우주설 논술분석

성균관대 편

by우주설

목차

2분할로 제작되었습니다.

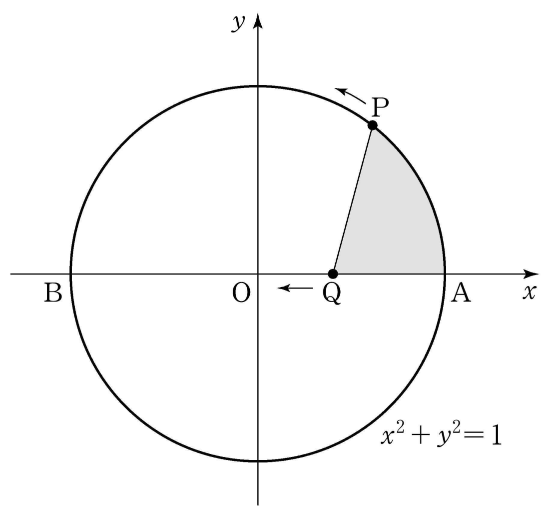
좌측페이지의 문제를 게시하였습니다.
우측의 비어있는 공간을 활용하여 풀이·필기하거나, 답안지를 작성 해주시면 됩니다.

1.논술은 수능/교육청 모의고사로부터

1번 서술란

1.그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점 A(1, 0)에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B(−1, 0)을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?

[4점][2008학년도 수능]



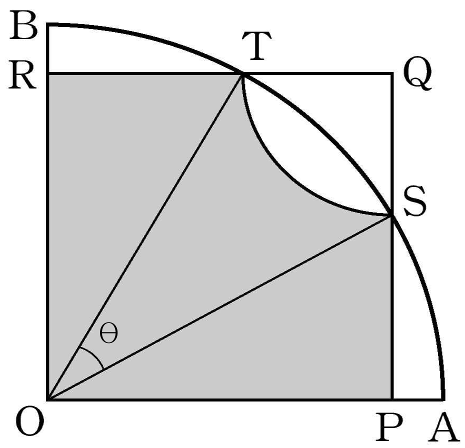
① $\frac{\pi}{4}-1$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}+1$

2번 서술란

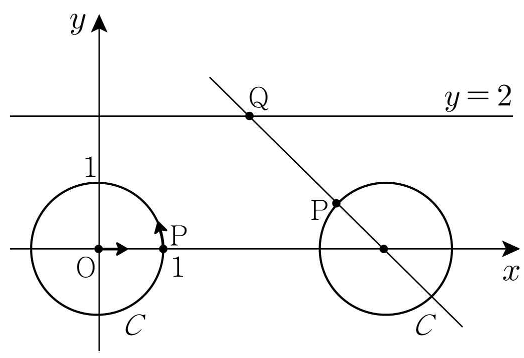
2.그림과 같이 중심각의 크기가 90°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB와 선분 OA 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 OP를 한 변으로 하는 정사각형 OPQR가 호 AB와 서로 다른 두 점 S, T에서 만날 때, 정사각형 OPQR에서 점 Q를 중심으로 하고 반지름이 QS인 부채꼴 SQT를 제외한 어두운 부분의 넓이를 D라 하자. $\angle SOT=\theta$라 할 때, D가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $10\pi\tan\theta$의 값을 구하시오.

[4점][2008년 9월]



3.좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 원 C위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 속력으로 움직인다. (나) 원 C는 x축의 양의 방향으로 매초 10의 속력으로 움직인다.



원 C는 중심이 원점에서, 점 P는 점 $(1,\ 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자. 출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$초가 되는 순간, 점 Q는 직선 $y=2$ 위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a의 값을 구하시오.

3번 서술란

4번 서술란

4.정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f'(a)=0$ 이면 $\tan a=\frac{1}{a}$ 이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$에 있다.

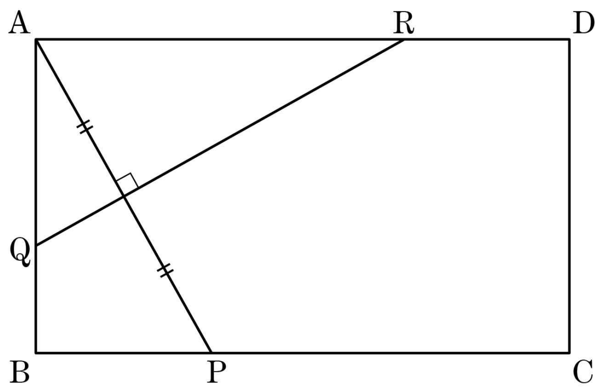
ㄷ. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른
실근의 개수는 2이다.

[4점][2012학년도 수능]

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5.그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=2\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BC 위의 점 P에 대하여 선분 AP의 수직이등분선이 두 직선 AB, AD와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. 선분 QR의 길이의 최솟값이 k일 때, $4k^2$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 점 B가 아니다.)

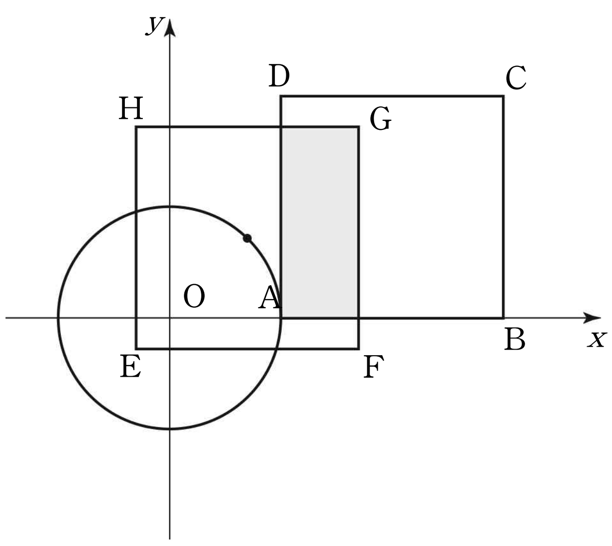
[4점][2013년 10월]



5번 서술란

6.그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 A(1, 0), B(3, 0), C(3, 2), D(1, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다.
한 변의 길이가 2인 정사각형 의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 수직이다.)

[4점][2014년 4월]



① $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

6번 서술란

7.함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[4점][2015학년도 수능]

7번 서술란

8.이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+1)} & (x\neq 0) \\ 8 & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1,\infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은?

[3점][2014학년도 수능]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

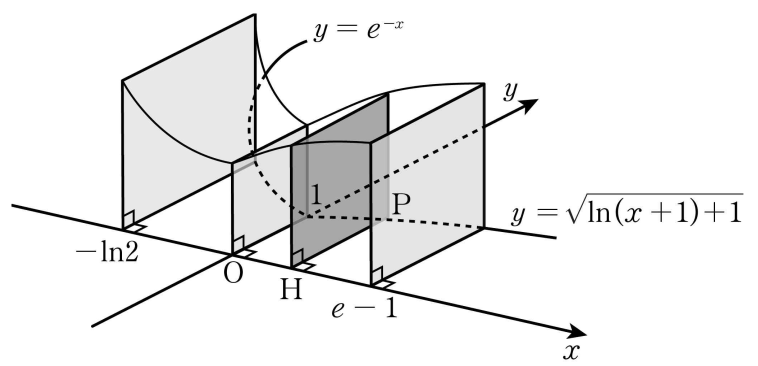
8번 서술란

9.그림과 같이 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & (x<0) \\ \sqrt{\ln(x+1)+1} & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 PH를 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 P의 x좌표가 $x=-\ln 2$에서 $x=e-1$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는?

[4점][2016년 3월]



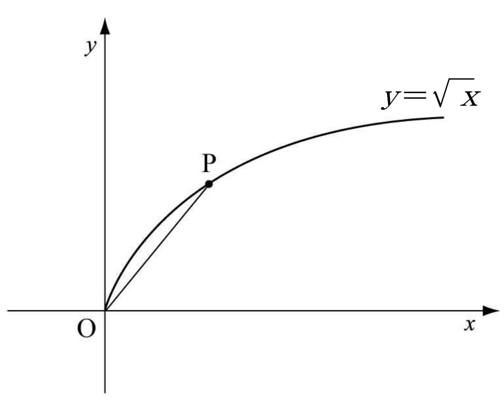
① $e-\frac{3}{2}$　　② $e+\frac{2}{3}$　　③ $2e-\frac{3}{2}$

④ $e+\frac{3}{2}$　　⑤ $2e-\frac{2}{3}$

9번 서술란

10.점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.

