제 2 교시

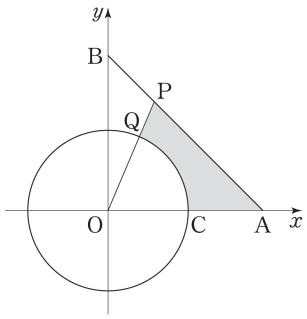
수학 영역 (가형)

홀수형

5지선다형

1. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$가 있다. 선분 AB 위의 점 P의 x좌표를 t라 할 때, 선분 OP가 원 C와 만나는 점을 Q라 하자. 점 $C(1, 0)$에 대하여 세 선분 AP, PQ, AC와 호 CQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(1)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$



2. 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2) \le f(x) \le f(0)$
(나) $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)-1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(2)+1$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
ㄴ. 함수 $f'(x)$의 최솟값이 -2이면 $f(2)>f(0)-4$이다.
ㄷ. 방정식 $f''(x)=0$은 적어도 세 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수

$$f(x)=x+e^{-x}\int_0^1 e^t\{f'(t)+1\}\,dt$$

의 최솟값은?

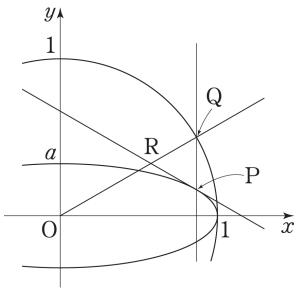
① $\ln(e-2)-1$ ② $\ln(e-2)+\frac{1}{2}$ ③ $\ln(e-2)+1$
④ $\ln(e-1)+1$ ⑤ $\ln(e-1)+2$

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $g(t)$ $(0\le g(t)<\pi)$ 라 하자.

$\int_{-1}^{\sqrt{3}} t\cos g(t)\,dt$ 의 값은? (단, $g(0)=0$ 이다.)

① $\ln 2$ ② $\frac{3}{2}\ln 2$ ③ $2\ln 2$ ④ $\frac{5}{2}\ln 2$ ⑤ $3\ln 2$

5. 그림과 같이 $0<a<1$인 상수 a에 대하여 타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 Q라 하자. 원점 O에 대하여 타원 위의 점 P에서의 접선과 직선 OQ의 교점을 R라 할 때, 삼각형 PQR는 정삼각형이다. 다음은 점 R의 좌표를 구하는 과정이다.
(단, 두 점 P, Q는 모두 제1사분면에 있다.)



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 상수 θ에 대하여 점 P의 좌표를 $P(\cos\theta,\ a\sin\theta)$라 하면 점 Q의 좌표는

$Q(\cos\theta,\ \boxed{\text{(가)}})$

이다. 삼각형 PQR는 정삼각형이므로 직선 OQ의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$$

이다. 타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$(\cos\theta)x+\frac{\sin\theta}{a}y=1$$

이고, 이 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$a=\boxed{\text{(나)}}$

이다. 직선 OQ의 방정식과 타원 위의 점 P에서의 접선의 방정식을 연립하여 점 R의 좌표를 구하면

$$R\left(\boxed{\text{(다)}},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\times\boxed{\text{(다)}}\right)$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{18}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있다. 좌표평면에서 두 점 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AB}=(2,\ -4)$이고, 곡선 $y=f(x)$는 두 점 A, B를 모두 지난다.
(나) 직선 AB의 x절편은 5이다.

$f(-2)$의 최솟값은?

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

7. 좌표평면에서 점 $\mathrm{A}(2,\ k)\ (k>0)$에 대하여 두 점 B와 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$, $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{AB}}$
(나) 점 B의 y좌표는 k보다 크다.
(다) 직선 OP의 기울기는 $\frac{4}{3}$이다.

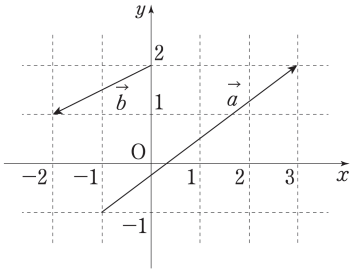
상수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{11}{8}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{13}{8}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

8. 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 그림과 같을 때, 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{a}-\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

이다. 어떤 실수 k에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때, 삼각형 BDC의 넓이는? (단, $k>0$)



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

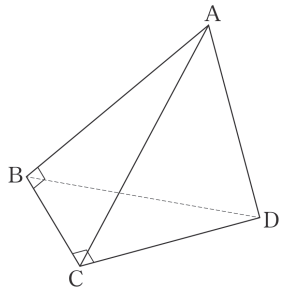
9. 좌표공간의 세 구

$$O_1 : x^2+y^2+z^2=4$$
$$O_2 : (x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2+z^2=4$$
$$O_3 : (x-4)^2+y^2+(z-3)^2=9$$

에 모두 접하는 두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{13}{21}$ ③ $\frac{15}{21}$ ④ $\frac{17}{21}$ ⑤ $\frac{19}{21}$

10. 그림과 같이 $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AC}=10$, $\overline{BD}=8$인 사면체 ABCD가 있다. 선분 AC 위의 점 P의 평면 BCD 위로의 정사영을 Q라 하자. 점 Q가 선분 BD의 중점일 때, $\tan(\angle PQA)$의 값은?



