 $x=k$, 초점은 $\mathrm{F}(6,\ 0)$이다.
점 P의 x좌표의 최솟값이 4이므로 포물선 C의 꼭짓점은 점 $(4,\ 0)$이다. 이 포물선의 방정식은 $y^2=8(x-4)$이다. 점 $(a,\ 6)$은 포물선 위의 점이므로 $36=8(a-4) \Leftrightarrow a=\dfrac{17}{2}$이다.
한편 준선의 방정식은 $x=2$이므로 $k=2$이다.
따라서 $ak=17$이다.

16.
아래 그림과 같이 세 점 P, Q, A의 위치는 다음과 같다.

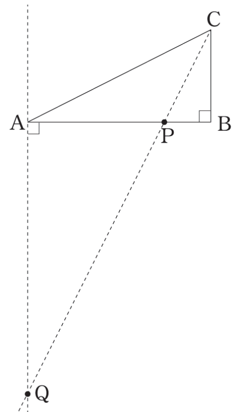


점 Q에서 선분 OA에 내린 수선의 발은 선분 OA의 길이를 이등분한다. 선분 OA의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\tan(\angle\mathrm{QOA})=\sqrt{7}$이다.
$\angle\mathrm{QOA}-\angle\mathrm{QOP}=\theta$, $\tan(\angle\mathrm{QOP})=1$이므로
삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\tan\theta=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$이다.
따라서 답은 50이다.

17.
주어진 조건을 통해 삼각형 ABC와 점 P를 평면에 나타내면 그림과 같다.



어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$이므로 세 점 C, P, Q는 한 직선 위에 있다.
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$이므로 점 Q의 위치는 점 A를 지나고, 직선 AP에 수직인 직선 위에 있다. 이를 평면에 나타내면 그림과 같다.



두 삼각형 PBC와 PAQ는 길이의 비가 $1:3$인 닮음인 삼각형이고, $\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=6$이다. $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2$의 값은 선분 BQ의 길이의 제곱과 같으므로 삼각형 ABQ에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2=4^2+6^2=52$이다.

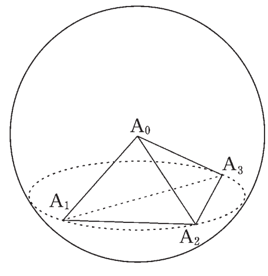
18. [2014년 Epsilon 3회 29번]
1. 점들의 대략적인 위치를 파악하자.
① 세 점 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3$가 점 A_0과 같은 거리에 있으므로 세 점 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3$은 중심이 A_0이고, 반지름이 r인 구 O 위에 있다고 할 수 있다.
② 구 O가 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$을 포함하는 평면에 의해 잘린 단면을 원 C라 하자.
원 C는 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$의 외접원이 된다.
③ (가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$가 서로 수직이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$은 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$을 빗변으로 하는 직각삼각형이 되고, 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$은 원 C의 지름이 된다.
④ (나)에서
$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}-\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{3-k}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{3-k}\mathrm{A}_3}$ 이므로
$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{3-k}\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{3-k}{3}\pi$ 이다.

$k=1$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{2}{3}\pi=-2$

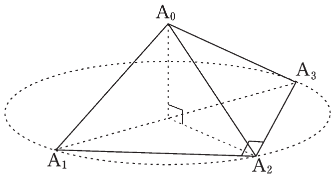
$k=2$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}=4\cos\dfrac{1}{3}\pi=2$

$k=3$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|^2=4$

⑤ $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|^2=4$에서 $\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|=2$이므로
$\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right|=r=2$
①~⑤를 종합하면 네 점 $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3$과 구 O, 원 C의 위치관계는 다음 그림과 같다.



2. 구체적인 위치를 파악하자.
① $\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=-2$, $\overrightarrow{A_0A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=2$에서
내적으로 주어진 각각의 두 벡터가 서로 꼬인 위치에 있으므로 단순하게 위치관계를 파악하기에는 어려움이 있다. 따라서 주어진 내적을 활용하기 편리하도록 적당히 변형한다.
② 선분 A_1A_3은 원 C의 지름이므로 선분 A_1A_3의 중점을 M이라 하면 점 M은 원 C의 중심이 된다. 따라서 벡터 $\overrightarrow{A_0M}$과 원 C는 서로 수직이다.