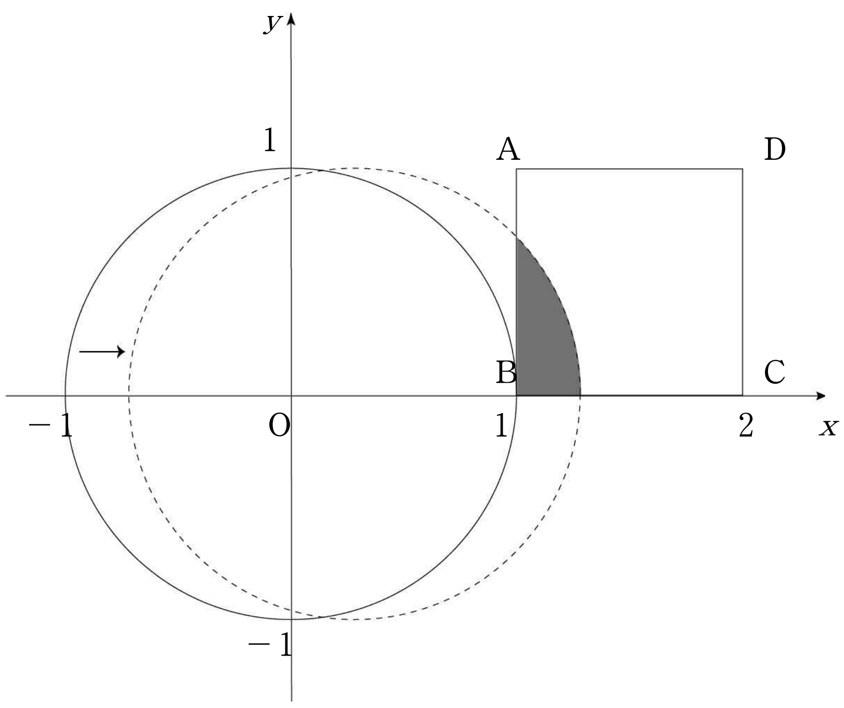
[4점][2008년 7월]



10번 서술란

11.좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 O와 네 점 A(1, 1), B(1, 0), C(2, 0), D(2, 1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD가 있다. 원 O의 중심이 x축을 따라 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. t초 후 원의 내부와 정사각형 ABCD의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 S라 하자. 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? (단, $0 \le t \le 1$)

[4점][2012년 7월]

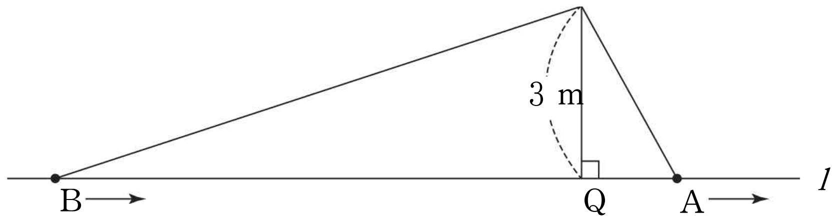


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

11번 서술란

12.그림과 같이 두 정점 P, Q 사이의 거리가 3 m이고, 점 Q를 지나고 선분 PQ에 수직인 직선을 l이라 하자. 점 A가 점 Q에서 출발하여 직선 l을 따라 초속 1 m의 일정한 속력으로 움직일 때, 직선 l 위의 점 B는 $\overline{AP} + \overline{PB} = 20$ (m)을 만족시키며 점 Q쪽으로 움직이고 있다. $\overline{AQ} = 4$ (m)가 되는 순간, 선분BQ의 길이 (m)의 시간(초)에 대한 변화율은?

[4점][2013년 4월]

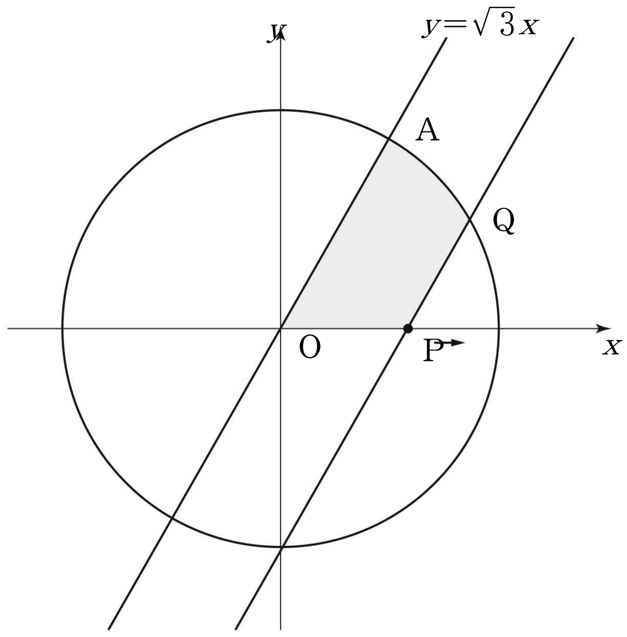


① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{4}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

12번 서술란

13.그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이 있다. 직선 $y=\sqrt{3}x$와 원이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 P는 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직인다. 점 P가 원점 O를 출발하여 t초가 되는 순간, 점 P를 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점을 Q라 하자.
세 선분 AO, OP, PQ와 호 QA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, 점 Q의 y좌표가 5가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오. (단, $0<t<5$)

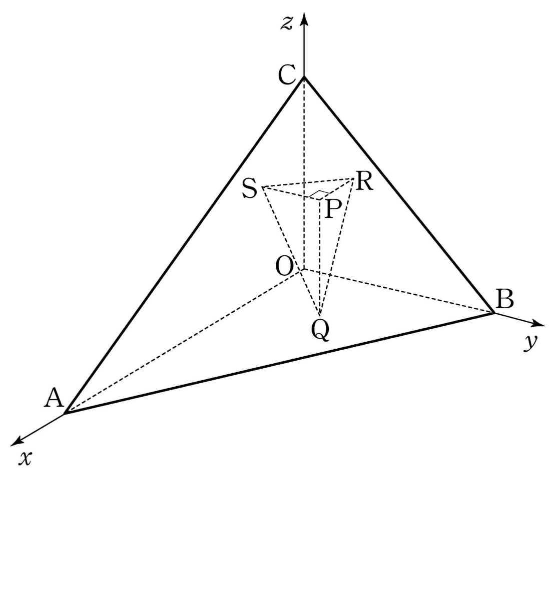
[4점][2015년 4월]



13번 서술란

14.좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 A(54, 0, 0), B(0, 27, 0), C(0, 0, 27)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 P(x, y, z)가 있다. 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 Q, yz평면 위로의 정사영을 R, zx평면 위로의 정사영을 S라 하자. $\overline{QR}=\overline{QS}$일 때, 사면체 QPRS의 부피의 최댓값을 구하시오.

[4점][2007학년도 수능]



14번 서술란

성균관대학교 패턴분석

2. 성균관대학교 논술 패턴 분석

분석표본: 2016학년도~2018학년도의 3개년

겉으로 드러나는 특징.

①문항의 난이도가 약간 상향되었습니다.

②단순 식보다는 그림을 통한 상황파악을 강조합니다.

③모의논술이 딱히 의미가 없음

④맞추라고 주는 노멀문제와 변별용 문제를 1개씩 제시

⑤증명식 문제를 지양한다.

노멀문제 란?

나오기로 약속되었거나, 누구나 조금만 준비하면 맞출 만한 쉬운 문제. 아래와 같습니다.

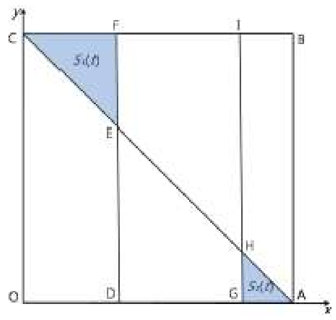
[수학 1] **2016학년도 기출**

다음 <제시문1> ~ <제시문4>를 읽고 [수학 1- i] ~ [수학 1 - ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
좌표평면의 네 점 O(0, 0), A(2, 0), B(2, 2), C(0, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 주어져 있다.

<제시문2>
정사각형 OABC의 한 변 OA위에 두 점 D(t, 0), G(t+1, 0)을 잡는다. (단, $0 \le t \le 1$)

<제시문3>
점 D에서 선분 OA에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB와 만나는 점을 각각 E, F라 한다. 점 G에서 선분 OA에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB와 만나는 점을 각각 H, I라 한다.



<제시문4>
삼각형 CEF의 넓이를 $S_1(t)$, 삼각형 AHG의 넓이를 $S_2(t)$라 한다.

[수학 1 - i] $S_1(t)$와 $S_2(t)$의 곱을 $g(t)$라 할 때, $g(t)$를 t에 관한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] $g(t)$의 최댓값과 그 때의 t를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1] **2018학년도 2교시**

다음 <제시문1>, <제시문2>를 읽고 [수학 1 - i], [수학 1 - ii]를 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
원 $C: x^2+y^2=4$와 두 점 P(0,2), Q(0,−1)이 주어져 있다. 점 Q를 지나는 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 각각 R, S라 한다.

<제시문2>
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

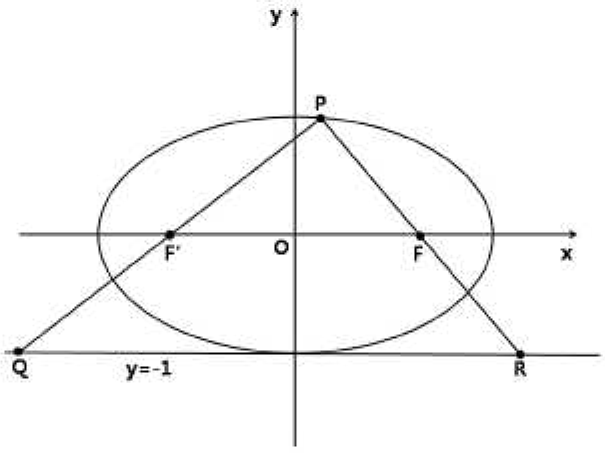
[수학 1 - i] 직선 L의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 세 변의 길이의 제곱의 합 $\overline{PR}^2+\overline{RS}^2+\overline{SP}^2$이 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] 직선 L의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 넓이가 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 2] **2017학년도 2교시**

다음 <제시문>을 읽고 [수학 2 - I] - [수학 2 - III]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문>
아래 그림과 같이 타원 $E: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 한 점 P(a, b) (단, $-1 \le a \le 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le 1$)를 잡고, 점 P와 타원 E의 두 초점 F′, F 를 연결한 직선이 직선 $y=-1$과 만나는 점을 각각 Q, R이라 한다.



