제 2 교시

수학 영역(나 형)

5지선다형

1. $2^{-1}\times 16^{\frac{3}{4}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

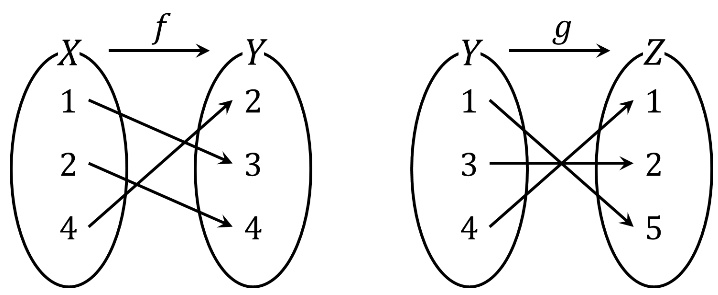
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n^2+5}{4n^3+8n^2+4}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 두 집합 $A=\{a, b\}$, $B=\{2, a+1\}$가 $A=B$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

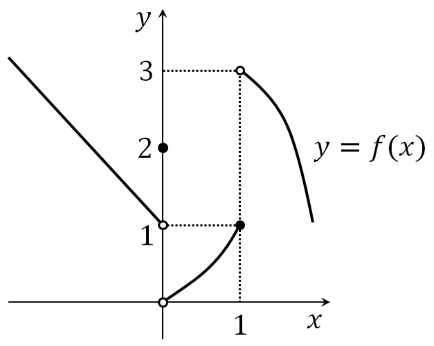
4. 그림은 두 함수 $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$를 나타낸 것이다.



$(f\circ g)(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 자연수 14를 세 개의 짝수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

7. 실수 x에 대한 두 조건

$p : (x-2)(x-9) \le 0$

$q : a \le x \le 2a$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 자연수 a의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8. 함수 $f(x)=-\sqrt{7x-5}+a$가 닫힌 구간 $[2, 3]$에서 최댓값 $-a$를 가질 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A|B)=4\mathrm{P}(A\cap B),\quad \mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

10. 어느 고등학교 학생 300명을 대상으로 강아지와 새를 기르는 것에 대한 희망 여부를 조사한 결과는 다음과 같다.

(단위: 명)

강아지 \ 새	희망함	희망하지 않음	합계
희망함	150	50	200
희망하지 않음	60	40	100
합계	210	90	300

이 고등학교 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 강아지를 기르는 것을 희망한 학생일 때, 이 학생이 새를 기르는 것도 희망한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

11. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t) = t^4 - 4t^3 + 6t^2$$

이다. $t = a$에서의 점 P의 가속도가 0일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12. 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & (x < k) \\ \dfrac{2}{x-1} & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 실수 k의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

13. 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=x(4x-1)(x+1)$$

이고 $f(x)$의 극댓값이 1일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

14. 모비율이 $\frac{4}{13}$인 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율을 $\hat{p}$이라 할 때, $\mathrm{E}(4\hat{p}+5)+\sigma(5\hat{p}+4)$의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

15. 1보다 큰 두 실수 a, b에 대해

$$\log_a 8 = \log_4 b, \quad \log_a b = \frac{8}{3}$$

가 성립할 때, a의 값은? [4점]

① $2^{\frac{1}{2}}$ ② $2^{\frac{3}{4}}$ ③ $2^{\frac{3}{2}}$ ④ $2^{\frac{7}{4}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{2}}$

16. 수열 $\{a_n\}$과 상수 b가 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2 a_n = 2n + b$$

를 만족시킨다. $a_1 = 12$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은? [4점]

① $2^{11} - 2^2$ ② $2^{11} - 2$ ③ $2^{12} - 2^2$
④ $2^{12} - 2$ ⑤ $2^{13} - 2^2$

17. 두 집합 $X : \{1, 2, 3, 4\}$와 $Y : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에 대하여 집합 X에서 Y로의 함수 f가

$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

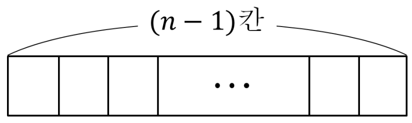
를 만족시킨다. 이러한 함수 중에서 한 개를 선택했을 때,

$f(1)+3 < f(2)+2 < f(3)+1 = f(4)$

일 확률은? [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{11}{35}$ ③ $\frac{8}{35}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{2}{35}$

18. 그림과 같이 2 이상의 자연수 n에 대해 가로 $(n-1)$칸, 세로 1칸으로 이루어진 도로망이 있다. 다음은 이 도로망에서 서로 다른 두 꼭짓점을 선택한 뒤 최단 경로로 잇는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, 두 꼭짓점은 서로 구별하지 않는다.)