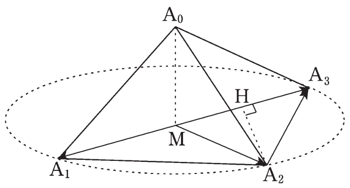


③ 이제 벡터 $\overrightarrow{A_0M}$과 원 C가 서로 수직이라는 조건을 활용하기위해 $\overrightarrow{A_0A_k}=\overrightarrow{A_0M}+\overrightarrow{MA_k}$ 형태로 변형하면

$$\overrightarrow{A_0A_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=\left(\overrightarrow{A_0M}+\overrightarrow{MA_1}\right)\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=-2$$

$$\overrightarrow{A_0A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\left(\overrightarrow{A_0M}+\overrightarrow{MA_2}\right)\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{MA_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=2$$

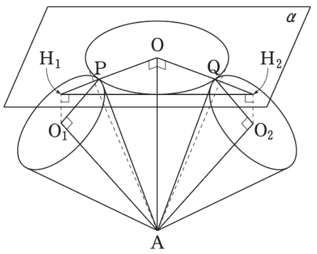
$\left(\because\ \overrightarrow{A_0M}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=0,\ \overrightarrow{A_0M}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=0\right)$
④ $\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=-2$, $\overrightarrow{MA_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=2$에서
두 벡터 $\overrightarrow{MA_1}$과 $\overrightarrow{A_2A_3}$이 이루는 각은 90° 보다 커야하고,
두 벡터 $\overrightarrow{MA_2}$과 $\overrightarrow{A_1A_3}$이 이루는 각은 90° 보다 작아야한다.
따라서 점 A_2는 점 A_1보다 점 A_3에 더 가까이 위치해야하므로 $\overline{A_1A_2}>\overline{A_2A_3}$이다.
⑤ 점 A_2에서 선분 A_1A_3에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 C의 반지름의 길이를 r'이라 하자.
$\overline{MH}=a$, $\overline{HA_3}=b$ 라 하면 $a+b=r'$이 성립한다.



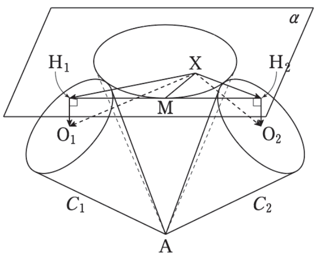
⑥ 두 벡터의 내적을 정사영 관점에서 해석하면
$\overrightarrow{MA_1}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}=-\overline{MA_1}\times\overline{HA_3}=-r'\times b=-2$
$\overrightarrow{MA_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\overline{MH}\times\overline{A_1A_3}=a\times 2r'=2$
이므로 $r'a=1$, $r'b=2$이다. 이 두 식을 더하면
$r'(a+b)=3\Rightarrow(r')^2=3$이므로 $\therefore r'=\sqrt{3}$

3. 이제 구하고자 하는 값을 구하자.
① 사면체 $A_0A_1A_2A_3$의 부피는
$V=\dfrac{1}{3}\times\triangle A_1A_2A_3\times\overline{A_0M}$이다.
② $\triangle A_1A_2A_3=\dfrac{1}{2}\times\overline{A_1A_2}\times\overline{A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\times\overline{A_1A_3}\times\overline{A_2H}$
에서 $\overline{A_2H}=\sqrt{\overline{MA_2}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{3-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이므로
$\triangle A_1A_2A_3=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$이다.
③ $\overline{A_0M}=\sqrt{\overline{A_0A_1}^2-\overline{A_1M}^2}=1$이므로
$\therefore\ V=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times 1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
그러므로 $9V^2=8$이다.

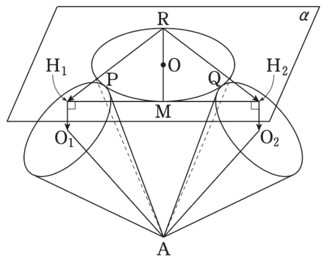
19. [2015년 Epsilon 3회 29번]
먼저 주어진 조건을 활용하여 문제를 해결하는데 필요한 위치관계를 파악해보자.