[수학 2 - I] 선분 QR의 길이를 a에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

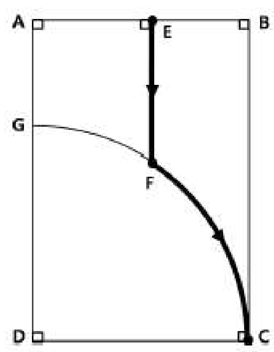
[수학 2 - II] 삼각형 PQR의 넓이를 b에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2 - III] 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1] **2018학년도 1교시**

다음 <제시문1> ~ <제시문3>을 읽고 [수학 1 - i] ~ [수학 1 - iii]을 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2$인 직사각형 ABCD 내부에, 점 D를 중심으로 하고 반지름이 2인 사분원 DGC가 놓여있다. 선분 AB 위의 한 점 E에서 선분 AD와 평행하게 그은 선분이 사분원 DGC의 호와 만나는 점을 F라 하자.



<제시문2>
성균이는 점 E에서 출발하여 오른쪽 그림과 같이 화살표 방향으로 선분 EF와 호 FC를 거쳐 점 C로 이동하고자 한다. 성균이는 선분 EF 위를 매초 1의 속력으로 움직이고 호 FC 위를 매초 2의 속력으로 이동한다. 성균이가 점 E를 출발하여 제시된 경로를 따라 점 C에 도달하는데 걸리는 시간을 T(초)라 한다.

<제시문3>
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

[수학 1 - i] 선분 AE의 길이가 $\sqrt{3}$일 때 <제시문 2>의 T의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] <제시문 2>의 T의 값이 최소가 되는 선분 AE의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - iii] <제시문 2>의 T의 값이 최소가 될 때 도형 AEFG와 도형 EBCF의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

공통점이 있습니다.

1. 상황을 제시한다.
2. 상황을 해석하여 함수를 도출한다.
3. 그 함수의 최댓값, 최솟값을 구한다. 의 구조

변별용 문제는 소재가 워낙 다양해서 예측이 매우 어렵

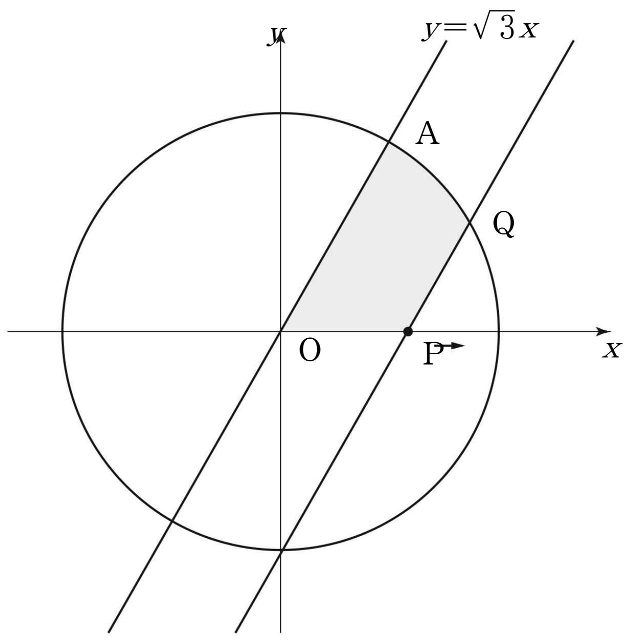
그렇다면 성균관대 논술을 준비하는 방법은?

1. 노멀문제를 빨리 풀어내는 훈련을 한다.
2. 변별용 문제를 맞추기 위해 다양한 소재의 논술을 접해 보고 학습한다.

노멀문제 예시

그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이 있다. 직선 $y=\sqrt{3}x$와 원이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 P는 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직인다. 점 P가 원점 O를 출발하여 t초가 되는 순간, 점 P를 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점을 Q라 하자.
세 선분 AO, OP, PQ와 호 QA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, 점 Q의 y좌표가 5가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오. (단, $0<t<5$)

[4점][2015년 4월]



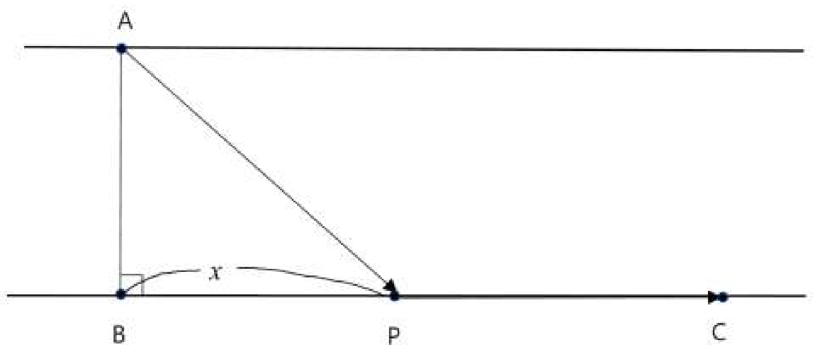
1. 함수 $S(t)$를 도출해본다.
2. 미분을 통해 $S(t)$의 최대, 최소도 구해본다.

3. 성균관대학교 노멀문항 대비

논술시행 대학들의 기출문제에서 문제 상황을 통해 식을 추론하는 문제들, 그것을 미분하는 문항들을 모았습니다.

[2018학년도 동국대학교 논술 기출문제]

[문제] 아래 그림의 두 평행선 사이는 배가 지나갈 만큼 충분히 깊은 물로 채워져 있고 물의 움직임은 없다고 가정하자. 선분 AB 는 평행선에 수직이고 길이는 a (km)이다. 두 지점 B, C의 거리는 b(km)이다. 그림과 같이 철수는 우선 A에서 배를 타고 v(km/h)의 속도로 P까지 강을 건넌 후에 1 (km/h)의 속도로 C까지 걸어가려고 한다. B, P 사이의 거리를 x (km)라고 하면 x는 $0 \le x \le b$를 만족한다. 배의 속도 v에 대해 철수가 C에 도착하는 시간이 최소가 되는 B와 P의 거리 $x(v)$를 구하는 과정을 기술하시오. (단, a, b, v는 모두 양수이고 답안지에 단위는생략할 수 있음.)



[2015학년도 인하대학교 논술 기출문제]

함수 $f(x)$ 의 $x = a$ 에서의 미분계수 $f\,'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

(※)실수 전체에서 정의된 함수$f(x)$가 $f(x)=(x^2-3)^2$ 를 만족한다.

(1) 점 $(t, f(t))$에서 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 점 P $(a,\ b)$ 를 지날 때, b 를 t 와 a 의식으로 나타내시오. (5점)

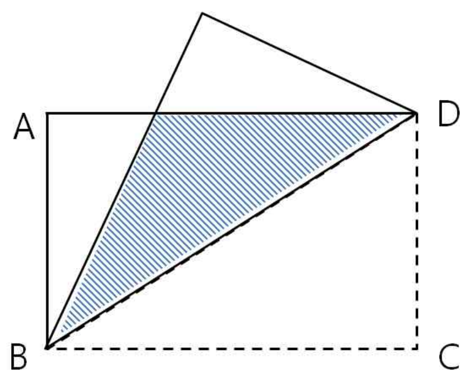
(2) 점 P $(1\ ,\ b)$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 개수를 b 의 값의 범위에 따라 구하시오. (10점)

(3) $2 \le a \le 3$ 일 때, 점 P $(a\ ,\ b\ )$ 를 지나고 $f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선이 4개 존재하도록 하는 P $(a\ ,\ b\ )$ 의 집합을 S 라 하자. S 의 넓이를 구하시오. (10점)

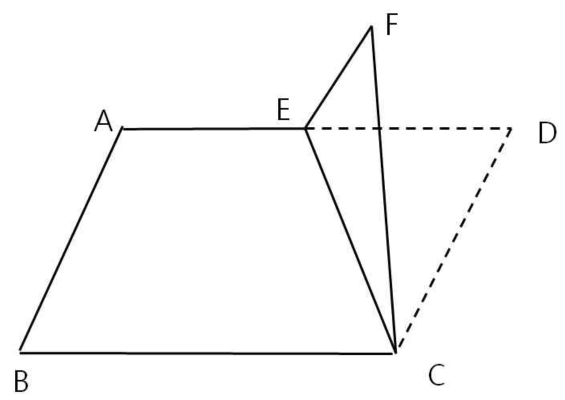
[2018학년도 건국대학교 논술 기출문제]

(가) 어떤 도형을 직선에 대하여 대칭이동한 도형은 원래의 것과 모양과 크기가 같다. 즉 합동이다.

(나) 평면에 직사각형 $ABCD$ 모양의 종이가 있다. [그림 1]은 이 직사각형 모양의 종이를 대각선을 따라 접은 것을 나타낸 것이다. [그림 2]는 선분 AD위의 점 E를 선택하여 직사각형 $ABCD$를 선분 CE를 따라 접었다 편 것을 나타낸 것이다. F는 꼭짓점 D가 이동한 점으로 평면 CEF는 평면 $ABCD$와 수직이다.



