2019학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열)

[논술고사 시간 : 2시간]

복기/해설 작성자	김 기 대

【 수험생 유의사항 】

1. 본 문항은 공식자료가 아닌 복기자료입니다. 레츠 시립!
2. 난이도 : 올해 모의논술보단 쉽고, 예년보단 어려움
3. 예상 합격컷 : 400점 만점 기준 300점 이상 (과별로 상이합니다.)

서울시립대학교
UNIVERSITY OF SEOUL

[문제 1] (총 100점)
함수 $f(x)$가

$$f(x)=x^4+(6a+2)x^3+(11a^2+10a+1)x^2+(6a^3+14a^2+4a)x+3a^2+5a+1$$

일 때, 다음 물음에 답하시오. (단, a는 상수이다.)

(a) $f(x)=(x^2+Ax+3a^2+5a+1)(x^2+Bx+a)$일 때, A와 B를 a에 대하여 나타내어라. (20점)
(b) $f(x)$의 최솟값을 m_a라 할 때, 집합 $\{a \mid m_a \geq 0\}$를 구하여라. (80점)

[문제 1-(a)] 논술답안

$f(x)=(x^2+Ax+3a^2+5a+1)(x^2+Bx+a)$의 전개식의 x^3, x항의 계수는 각각
$A+B,\ a\times A+(3a^2+5a+1)\times B$ 이다. 문제에서 주어진 $f(x)$의 x^3, x항의 계수와 비교하면
$A+B=6a+2,\ a\times A+(3a^2+5a+1)\times B=6a^3+14a^2+4a$ 이다.
이를 정리하면 $A=4a+2,\ B=2a$임을 알 수 있다.

$1-(a)$ 답안 *point*

딱히 없다. 학생들의 예상점수가 대부분 ○20점인 이유는 바로 이 문제 덕분.

[문제 1-(b)] 논술답안

1-(a)에 의하여, $f(x)=\{x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1\}(x^2+2ax+a)$ 이다.
$g(x)=x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1,\ h(x)=x^2+2ax+a$라 하자.
$g(x)$의 판별식 D_1은 $D_1=(4a+2)^2-4(3a^2+5a+1)=4(a^2-a)$이고
$h(x)$의 판별식 D_2은 $D_2=(2a)^2-4a=4(a^2-a)$ 이므로 $D_1=D_2$이다.
따라서 a의 값에 따른 두 방정식 $\begin{cases} g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{cases}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 항상 서로 같다.

i) $D_1, D_2 \leq 0$일 때 (즉, $0 \leq a \leq 1$일 때)
두 방정식 $\begin{cases} g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{cases}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1개 이하이므로
모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0,\ h(x)\geq 0$ 임을 알 수 있다.

따라서 $0 \leq a \leq 1$이면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)h(x)\geq 0$이므로, m_a 역시 0 이상이다.

ii) $D_1, D_2 > 0$일 때 (즉, $1 < a$ or $a < 0$일 때)

두 방정식 $\begin{cases} g(x)=0 \\ h(x)=0 \end{cases}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2개다. 따라서 $g(x)<0, h(x)<0$인 x가 존재하므로, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=g(x)h(x) \ge 0$ 임을 보장하지 못한다.

하지만 두 부등식 $\begin{cases} g(x)<0 \\ h(x)<0 \end{cases}$ 의 해가 서로 일치하는 경우엔 항상 $f(x) \ge 0$ 이므로 m_a 역시 0 이상이다.

이러한 경우는 $g(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2+(4a+2)x+3a^2+5a+1=x^2+2ax+a$ 에서 $4a+2=2a, 3a^2+5a+1=a$를 동시에 만족시키는 a만 가능하며, 이러한 a값은 -1로 유일하다.

i), ii)에 의하여 $\{a \mid m_a \ge 0\}=\{a \mid a$는 $0 \le a \le 1$인 실수$\} \cup \{-1\}$ 임을 알 수 있다.

[문제 $1-(b)$] 답안 *point*, 접근법

대부분의 학생들이 $\{a \mid m_a \ge 0\}=\{a \mid a$는 $0 \le a \le 1$인 실수$\}$ 로 마무리했을 가능성이 높다.
$a=-1$의 존재를 인식하고, 이를 충분한 설명과 함께 덧붙여줘야 할 것.
(뇌피셜 점수차이 예상:20점)

필자는 1-(b) 문항을 풀 때, 미분을 아예 해보지도 않았다.
Well-made 문제를 출제하는 학교들 (ex. 시립대, 인하대, 한양대) 같은 경우엔, 반드시 소문항간의 유기성이 존재한다는 것을 기출분석을 통해 미리 인지하고 들어갔기 때문에.

[문제 2] (100점)
3개의 당첨제비가 포함된 $2n$개의 제비를 A, B 두 명이 순서대로 번갈아 가면서 하나씩 뽑는다. A부터 뽑기를 시작할 때, A가 B보다 먼저 당첨제비를 뽑을 확률을 구하여라. (단, n은 1보다 큰 자연수이다.)

