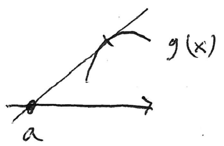
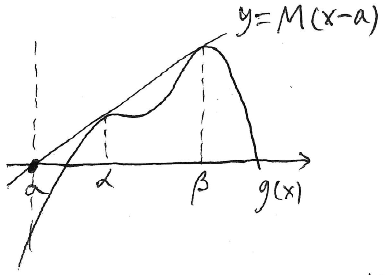
[기출문제] 해설.

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x-a}$: $(a,0)$과 $(x, g(x))$ 사이 기울기.



$f(x)$가 극대가 될 때는 그림과 같이 직선이 $g(x)$에 접할 때.

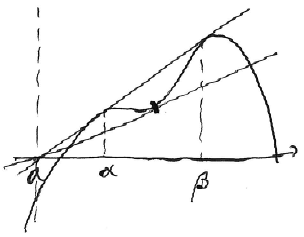
$f(\alpha)=f(\beta)=M$ 에서 세 점 $(a,0)$, $(\alpha, g(\alpha))$, $(\beta, g(\beta))$가 한 직선 위에 있음.



$g(x)$와 직선이 접하는 것을 이용해

$$g(x) - M(x-a) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2,$$

$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + M(x-a).$$



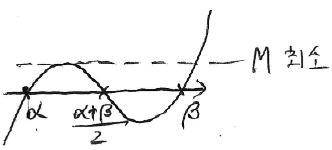
한편 $(a,0)$에서 $y=g(x)$ $(x>a)$에 그을 수 있는 접선은 그림과 같이 하나가 더 있다. $f(x)$가 극대·극소가 되는 x 개수는 3개.

$g(x)$가 극대·극소가 되는 x 개수 < 3 이어야 하므로,

$g'(x)$는 서로 다른 세 실근을 갖지 않음.

$$g'(x) = -2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta) + M \text{ 에서}$$

$y = 2(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)$ 와 $y=M$ 교점 < 3개.



그림과 같이 $y=M$에 접할 때 최소이고,

'세 근이 α, $\alpha+3\sqrt{3}$, $\alpha+6\sqrt{3}$인 삼차함수의 극댓값을 구하라'가 됨. (최고차항은 4)

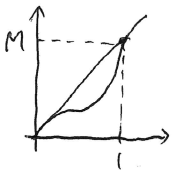
α와 답은 상관이 없으므로, 가장 계산이 쉽게 $-3\sqrt{3}$, 0, $3\sqrt{3}$을 세 근으로 잡는다.

$y = 4(x^3-27x)$, $y' = 4(3x^2-27)$ 에서 $x=-3$일 때 극대, 극댓값 $= \boxed{216}$.

[변형문제] 해설.

(다)에서 $f(1)=M$ 이고, (나)에 대입을 해보면 $f(2)=f(1)=M$, $f(3)=\frac{f(2)}{2}=\frac{M}{2}$ 등이다.

또한, 모든 양의 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 $\lim_{x\to 0+} f(x+1) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}$ 에서 $f(0)=0$, $f'(0)=M$ 이다.



$f(x)$와 직선이 접하는 것을 이용해

$f(x) - Mx = x^2(x-1)$,

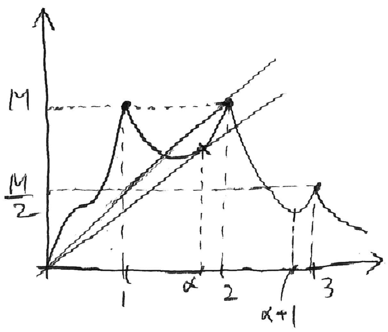
$f(x) = x^2(x-1) + Mx$.

(라)가 성립하려면 $(0, 1)$에서 $f(x)$가 극값을 갖지 않아야 한다.

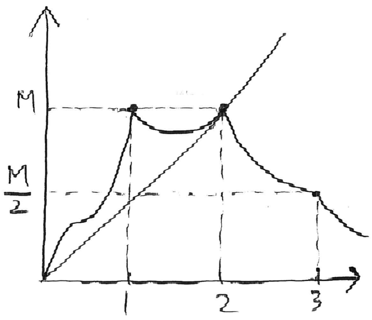
$f'(x) = 3x^2-2x+M$ 에서 $\frac{D}{4} = 1-3M \le 0$, $M \ge \frac{1}{3}$ ··· ㉠

한편 $f(x+1)$은 $(0,0)$과 $(x, f(x))$ 사이 기울기.

$0\le x\le 1$ 일 때를 대입해보면 $f(x+1) = x(x-1)+M$ $(0\le x\le 1)$, $f(x)=(x-1)(x-2)+M$ $(1\le x\le 2)$.



(1)



(2)

직선이 $f(x)$에 접할 때 $f(x+1)$이 극값을 갖는다.

그림 (1) 처럼 구간 $(1, 2)$에서 접선이 존재한다면 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로,

그림 (2) 처럼 구간 $(1, 2)$에 접선을 그을 수 없어야 한다.

M이 최소일 때는 $(0,0)$에서 $y=(x-1)(x-2)+M$ 위의 점 $(2, M)$에 접선을 그을 수 있을 때이다.

$y'=2x-3$ 에서 접선의 기울기가 1 이므로 $M \ge 2$ ··· ㉡

㉠, ㉡ 에서 M의 최솟값은 2이다. $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3-x^2+2x)\,dx + \int_1^2 (x^2-3x+4)\,dx = \frac{11}{4}$. $\boxed{15}$.

- 공통점

① 정점과 동점 사이 '기울기 함수'의 정의.

② '기울기 함수'가 극값을 가질 때는 접할 때.

③ 함수와 직선의 관계를 이용해 '다항함수 − 직선 = 다항함수' 꼴 식 정리.

④ 극값을 가지지 않을 때의 최솟값을 질문. (경계 값)

- 추가점

① 극한값을 이용해 조건 찾기.

② 한 함수 내에서 귀납적으로 정의.

③ 미분불가능점에의 접선.

④ (더러운) 정적분 계산