[그림 1]



[그림 2]

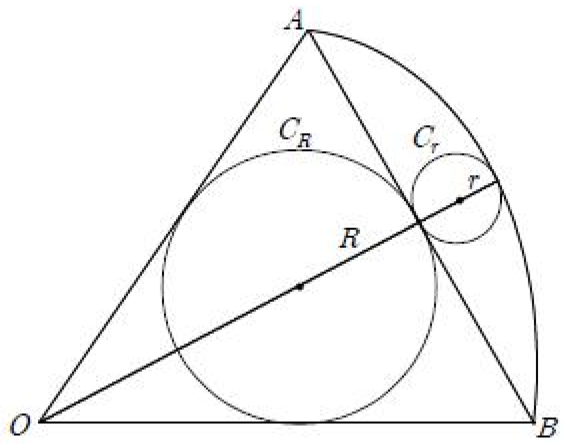
[문제 1-1] [그림 1]에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라고 할 때, 빗금으로 표시된 부분의 넓이를 a와 b에 관한 식으로 표현하고 풀이과정을 쓰시오.

[문제 1-2] [그림 2]에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$이라고 하자. 사각형 $ABCE$가 밑면이고, F가 꼭짓점인 사각뿔 $F-ABCE$의 부피의 최댓값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.

[2016학년도 인하대학교 논술 기출문제]

[제시문]

직각삼각형에 대한 피타고라스 정리는 삼각함수로 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 로 나타낼 수 있다.



반지름의 길이가 1 이고 중심이 O 인 부채꼴 AOB 에 대하여, 아래의 그림과 같이 내접하는 두 원 C_R, C_r 의 반지름의 길이를 각각 R , r 이라 하자.

(1-1) $\angle$AOB $= \frac{\pi}{2}$ 일 때, R 과 r 의 값을 구하시오. (10점)

(1-2) $\angle$AOB$=\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ 일 때, 극한 $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r}{R^2}$ 의 값을 구하시오. (15점)

[2016학년도 인하대학교 모의논술 기출문제]

[문제 3] (25점) 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

미분 가능한 함수 $f(x)$가 역함수 $g(x)$를 가질 때, $f(g(x))=x$의 양변을 x에 대해 미분하면, 합성함수의 미분법에 의해

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

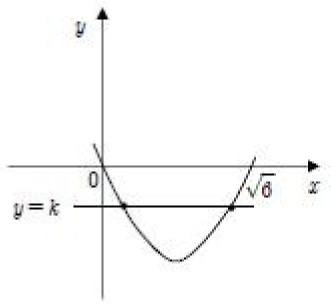
이 된다. 실제로 $f'(g(x)) \neq 0$일 때, $g(x)$ 는 미분 가능하며, 위 등식으로부터

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

임을 알 수 있다.

(3-1) 곡선 $y=x^3-6x$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 k 의 값의 범위를 구하시오. (10점)

(3-2) 곡선 $y=x^3-6x$ 의 $0 < x < \sqrt{6}$ 인 부분과 직선 $y=k$ 가 아래 그림과 같이 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 하자. 이때, $f'(-5)$ 의 값을 구하시오. (15점)



[2015학년도 인하대학교 수학 과학우수자 기출문제]

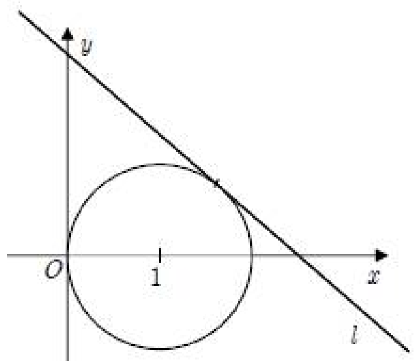
[제시문]

(가) 한 점 P 와 직선 l 사이의 거리는 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 길이를 말한다. 점 $P(x_1, y_1)$과 점 P 를 지나지 않는 직선 l : $ax+by+c$ =0 사이의 거리는 $\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 으로 주어진다.

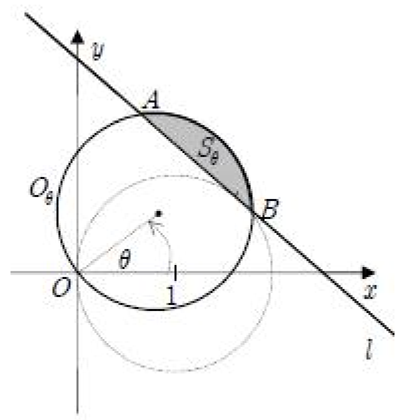
(나) 삼각함수의 미분법에서 기본이 되는 삼각함수의 극한 정리는 $\lim_{xrarrow0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 이다. 이 정리를 이용하면 $\lim_{xrarrow0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$을 얻는다.

(※) [그림 1]과 같이 기울기가 m (m < 0)인 직선 l 이 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 제1 사분면에서 접한다.

이 원을 [그림 2]와 같이 원점을 중심으로 θ 만큼 회전한 원을 O_θ 라 하자. 직선 l 이 원 O_θ 와 두 점에서 만날 때 만나는 점을 A, B 라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

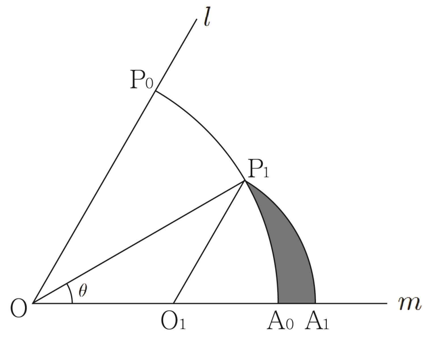
(1) [그림 1]에서 직선 l 의 y 절편을 m의 식으로 나타내시오. (5점)

(1-2) [그림 2]와 같이 선분 AB 와 호 $\widehat{AB}$ 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_θ 라 하자. 각 θ 가 변함에 따라 S_θ 가 최대가 되는 θ 의 값을 α 라 할 때, $\tan\alpha$ 의 값을 m의 식으로 나타내시오. (10점)

(1-3) [그림 2]에서 선분 AB 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \dfrac{\{f(\theta)\}^2}{\theta}$ 을 구하시오. (15점)

[2018학년도 경희대학교 자연 1 논술 기출문제]

<그림 1>에서 점 O에서 만나는 두 직선 l과 m이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 점 $\mathrm{P_0}$, $\mathrm{A_0}$는 각각 O로부터의 거리가 1인 직선 l, m 위의 점이다. 그러면 부채꼴 $\mathrm{OA_0P_0}$는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 부채꼴의 호 $\mathrm{A_0P_0}$ 위의 한 점 $\mathrm{P_1}$을 지나고 l과 평행한 직선이 m과 만나는 점을 $\mathrm{O_1}$이라 하고 각 $\mathrm{A_0OP_1}$의 크기를 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$라 하자. 그리고 중심이 $\mathrm{O_1}$이고 반지름의 길이가 선분 $\mathrm{O_1P_1}$의 길이와 같은 원이 m과 만나는 두 점 중 O로부터 거리가 더 먼 점을 $\mathrm{A_1}$이라 하자.

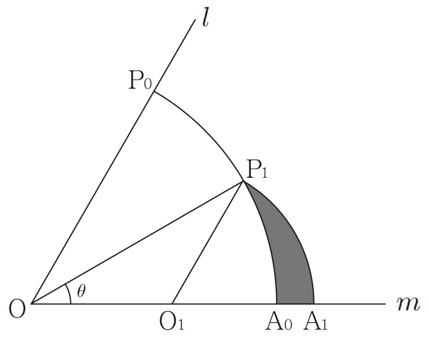


<그림 1>

[논제 I-1]

(1) 선분 $\mathrm{OA_1}$의 길이를 θ의 함수 $f(\theta)$로 나타내고, 그 과정을 서술하시오. **(10점)**

(2) $f(\theta)$가 최댓값을 가질 때의 θ의 값을 α라 하자. α의 값을 구하고, 그 근거를 논술하시오. **(5점)**



<그림 1>

[논제 I-2] <그림 1>에서 두 호 A_0P_1, A_1P_1과 선분 A_0A_1에 의해 둘러싸인 도형의 넓이를 θ의 함수 $g(\theta)$로 나타내고, 그 과정을 서술하시오. **(10**점**)**

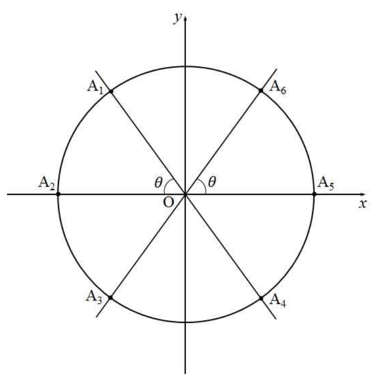
[논제 I-3] [논제 **I-2]**에서 구한 $g(\theta)$가 최댓값을 가질 때의 θ의 값을 β라 하자. $\tan\beta$를 구하고, 그 근거를 논술하시오. **(20**점**)**

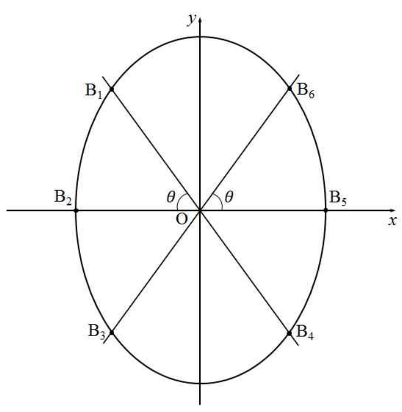
[논제 **I-4] [**논제 **I-1]**의 **(2)**에서 구한 α와 **[**논제 **I-3]**의 β의 크기를 비교하고, 그 근거를 논술하시오. **(15**점**)**

[2015학년도 경희대학교 논술 기출문제]

아래 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 타원 $\frac{x^2}{a^2}+a^2y^2=1$ $(0<a<1)$이 세 직선 $y=0$, $y=(\tan\theta)x$, $y=-(\tan\theta)x$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$와 만나는 교점들을 각각 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6와 점 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6라 하자.