[문제 2] 논술답안

k를 1이상 n 이하의 자연수라 하자. A부터 시작하므로, A는 항상 홀수 번째 차례에 제비를 뽑는다. A가 $(2k-1)$번째 차례에 처음으로 당첨제비를 뽑을 확률을 p_k라 하자.

첫 번째 차례부터 $(2k-2)$ 번째 차례까지 A, B는 당첨제비를 뽑지 않을 확률은 $\dfrac{{}_{2n-3}\mathrm{C}_{2k-2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-2}}$이고, A가

$(2k-1)$번째 차례에 당첨제비를 뽑을 확률은 $\dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{{}_{2n-2k+2}\mathrm{C}_{1}}$이므로

$p_k = \dfrac{{}_{2n-3}\mathrm{C}_{2k-2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-2}} \times \dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{{}_{2n-2k+2}\mathrm{C}_{1}}$이다.

따라서 구하려는 정답은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{{}_{2n-3}\mathrm{C}_{2k-2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-2}} \times \frac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{{}_{2n-2k+2}\mathrm{C}_{1}}\right)$ ⋯ ①이다.

$\dfrac{{}_{2n-3}\mathrm{C}_{2k-2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-2}} = \dfrac{\dfrac{(2n-3)!}{(2n-2k-1)!(2k-2)!}}{\dfrac{(2n)!}{(2n-2k+2)!(2k-2)!}} = \dfrac{(2n-2k)(2n-2k+1)(2n-2k+2)}{2n(2n-1)(2n-2)}$, $\dfrac{{}_{3}\mathrm{C}_{1}}{{}_{2n-2k+2}\mathrm{C}_{1}} = \dfrac{3}{2n-2k+2}$ 를

①에 대입하면

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} p_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2} \times \frac{(n-k)(2n-2k+1)}{n(n-1)(2n-1)}\right) \\
&= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \sum_{k=1}^{n}(n-k)(2n-2k+1) \\
&= \frac{3}{2n(n-1)(2n-1)} \sum_{k=1}^{n}(n-k)(2n-2k+1) \\
&= \text{ 계산 좀 생략하겠습니다 희희} \\
&= \frac{4n+1}{8n-4}
\end{aligned}
$$

따라서 A가 B보다 먼저 당첨제비를 뽑을 확률은 $\dfrac{4n+1}{8n-4}$이다. (단, n은 1보다 큰 자연수)

[문제 2] 답안 *point*

조합기호를 쓰기 전에 충분한 상황설명을 해주자. 암산이 가능하더라도 맨 처음 표기는 모양 그대로를 유지하여 써주면 채점하는 입장에서 매우 편할 것이고, 호감을 얻는 답안이 될 것이다. (상식적으로)

[문제 3] (100점)

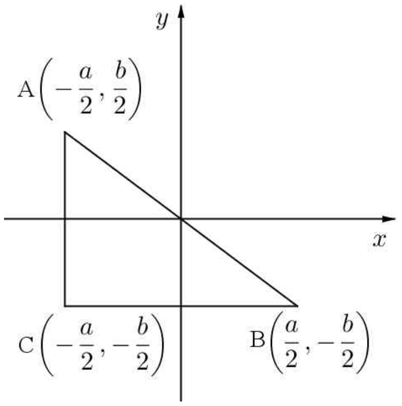
좌표공간에 있는 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{ACB} = \frac{\pi}{2}$	(나) $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}} = 5$, $\overline{\mathrm{CD}} = 4$

평면 ABC의 법선벡터와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각을 θ, $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{CA}} = b$라 할 때, $\cos^2\theta$를 a, b로 표현하여라.

<u>[문제 3] 논술답안</u>

$\angle \mathrm{ACB} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{CA}} = b$이므로 세 점 A, B, C의 좌표를 [그림 1]과 같이 잡을 수 있다.



[그림 1]

cf. 세 점 A, B, C는 xy평면 위에 있도록 좌표를 잡았으므로 각 점의 z좌표는 모두 0이고, 선분 AB의 중점이 원점이 되도록 잡았다.

점 D의 좌표를 (x, y, z)라 하자. $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}} = 5$ 이므로 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 + z^2 = 25$. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{b}{2}\right)^2 + z^2 = 25$이고,

이 두 식을 빼면 $ax = by$임을 알 수 있다.

따라서 점 D의 좌표는 $\left(x, \frac{a}{b}x, z\right)$ 이다.

또한 $\overline{\mathrm{AD}} = 5$, $\overline{\mathrm{CD}} = 4$ 이므로 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}x - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 = 25$. $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}x + \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 = 16$이고, 이 두 식을 빼면 $-2ax = 9$, $x = -\frac{9}{2a}$임을 알 수 있다. 따라서 $z^2 = 16 - \left(\frac{a}{2} - \frac{9}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{9}{2b}\right)^2 \cdots$ ① 임을 알 수 있다.