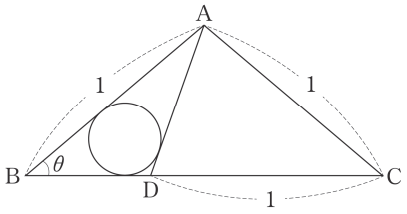
① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

단답형

11. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$, $\angle ABC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 D를 $\overline{CD}=1$이 되도록 잡는다. 삼각형 ABD의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{3}-\theta}=k$$

이다. $60k$의 값을 구하시오.



12. 0이 아닌 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수가

$$f'(x)=e^{ax^3}$$

이다.

$$f(1)=\frac{3}{a},\quad \int_0^1 xf(x)dx=-\frac{3}{2a}$$

일 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

13. 1, 2, 3, 4, 5의 숫자를 모두 사용하고 중복을 허락하여 그림과 같이 10개의 칸에 적을 때, 다음 조건을 만족시키면서 숫자를 적는 방법의 수를 구하시오. 예를 들어, 아래 10개의 칸은 다음 조건을 만족시킨다.

	1열	2열	3열	4열	5열
1행	1	1	2	2	3
2행	3	3	4	4	5

(가) 행을 따라 오른쪽으로 가면 숫자가 크거나 같다.
(나) 1행 5열에 적힌 수는 2행 1열에 적힌 수보다 작거나 같다.
(다) 같은 열에는 같은 수를 적지 않는다.

14. 어느 면접에 응시하는 여자 4명과 남자 5명의 응시자를 3개의 조로 나누려고 한다. 다음 조건을 만족시키도록 9명의 응시자를 나누는 경우의 수를 구하시오.

(가) 각 조에는 여자와 남자가 각각 1명 이상이다.
(나) 각 조에는 응시자가 4명 이하이다.

15. 좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(6,\ 0)$에 대하여 좌표평면 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 직선 $x=k$에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 P의 x좌표의 최솟값은 4이고, 곡선 C가 점 $(a,\ 6)$을 지날 때, ak의 값을 구하시오. (단, a, k는 상수이다.)

16. 좌표평면의 원점 O와 두 점

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\quad \mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

에 대하여 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=a+b\sqrt{7}$ 일 때, $30(a-b)$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 이고, a와 b는 유리수이다.)

17. 평면에서 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 이고, 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점을 P라 할 때, 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$
(나) 어떤 실수 t에 대하여 $\overrightarrow{CP}=t\overrightarrow{CQ}$이다.

$|\overrightarrow{BQ}|^2$의 값을 구하시오.

18. 좌표공간에서 점 A_0와 같은 거리에 있는 세 점 A_1, A_2, A_3가 다음 조건을 만족시킨다.

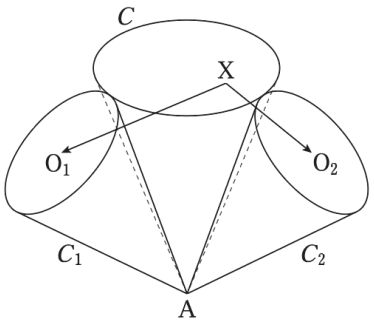
(가) 두 벡터 $\overrightarrow{A_1A_2}$와 $\overrightarrow{A_2A_3}$는 서로 수직이다.
(나) $\overrightarrow{A_0A_k}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_3}-\overrightarrow{A_0A_{3-k}}\right)=4\cos\frac{3-k}{3}\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

사면체 $A_0A_1A_2A_3$의 부피를 V라 할 때, $9V^2$의 값을 구하시오.
(단, 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3은 한 평면 위에 있지 않다.)

19. 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 모선의 길이가 같은 세 원뿔 C, C_1, C_2가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) C의 밑면의 반지름의 길이는 3이고, C_1, C_2의 밑면의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.
(나) C_1, C_2는 모두 C에 외접한다.
(다) C의 높이는 $6\sqrt{2}$이다.

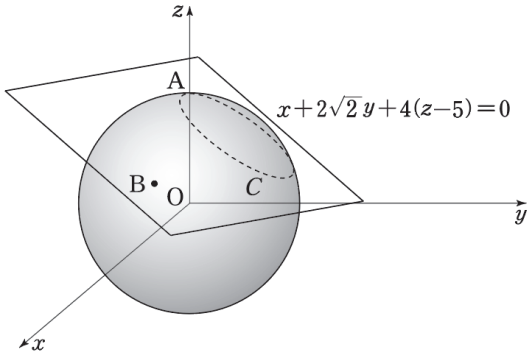
C_1, C_2의 밑면의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자. C의 밑면을 포함하는 평면을 α, C의 밑면 위를 움직이는 점을 X라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면이 C의 밑면과 한 점에서 만날 때, $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값을 구하시오.
(단, 점 A의 C, C_1, C_2의 밑면 위로의 정사영은 각각 C, C_1, C_2의 밑면의 중심과 일치한다.)



20. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=25$와 평면 $x+2\sqrt{2}y+4(z-5)=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 두 점 $A(0,0,5)$, $B(4,-\sqrt{2},1)$에 대하여 원 C 위의 서로 다른 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 PQ와 z축은 서로 수직이다.
(나) 평면 APQ와 평면 BPQ가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다.

삼각형 BPQ의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.