- 원 위의 6개의 점 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 중에서 임의로 3개의 점을 선택하여 이 세 점이 꼭짓점이 되는 삼각형을 만들 수 있다. 여기서 세 점이 모두 이웃하는, 즉 세 점이 나란히 선택되는 경우(예를 들어 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$, 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_6$)는 제외한다. 이때 만들어지는 삼각형의 넓이를 확률변수 X라 하자.
- 타원 위의 6개의 점 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 중에서 임의로 선택한 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 확률변수 Y라 하자. 여기서는 임의로 세 점을 선택할 때 제외되는 경우가 없다.





[논제 I-1] $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표와 X의 평균을 구하고 그 방법을 서술하시오. **(9점)**

[논제 I-2] 임의의 각 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여, 확률변수 X의 평균을 θ의 식으로 나타내고 그 과정을 서술하시오. **(15점)**

[논제 I-3] **[논제 I-2]**에서 구한 X의 평균이 최대가 되는 각 θ를 구하고 그 근거를 논술하시오. **(15점)**

[논제 I-4] 점 B_6의 좌표를 (p, q)라 할 때, 확률변수 Y의 평균을 a, p, q의 식으로 나타내고, 이 평균이 최대가 되는 점 B_6의 좌표를 a의 식으로 표현하시오. 그리고 그 근거를 논술하시오. **(21점)**

[2018학년도 한양대학교 오전 논술 기출문제]

1. 매개변수 t로 나타낸 타원 $\begin{cases} x = \mathrm{a}\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(a, b > 0)$ 이 주어져 있다. 타원 위의 한 점 $(\mathrm{a}\cos t, b\sin t)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = -b, x = -a$와 만나는 점을 각각 A', B'이라 하자. 선분의 길이의 비 $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$을 t에 대한 식으로 나타내시오.

2. 장축과 단축의 길이가 각각 $2a$, $2b$인 타원 C가 있다. 타원 C를 포함하는 직각삼각형 중에서, 세 변이 타원과 각각 한 점에서 접하고, 두 변이 각각 장축과 단축에 평행한 직각삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.

3. 빗변이 아닌 두 변의 길이가 각각 p, q인 직각삼각형 $\triangle$가 있다. 직각삼각형 $\triangle$에 포함되는 타원 중에서, $\triangle$의 세 변과 각각 한 점에서 접하고, 장축 및 단축이 각각 길이 p, q인변에 평행한 타원을 생각하자.

이러한 타원의 장축과 단축의 길이의 곱의 최댓값을 구하시오.

4. 성균관대학교 노멀문항 정복

[2016학년도 성균관대학교 논술 1교시 기출문제]

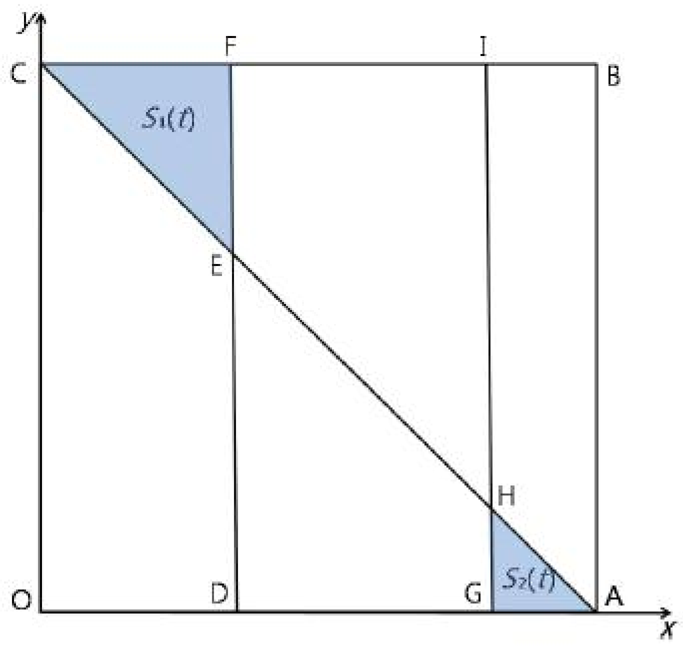
다음 제시문을 읽고 문항별로 풀이와 함께 답하시오.

<제시문1>
좌표평면의 네 점 O (0, 0), A(2, 0), B (2, 2), C (0, 2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 주어져 있다.

<제시문2>
정사각형 OABC의 한 변 OA위에 두 점 D(t, 0), G(t+1, 0)을 잡는다. (단, $0 \le t \le 1$)

<제시문3>
점 D에서 선분 OA에 수직인 직선이 선분 CA 및 선분 CB와 만나는 점을 각각 E, F라 한다. 점 G에서 선분 OA에 수직인 직선이 선분 CA, 선분 CB와 만나는 점을 각각 H, I라 한다.

<제시문4>
$\triangle$CEF의 넓이를 $S_1(t)$, $\triangle$AHG의 넓이를 $S_2(t)$라 한다

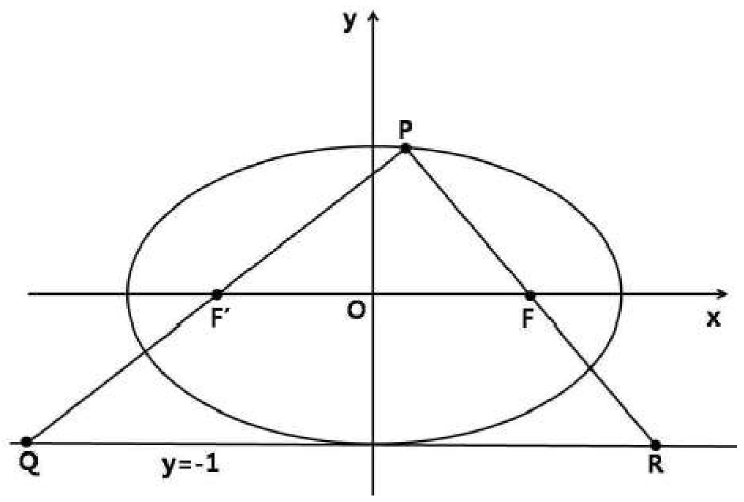


[수학 1 - ⅰ] $S_1(t)$와 $S_2(t)$의 곱을 g (t 라 할 때, g (t)를 t에 관한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ⅱ] $g(t)$의 최댓값과 그 때의 t를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2017학년도 성균관대학교 논술 2교시 기출문제]

아래 그림과 같이 타원 $E: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 한 점 P$(a,\ b)$ (단, $-1 \le a \le 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le b \le 1$)를 잡고, 점 P와 타원 E의 두 초점 F′, F 를 연결한 직선이 직선 $y=-1$과 만나는 점을 각각 Q, R이라 한다.



[수학 2－i] 선분 QR의 길이를 a에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

[수학 2－ii] 삼각형 PQR의 넓이를 b에 대한 식으로 나타내고, 그 이유를 논하시오.

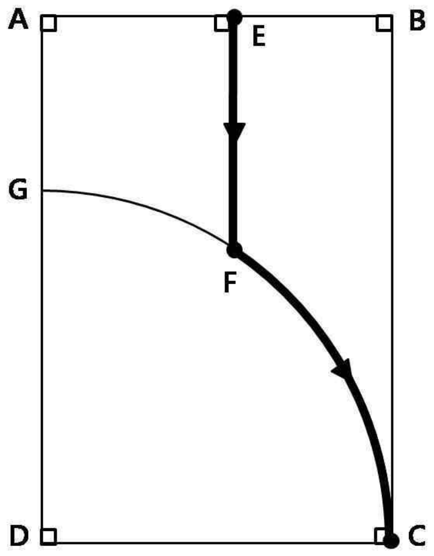
[수학 2－iii] 삼각형 PQR의 넓이의 최솟값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2018학년도 성균관대학교 논술 1교시 기출문제]

<제시문1>
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DC}=2$인 직사각형 ABCD 내부에, 점 D를 중심으로 하고 반지름이 2인 사분원 DGC가 놓여있다. 선분 AB 위의 한 점 E에서 선분 AD와 평행하게 그은 선분이 사분원 DGC의 호와 만나는 점을 F라 하자.