주어진 도로망에서 서로 다른 두 꼭짓점을 선택하는 경우는 같은 세로선 위의 두 꼭짓점을 선택하는 경우, 같은 가로선 위의 두 꼭짓점을 선택하는 경우, 그 외의 경우로 나눌 수 있다.

(1) 선택한 두 꼭짓점이 같은 세로선 위에 있는 경우 :

한 세로선 위의 두 꼭짓점 사이의 최단 경로는 1개이고, 세로선은 총 n개이므로 경우의 수는 n이다.

(2) 선택한 두 꼭짓점이 같은 가로선 위에 있는 경우 :

한 가로선 위의 두 꼭짓점 사이의 최단 경로는 1개이고, 가로선은 총 2개이며, 한 가로선 위에는 꼭짓점이 n개 있으므로 경우의 수는 $2\times$ $\boxed{(가)}$ 이다.

(3) 선택한 두 꼭짓점이 i)과 ii)에 해당하지 않는 경우 :

가로로 k칸$(1 \le k \le n-1)$ 떨어져 있고 서로 다른 가로선 위에 존재하는 두 꼭짓점을 고르는 경우의 수는 $2(n-k)$이고, 이때 두 꼭짓점 사이의 최단 경로의 개수는 $\boxed{(나)}$ 이므로 경우의 수는

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2(n-k)\times \boxed{(나)}$$

이다.

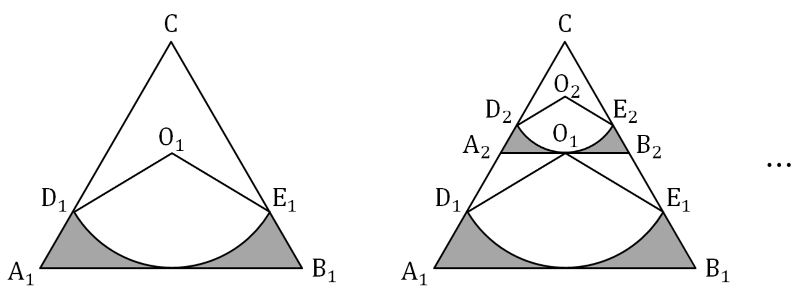
(1), (2), (3)에 의하여 전체 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$, $h(n)$이라 하자. $f(4)+g(5)+h(6)$의 값은? [4점]

① 132 ② 148 ③ 160 ④ 172 ⑤ 184

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C}$가 있다. 정삼각형 내부의 점 $\mathrm{O_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C}$ 위의 점 $\mathrm{D_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C}$ 위의 점 $\mathrm{E_1}$에 대하여 $\overline{\mathrm{D_1E_1}} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{A_1B_1}}$, $\angle \mathrm{D_1O_1E_1} = 120°$이고 호 $\mathrm{D_1E_1}$이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 접하도록 중심이 $\mathrm{O_1}$인 부채꼴 $\mathrm{O_1D_1E_1}$을 그린다. 세 선분 $\mathrm{A_1D_1}$, $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{B_1E_1}$과 호 $\mathrm{D_1E_1}$로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 $\mathrm{O_1}$을 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{A_1C}$, $\mathrm{B_1C}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 하자. 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 중심이 $\mathrm{O_2}$인 부채꼴 $\mathrm{O_2D_2E_2}$를 그리고 세 선분 $\mathrm{A_2D_2}$, $\mathrm{A_2B_2}$, $\mathrm{B_2E_2}$과 호 $\mathrm{D_2E_2}$로 둘러싸인 영역에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 …

① $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\pi}{3}$

20. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{\{f(x)\}^2-x^2}{xf(x)}=\frac{3}{2}$$

을 만족시킨다. $f(\alpha)=0$인 음수 α가 존재할 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 24 ② 34 ③ 44 ④ 54 ⑤ 64

21. 세 실수 a, b, t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<t) \\ x^3-3x+b & (x \geq t) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $b=t^3$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 극솟값을 가질 때, $t \leq 1$이다.