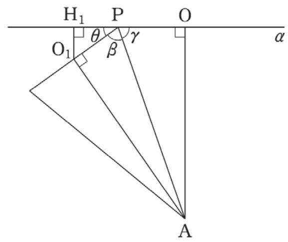
C_1의 밑면과 C_2의 밑면이 C의 밑면에 접하는 점을 각각 P, Q라 할 때
원뿔 C의 밑면의 중심을 O라 하면 (나) 조건에서 두 원뿔 C_1, C_2가 원뿔 C에 외접한다고 하였으므로
네 점 O, P, O_1, A가 한 평면 위에 있고,. 네 점 O, Q, O_2, A가 한 평면 위에 있음을 알 수 있다.
또한, 점 O_1에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H_1, 점 O_2에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H_2라 하면
두 점 H_1과 H_2도 각각 평면 OPA와 OQA 위에 있다는 것을 알 수 있다.
이때, 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면이 C의 밑면과 한 점에서 만나므로
선분 H_1H_2와 C의 밑면이 접하고, $\overline{OH_1}=\overline{OH_2}$이므로 선분 H_1H_2의 중점이 접점이다.
구하려는 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{XO_1}$, $\overrightarrow{XO_2}$가 점 X의 위치에 따라 길이와 각의 크기가 동시에 변하므로 파악하는 것이 쉽지 않기 때문에 다음과 같이 길이를 고정 할 수 있는 방식으로 벡터를 분해하자.
$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}=\left(\overrightarrow{XH_1}+\overrightarrow{H_1O_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XH_2}+\overrightarrow{H_2O_2}\right)$
$=\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}+\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}$
$\left(\because\ \overrightarrow{XH_1}\perp\overrightarrow{H_2O_2},\ \overrightarrow{XH_2}\perp\overrightarrow{H_1O_1}\right)$



여기서 $\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}$의 값은 $\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$으로 고정된 값이기 때문에
$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은 $\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}$에 의해 결정된다.
선분 H_1H_2의 중점을 M이라 하면 $\overline{XM}\perp\overline{H_1H_2}$이고, $\overrightarrow{MH_1}=-\overrightarrow{MH_2}$이므로
$\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}=\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MH_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MH_2}\right)$
$=\left|\overrightarrow{XM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2$
이다.
따라서 $\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2$의 값도 고정된 값이므로 $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2$의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값이 최대이다.



이를 통해, 선분 XM이 원뿔 C의 밑면의 지름일 때 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값이 최대임을 알 수 있다.
이때의 점 X를 점 R라 하면 $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2$의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{RM}\right|^2=6^2=36$이다.
따라서 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은
$36-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$이므로 이를 계산해보자.



(가), (다) 조건에 의해 $\overline{OP}=3$, $\overline{OA}=6\sqrt{2}$, $\overline{PO_1}=\sqrt{6}$이므로
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{OP}^2+\overline{OA}^2}=\sqrt{9+72}=9$,
$\overline{O_1A}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{PO_1}^2}=\sqrt{81-6}=5\sqrt{3}$이다.
$\angle O_1PH_1=\theta$라 하면 $\overline{H_1O_1}=\overline{PO_1}\sin\theta$이고,
$\angle APO_1=\beta$, $\angle APO=\gamma$라 하면
$\theta=\pi-(\beta+\gamma)$이므로
$\sin\theta=\sin(\beta+\gamma)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\times\dfrac{3}{9}+\dfrac{\sqrt{6}}{9}\times\dfrac{6\sqrt{2}}{9}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
이다.
따라서 $\overline{H_1O_1}=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$, $\overline{PH_1}=2$이다.
또한, $\overline{OH_1}=\overline{OP}+\overline{PH_1}=3+2=5$이므로
$\overline{MH_1}=\sqrt{\overline{OH_1}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{25-9}=4$이다.
그러므로 구하려는 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은
$36-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2=36-16+2=22$이다.

다른 풀이)
점 O를 원점, 직선 OM을 x축, 선분 H_1H_2에 평행하고 점 O를 지나는 직선을 y축,
직선 AO를 z축으로 잡으면,
세 점 X, O_1, O_2의 좌표를 각각
$X(x,\ y,\ 0)\ (x^2+y^2\le 9)$, $O_1(3,\ -4,\ -\sqrt{2})$, $O_2(3,\ 4,\ -\sqrt{2})$라고 할 수 있다.
이때 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값을 계산해보면
$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$
$=\left(3-x,\ -4-y,\ -\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-x,\ 4-y,\ -\sqrt{2}\right)$
$=(x-3)^2+y^2-14$이다.
여기서 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값이 최대가 되려면
$x^2+y^2\le 9$를 만족하는 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $(x-3)^2+y^2$의 값이 최대가 되어야 한다.