<제시문2>
성균이는 점 E에서 출발하여 오른쪽 그림과 같이 화살표 방향으로 선분 EF와 호 FC를 거쳐 점 C로 이동하고자 한다. 성균이는 선분 EF 위를 매초 1의 속력으로 움직이고 호 FC 위를 매초 2의 속력으로 이동한다. 성균이가 점 E를 출발, 제시된 경로를 따라 점 C에 도달하는데 걸리는 시간을 T (초)라 한다.

<제시문3>
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.



[수학 1 - i] 선분 AE의 길이가 $\sqrt{3}$ 일 때 <제시문 2>의 T 의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] <제시문 2>의 T 의 값이 최소가 되는 선분 AE의 길이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - iii] <제시문 2>의 T 의 값이 최소가 될 때 도형 AEFG와 도형 EBCF의 넓이를 구하고 그 이유를 논하시오.

[2018학년도 성균관대학교 논술 2교시 기출문제]

<제시문1>
원 $C: x^2+y^2=4$와 두 점 $P(0,2)$, $Q(0,-1)$이 주어져 있다. 점 Q를 지나는 직선 L이 원 C와 만나는 두 점을 각각 R, S라 한다.

<제시문2>
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 가진다.

[1] 직선 L 의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 세 변의 길이의 제곱의 합 $\overline{PR}^2+\overline{RS}^2+\overline{SP}^2$ 이 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[2] 직선 L 의 기울기를 실수 m $(-2 \le m \le 2)$이라고 할 때, <제시문1>의 삼각형 PRS의 넓이가 최대가 되는 m의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

5. 성균관대학교 변별문항 대비 (타 학교 기출문제 6제)

[2018학년도 한양대학교 오후1 논술 기출문제]

<가> $n \geq 3$ 인 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자. $f(x) = (1 - x^n)^{\frac{1}{n}} \quad (0 \leq x \leq 1)$

<나> 곡선 $y = f(x)$ 위의 한 점 $(x_0, f(x_0))$ $(0 < x_0 < 1)$에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 P , y 축과 만나는 점을 Q 라 하자.

<다> 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{nrarrow\infty} a_n = \lim\limits_{nrarrow\infty} b_n = L$ 이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \leq b_n \leq c_n$이면, $\lim\limits_{nrarrow\infty} c_n = L$ 이다.

1. 곡선 $y = f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$위의 점 중에서 원점까지의 거리가 최대인 점을 A라 하자. 점 A의 좌표를 구하시오.

2. 선분 PQ 의 길이의 최솟값을 구하시오.

3. 자연수 n에 대하여 $d_n = \int_0^1 (1 - x^n)^{\frac{1}{n}} dx$라 할 때, 극한값 $\lim\limits_{nrarrow\infty} d_n$을 구하시오.

[2016학년도 중앙대학교 자연계열 1 논술 기출문제]

(가) 방정식의 실근의 개수는 함수의 그래프의 개형을 그려 x 축과의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

(나) 탄젠트 함수의 덧셈정리는 다음과 같으며

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2},$$

이 덧셈정리를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\tan3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

[1] 임의의 실수 a에 대하여 삼차방정식 $x^3-3ax^2-3x+a=0$ 이 서로 다른 세 실근 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$을 갖는 것을 논리적으로 설명하시오. [10점]

[2] 1보다 큰 임의의 실수 a에 대하여 삼차방정식 $x^3-3ax^2-3x+a=0$ 의 서로 다른 세 실근 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$이 다음 부등식을 만족함을 논리적으로 설명하시오.

$$-1<x_1<0<x_2<1$$

또한, 극한값 $(a)\lim_{a\to\infty}x_1$과 $(b)\lim_{a\to\infty}x_2$ 를 논리적으로 구하시오. [20점]

[2018학년도 중앙대학교 자연계열 1 논술 기출문제]

(가) 좌표평면 위의 두 직선 $y-mx+n$, $y=m'x+n'$ 이 서로 수직이면 $mm'=1$이다.

(나) 세 점 A, B, C를 잡을 때, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 이다.

(다) $x=f(t)$, $y=g(t)$가 t에 대하여 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$이다.

[1] 좌표평면 위의 점 $P(1,2^n)$에서 직선 $y=2^{n+1}x$에 내린 수선의 발을 Q_n이라하자. 점 Q_n에서 직선 $y=2^n x$에 내린 수선의 발을 $R_n=(a_n,b_n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{74}{5}+K\right)$ 이다. K의 값을 구하시오. [10점]

[2] 좌표평면 위의 원점을 중심으로 하고 반지름이 1 인 원이 있다. 이 원이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+1$과 접하면서 이동한다. 이때, 원의 중심의 자취를 곡선 $y=f(x)$라고 하자. 기울기가 1이면서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식을 구하시오. [15점]

[2019학년도 경희대학교 오프라인 모의논술 기출문제]

[가]원뿔은 직각삼각형을 빗변이 아닌 한 변을 중심으로 회전하여 얻는 도형이다. 원뿔의 전개도는 밑면인 원과 옆면인 부채꼴로 이루어지므로 밑면의 반지름이 r이고 모선의 길이가 l인 원뿔의 겉넓이 S는 S = $\pi r2$ + πrl로 나타낼 수 있다. 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형을 다면체라고 하고 특히 밑면이 다각형이고 옆면이 모두 삼각형인 다면체를 각뿔이라고 한다. 각뿔의 겉넓이도 전개도를 이용하여 밑면 다각형의 넓이와 옆면을 이루는 삼각형들의 넓이의 합으로 구할 수 있다. 일반적으로 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 원뿔과 각뿔의 부피 V는 $V=\frac{1}{3}Sh$

[나]함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여 $f(x)\leq f(a)$이면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 하고 $f(a)$를 극댓값이라고 한다. 유사하게, 함수 $f(x)$가 $x=b$를 포함하는 어떤 열린 구간의 모든 x에 대하여 $f(x)\geq f(b)$이면, $f(x)$는 $x=b$에서 극소라고 하고 $f(b)$를 극솟값이라고 한다. 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 하며, $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 보일 수 있다. 특히 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호 변화를 관찰하면 $f(a)$가 극댓값인지 극솟값인지를 판별할 수 있다. 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 항상 최댓값과 최솟값을 가진다. 특히 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 미분 가능한 경우, 최댓값과 최솟값은 $f(x)$의 구간 끝점에서의 값과 극값의 크기를 비교하여 구할 수 있다.

(1) 밑면의 반지름이 r이고 높이가 h인 원뿔 A가 있다. 원뿔 A를 포함하는 원뿔 B는 그 밑면의 중심이 A의 꼭짓점과 일치하고, 두 원뿔의 밑면은 서로 평행하다. 이러한 원뿔 B중에서 부피가 가장 작은 것의 밑면 반지름 u, 높이 v, 그리고 부피 V 를 구하시오. (10점)

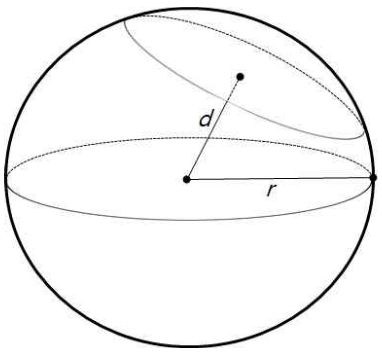
(2) 반지름 r의 구를 원뿔 C가 포함하고 있다. 이러한 원뿔 C 중에서 겉넓이가 가장 작은 것의 밑면 반지름 u, 높이 v, 그리고 겉넓이 S를 구하시오. (15점)

(3) (2)에서 구한 원뿔 C와 닮은 원뿔 D는 C의 내부에 있고 구의 내부와 겹치지 않으면서 그 밑면이 C의 밑면에 포함된다. 이러한 원뿔 D중에서 가장 큰 것의 부피 V 를 구하시오. (15점)

(4) 반지름 r의 구를 밑면이 정n각형인 (n ≥ 3) 각뿔 E가 포함하고 있다. 이러한 각뿔 중에서 겉넓이가 가장 작은 것에 대하여 그 정n각형 한 변의 길이 a, 각뿔의 높이 v, 그리고 겉넓이 S를 구하시오. (단, 각뿔의 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선의 발은 정n각형의 중심에 있다.) (20점)

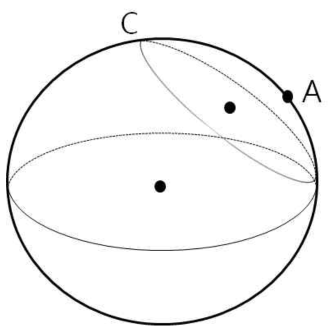
[2018학년도 건국대학교 논술 기출문제]
반지름의 길이가 r인 구의 중심과 구의 중심에서 한 평면에 내린 수선의 발 사이의 거리를 d라고 할 때, 구와 이 평면의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $d > r$이면 만나지 않는다.
(2) $d = r$이면 한 점에서 만난다 (접한다).
(3) $d < r$이면 만나서 원이 생긴다.



[그림 3]

[문제 2-1] 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$와 평면 $x + y + z = 3$이 만나서 생기는 원을 C라고 하자. 점 $A(2,2,1)$에서 C 위의 점까지의 거리의 최솟값을 구하고 풀이과정을 쓰시오.



[문제 2-2] 구 $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$와 평면 $mx - y = 0$이 만나서 원이 생길 때, 이 원의 중심을 P라 하자. m의 값이 변함에 따라 P가 움직인다. P가 그리는 곡선의 길이를 구하고 풀이과정을 쓰시오.