점 D를 xy평면에 내린 점 D의 수선의 발을 H라 하면, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$는 평면 ABC의 법선벡터이다.

따라서 평면 ABC의 법선벡터와 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$가 이루는 각 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2} = \frac{z^2}{16}$ 이고,

①을 이 식에 대입하면 $\cos^2\theta = \frac{1}{16}\left\{16 - \left(\frac{a}{2} - \frac{9}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - \frac{9}{2b}\right)^2\right\}$ 임을 알 수 있다.

[문제 3] 답안 *point*

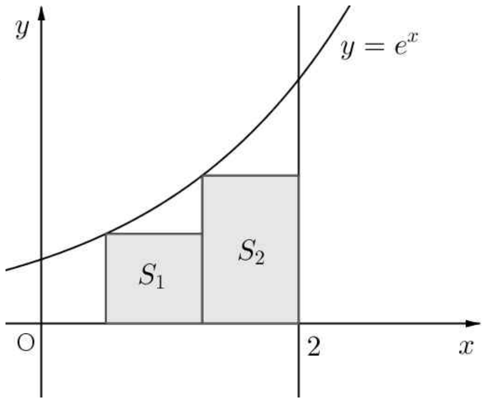
시립대는 최근 5년간 모든 공간도형 문제를 좌표를 이용한 풀이로 해설하였다.

필자는 수능 공간도형 문제에서 좌표를 쓰는 것을 극도로 싫어하고 증오하지만, 시립대학교 문제이기 때문에 학교의 스타일에 맞춰 답안을 작성한 것이다.

<u>**이것이 바로 학교별 논술기출분석이 필요한 이유이다.**</u>

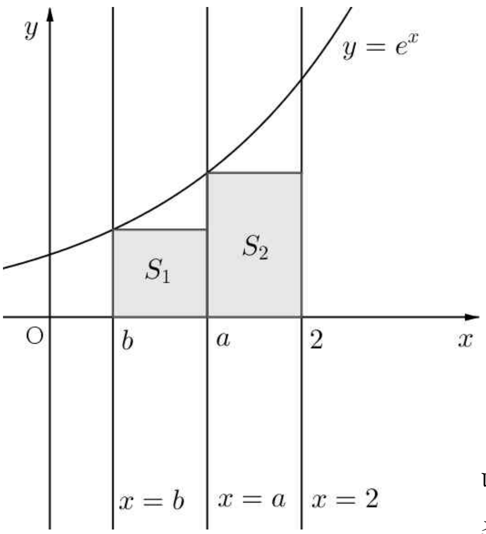
[문제 4] (100점)

다음 그림과 같이 곡선 $y=e^x$과 세 직선 $x=0$, $x=2$, $y=0$으로 둘러 싸인 영역에 두 개의 직사각형을 내접하게 그린다. 두 직사각형의 모서리들이 모두 x축과 y축에 평행할 때, 두 직사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최댓값을 구하여라.



[문제 4] 논술답안

두 직사각형이 공유하는 모서리를 포함하는 직선을 $x=a$라 하고, $x=a$ 기준으로 왼쪽 직사각형의 왼쪽 모서리를 포함하는 직선을 $x=b$ 라 하자. ([그림 1] 참고)



[그림 1]

a가 고정된 값일 때, S_1이 최대가 되도록 하는 b값을 a에 대하여 표현해보자. (단, $0<b<a$)

$S_1(b)=(a-b)e^b$이므로, $S_1'(b)=(a-1-b)e^b$에서 $b=a-1$일 때 $S_1(b)$는 극대이자 최대임을 알 수 있다.

따라서 $S_1(b)$의 최댓값은 e^{a-1} 이다.

한편, a가 고정된 값이면 S_2의 값은 $(2-a)e^a$으로 고정이다.

따라서 함수 $f(a)=e^{a-1}+(2-a)e^a$ (단, $0<a<2$) 에 대하여 $f(a)$의 최댓값을 구하면 S_1+S_2의 최댓값 역시 구할 수 있다.

$f'(a)=e^{a-1}-e^a+(2-a)e^a=e^{a-1}(1+e-ae)$이므로 $a=\dfrac{e+1}{e}$에서 $f(a)$는 극대이자 최대임을 알 수 있다.

따라서 S_1+S_2의 최댓값은 $f\left(\dfrac{e+1}{e}\right)=e^{1+\frac{1}{e}}$임을 알 수 있다.

[문제 4] 답안 *point*

변수를 두 개를 잡아야 해서 까다로웠을 것. 하지만 한 변수를 상수화 시킨 후 접근한다면 올해 시립대 문제 중 제일 쉬운 문항으로 생각되지 않았을까 조심스럽게 예상한다.