ㄷ. $\int_0^t f(x)dx=0$일 때, 가능한 모든 a의 값의 합은 -4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. ${}_4\mathrm{H}_3$의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

24. $(x-3)^6$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오. [3점]

25. 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X \le 4) = \mathrm{P}(X \ge 8) = \mathrm{P}(Z \ge 0.5)$$

일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오. [3점]

26. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 두 수 a, b가 $|a-3| > |b-7|$을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. [4점]

27. 모든 자연수 n에 대해 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k S_{k+1} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 전체집합 $U : \{x \mid x\text{는 } k \text{ 이하의 자연수}\}$의 두 부분집합 A, B에 대해

$$A \subset \{4, 5, 6, 7, 8\},\ B = \{x \mid x\text{는 } k \text{ 이하의 짝수}\}$$

이다. 집합 $B-A$의 모든 원소의 합이 24일 때, 집합 $A \cap B$의 모든 원소의 합은 a이다. 가능한 모든 a의 값의 합을 구하시오. (단, k는 8 이상의 자연수이다.) [4점]

29. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

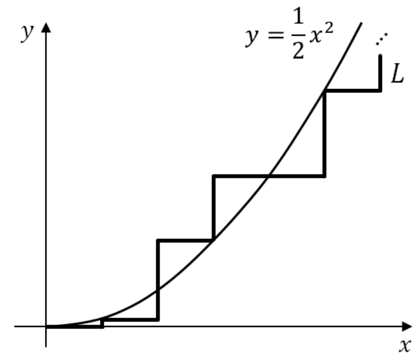
> (가) $\alpha<\beta<\gamma$인 어떤 세 실수 α, β, γ에 대해 $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$이다.
>
> (나) $f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<0,\ f'\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\right)>0$이다.
>
> (다) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 그래프가 접할 때, k로 가능한 값은 2, 4, 7이다.

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx+3f(\gamma)$의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에서 x축 또는 y축에 평행한 선분으로 연결된 경로 L이 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (ⅰ) A_0은 원점이고, 모든 자연수 n에 대해 점 A_n은 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 위의 점이다.
>
> (ⅱ) 모든 자연수 n에 대해 A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $4n$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

점 A_n의 x좌표의 값을 a_n이라 할 때, 경로 L과 x축, 직선 $x=a_n$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최댓값을 $f(n)$, 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{(a_n)^2}$의 값을 구하시오. [4점]



31. 최고차항의 계수가 양수인 m차함수 $f(x)$와 실수 t에 대해 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $g(t)$라고 하자.

집합

$$A : \left\{ \alpha \;\middle|\; \lim_{t \to \alpha+} g(t) < \lim_{t \to \alpha-} g(t) \right\}$$

에 대하여 $n(A)=10$일 때, 자연수 m의 최솟값을 구하시오.

[보너스 ① - 가형 같은]

32. 두 함수 $p(x)=\left|x^2-2x\right|$, $q(x)=-\left|x^2-1\right|+t\ \ (t \geq 1)$에 대하여 $y=p(x)$와 $y=q(x)$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라 할 때, 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의한다.

> 구간 $(-\infty, a_1], [a_1, a_2], \cdots, [a_n, \infty)$를 차례대로 1번째, 2번째, $\cdots$, $(n+1)$번째 구간이라고 할 때,
> 홀수 번째 구간에서는 $f(x)=p(x)$, 짝수 번째 구간에서는 $f(x)=q(x)$이다.

실수 t에 대하여 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} g\left(\frac{k}{2}\right)$의 값을 구하시오.

[보너스 ② - 즐거운 그림시간]

> * 확인 사항
> ○ 자신의 멘탈을 확인하시오.