[2017학년도 인하대학교 모의논술 기출문제]

(가) 집합 X에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 역함수는 $f(x)$ 의 치역 Y에서 정의된 함수 $g(x)$ 로, X에 속한 임의의 x 에 대해서 $g(f(x))=x$를 만족하는 것이다. 함수 $f(x)$가 역함수를 갖는다면 $f(x)$ 는 일대일 함수이다.

(나) 함수 $f(x)$ 가 일대일 함수가 아닌 경우에도, 정의역의 어떤 부분집합 I에 국한하여 볼 때는 일대일인 경우가있다. 이때 함수 $f(x)$ 가 부분집합 I 에서만 정의된 것으로 보고 역함수 $g(x)$를 생각할 수 있는데, 이러한 함수 $g(x)$를 부분집합 I 에서 $f(x)$의 부분역함수라 부른다. 예를 들어, 함수 $f(x)=x^2$ 은 구간 $x\geq 0$ 에서 부분역함수 $g_1(x)=\sqrt{x}$와 구간 $x\leq 0$ 에서 부분역함수 $g_2(x)=-\sqrt{x}$ 를 가진다.

(다) 역함수의 미분법 : 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 역함수 $g(x)$ 를 갖는다고 하자. 한 점 $x=a$ 에서 $f\,'(a)\neq 0$ 일때, 함수 $g(x)$는 $x=b=f(a)$ 에서 미분가능하고 $g'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$이다.

(1) 실수 t가 부등식 $-16<t<16$을 만족할 때, 삼차방정식 $x^3-12x-t=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가짐을 보이시오. (7점)

(2) (1)에서와 같이 $-16<t<16$일 때, 삼차방정식 $x^3-12x-t=0$의 세 실근을 크기 순서대로 각각 $f_1(t)<f_2(t)<f_3(t)$라고 두면, t의 함수 $f1(t)$, $f2(t)$, $f3(t)$ 는 모두 미분 가능하다. 이때 $\dfrac{1}{f_1'(t)}+\dfrac{1}{f_2'(t)}+\dfrac{1}{f_3'(t)}$을 간단히 하시오. (10점)

(3) 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$는 우함수이고 미분 가능하며 $x>0$ 에서 $f'(x)>0$ 이고 또한 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 라고 한다. 구간 $x<0$ 과 $x>0$에서의 $f(x)$의 부분역함수를 각각 $g1(x)$, $g2\ (x)$ 라고 할 때, $a>f\ (0)$ 인 실수 a 에 대하여 $g_1(a)+g_2(a)$ 와 $g_1'(a)+g_2'(a)$의 값을 구하시오. (8점)

6. 성균관대학교 변별문항 정복

[2016학년도 성균관대학교 1교시 논술 기출문제]
<제시문1>
좌표평면에서 제1 사분면의 점들 전체의 집합을 H 라 한다.

<제시문2>
실수 a $(a>4)$가 주어져 있을 때, 좌표평면의 두 점 E(2, 0), E′(− 2, 0)으로부터의 거리의 합이 $2\sqrt{a}$로 일정한 점들 전체의 집합을 A 라 한다.

<제시문3>
<제시문2>에서 주어진 실수 $a(a>4)$에 대하여, 좌표평면의 두 점 F($\sqrt{a}$, 0), F ′($-\sqrt{a}$, 0)으로부터의 거리의 차가 4 로 일정한 점들 전체의 집합을 B 라 한다.

<제시문4>
원점 O(0, 0)으로부터의 거리가 $\sqrt{5}$로 일정한 점들 전체의 집합을 C 라 한다.

<제시문5>
유한개의 원소를 가지는 임의의 집합 D 에 대하여 n(D)는 집합 D 의 원소의 개수를 나타낸다.

[논제] $n(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{H})=1$이 되는 a의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2016학년도 성균관대학교 2교시 논술 기출문제]

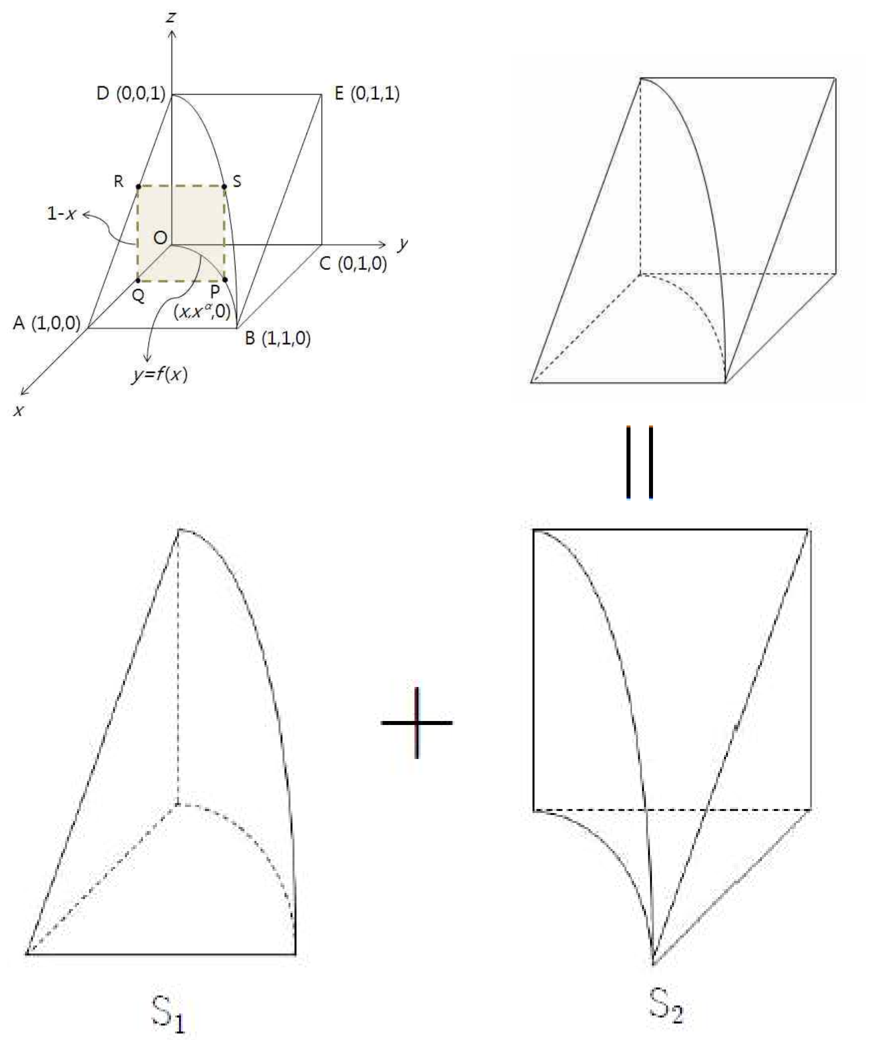
<제시문1>

그림과 같이 직각이등변삼각형 OAD를 밑면으로 하고, 높이가 1인 각기둥 OADCBE가 좌표공간 안에 옆으로 눕혀있다. 양의 실수 α에 대하여, x y 평면 위에 곡선 $y=f(x)=x^{\alpha}$ 위의 점 $P(x, x^{\alpha}, 0)$에서 x축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 선분 PQ를 밑변으로 하고 높이가 $1-x$ 인 직사각형 PQRS를 x축에 수직인 평면 위에 그린다.

점 P가 곡선 $y = f(x)$위를 원점에서 점 (1, 1, 0)까지 움직일 때, 이 직사각형이 만드는 입체도형을 S_1이라고 한다. 이 입체도형은 삼각기둥 OADCBE 안에 놓이게 되는데, 삼각기둥 내부이면서 S_1의 외부인 입체도형을 S_2라고 한다.

<제시문2>

양의 실수 β에 대하여 $\int x^{\beta}dx=\frac{1}{\beta+1}x^{\beta+1}+C$ (C는 상수)이다.



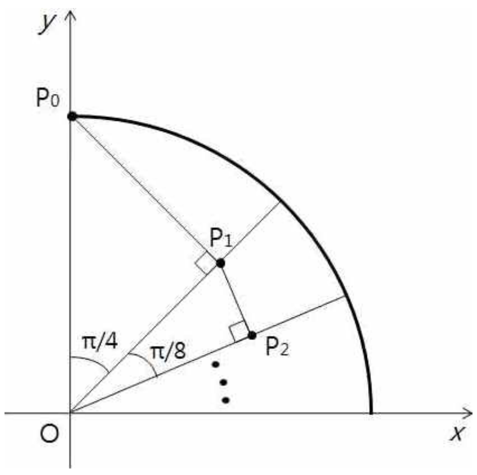
[수학 1 - i] <제시문1>에서 $\alpha = 1$일 때 S1 의 부피의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[수학 1 - ii] S1 과 S2 의 부피의 값이 같아지는 α 의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2016학년도 성균관대학교 2교시 논술 기출문제]

<제시문1>
그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름이 1인 원 위에 점 $P_0(0,1)$을 잡는다. 선분 OP_0을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점P_0 으로부터 내린 수선의 발을 점 P_1이라고 한다. 다시 선분 OP_1을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 회전시킨 선분 위에, 점 P_1에서 내린 수선의 발을 점 P_2라고 한다. 위의 과정을 n 번 반복하였을 때 생기는 점을 P_n이라고 한다.

즉, 선분OP_{n-1}1을 원점을 중심으로 하여 시계방향으로 $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 만큼 회전시킨 선분 위에, 점 P_{n-1}에서 내린 수선의 발을 점 P_n이라고 한다. 이때, 점 P_n의 좌표는 (x_n, y_n) 이라고 한다.



<제시문2>
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값은 1이다. (단, x의 단위는 라디안)

[1] 점 P_1의 좌표 (x_1, y_1)을구하고, 그 이유를 논하시오.

[2] $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2017학년도 성균관대학교 1교시 논술 기출문제]

<제시문1>

함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분 가능할 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

<제시문2>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

<제시문3>

실수 전체의 집합 R 에 대하여 함수 f : R→R 를

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0\text{일 때}) \\ -x^3 & (x < 0\text{일 때}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A$(-1,\ 1)$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 B라고 하자. 점 B에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 점 A를 지나지 않는 접선의 접점을 C라 하자.

[1] <제시문3>에서 점 **C**의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.

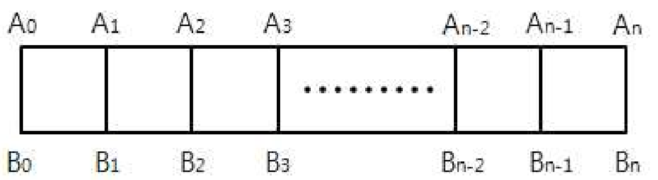
[2] <제시문3>에서 삼각형 **ABC**는 곡선 $y=f(x)$에 의해 두 부분으로 나누어진다. 이 중 점 **P**$(0,\ -1)$를 포함하는 부분의 넓이를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2017학년도 성균관대학교 1교시 논술 기출문제]

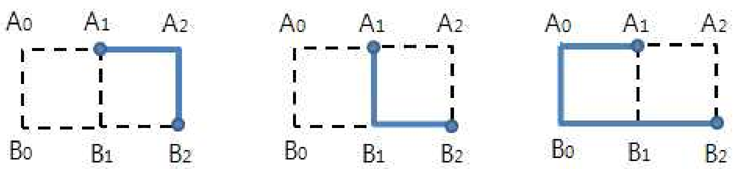
<제시문1>
첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1 \text{ 일 때}) \\ na & (r = 1 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

<제시문2>
자연수 n에 대하여 아래 그림과 같은 도로망이 있다.



단, 이 도로망 위를 이동할 때 한 번 지나간 지점은 다시 지날 수 없다. 예를 들어, n=2일 때, A_1지점으로부터 B_2지점까지 가는 방법은 다음과 같이 3가지이다.



여기서, 이동 거리는 최단 거리일 필요는 없으며, 출발 지점은 한 번 지나간 지점으로 간주한다.

[1] <제시문2>의 도로망에서 n=100일 때, A_0지점으로부터 B_{100} 지점까지 가는 방법은 몇 가지인지 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2] <제시문2>의 도로망에서 n = 100일 때, 도로망 위쪽의 A_0, A_1 , A_2 , ⋯, A_{100} 각각의 지점에서 출발하여 B100 지점까지 가는 방법의 수의 총합을 구하고, 그 이유를 논하시오. 예를 들어, n = 2일 때 A_0 , A_1 , A_2 지점 중 하나에서 출발하여 B_2 지점까지 가는 방법의 수의 총합은 10가지이다.

[2017학년도 성균관대학교 2교시 논술 기출문제]

<제시문1>

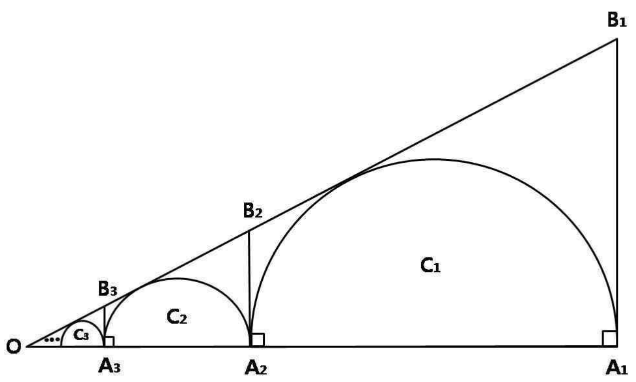
(1) 그림과 같이 $\overline{OA_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$ 인 직각삼각형 OA_1B_1이 주어져 있다.

(2) 중심이 선분 OA_1위에 위치하고 점 A_1을 지나며 선분 OB_1에 접하는 반원을 C_1이라 하고 그 반지름을 r_1이라한다.

(3) 반원 C_1과 선분 OA_1이 만나는 점 중 A_1이 아닌 점을 A_2라하고, A_2를 지나고 선분 OA_1에 수직인 직선이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 한다. 직각삼각형 OA_2B_2에서 중심이 선분 OA_2위에 위치하고 점 A_2를 지나며 선분 OB_2에 접하는 반원을 C_2라하고 그 반지름을 r_2라 한다.

(4) 반원 C_2와 선분 OA_2가 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 A_3이라 하고, A_3을 지나고 선분 OA_2에 수직인 직선이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 한다. 직각삼각형 OA_3B_3에서 중심이 선분 OA_3 위에 위치하고 점 A_3을 지나며 선분 OB_3에 접하는 반원을 C_3이라 하고 그 반지름을 r_3이라 한다.

(5) 이와 같은 방법으로 반원 $C_1, C_2, C_3, \cdots$을 계속하여 그려 나갈 때 n번째에 그려지는 반원 C_n의 넓이를 S_n이라고 한다.



<제시문2>

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \ (a \neq 0)$은 $-1 < r < 1$일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

[1] S_1의 값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

[2] 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합을 구하고, 그 이유를 구하시오.

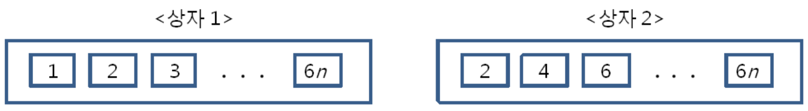
[2018학년도 성균관대학교 1교시 논술 기출문제]

<제시문1>
사건 A, B 에 대하여 사건 B가 일어났을 때, 사건 A가 일어날 확률을 사건 B 가 일어났을 때의 사건 A의 조건부 확률이라 하고, 기호로 $P(A|B)$와 같이 나타낸다. 사건 B 가 일어났을 때의 사건 A의 조건부확률은 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ (단, P (B)$\neq$0)을 만족한다.

<제시문2>
어떤 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A 의 여사건 이라 하고, 기호로 A^c와 같이 나타낸다. 두 사건 A와 B 에 대하여 P(B)=P(A$\cap$B)+P($A^c\cap$B)가 항상 성립한다.

<제시문3>
$g(n)$과 $h(n)$이 n에 대한 다항식일 때, $\dfrac{g(n)}{h(n)}$을 n에 대한 유리식 이라 한다. (단, $h(n)\neq 0$.)

<제시문4>
자연수 n에 대하여 그림과 같이 <상자1>에는 1부터 $6n$까지의 자연수가 적힌 $6n$장의 카드가 있고 <상자2>에는 2부터 $6n$까지의 짝수가 적힌 $3n$장의 카드가 있다.



[1] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[2] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[3] <제시문4>의 <상자1>에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수일 때, 이 두 수의 합이 짝수일 확률을 n에 대한 유리식으로 나타내고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[4] <제시문4>의 <상자1>과 <상자2> 중 임의로 한 상자를 골라 그 안에서 임의로 뽑은 두 카드에 적힌 수를 곱했더니 6의 배수가 되었다. 이 때 카드를 뽑은 상자가 <상자1>일 확률을 $f(n)$이라 했을 때 $\lim_{n\to\infty} f(n)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 뽑는 순서는 고려하지 않는다.)

[2018학년도 성균관대학교 2교시 논술 기출문제]

<제시문1>
함수 $g(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x) \le g(a)$를 만족하면 함수 $g(x)$는 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다고 한다.

<제시문2>
함수 $g(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $g(x) \ge g(a)$를 만족하면 함수 $g(x)$는 $x=a$ 에서 극솟값을 가진다고 한다.

<제시문3>
$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$은 $x_0 = 0, x_{2018} = 100$과 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2018}$ 을 만족하는 실수이다. 닫힌 구간 $[0,\ 100]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 다음을 만족한다.

(1) $f(0)=\sqrt{2}$, $f(100)=\sqrt{3}$

(2) $f(x)$는 $x = x_l$ $(l = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots, 2017)$에서 극댓값을 가지고 $x = x_m$ $(m = 2, 4, 6, \cdots, 2016)$에서 극솟값을 가진다.

(3) 2018 이하의 임의의 자연수 k에 대하여 열린 구간 (x_{k-1}, x_k) 에서 $f'(x)$는 연속이며 $f'(x)=2$ 또는 $f'(x)=-3$ 이다.

[1] <제시문3>에서 추가적으로 $x_1 = 1$, $x_{2017} = 99$를 만족한다고 할 때 $f(x_1)$과 $f(x_{2017})$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[2] <제시문3>에서 추가적으로 $x_{1008} = 49$, $x_{1010} = 51$, $f(x_{1008}) = \sqrt{5}$, $f(x_{1010}) = \sqrt{7}$ 을 만족한다고 할 때 x_{1009}와 $f(x_{1009})$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[3] <제시문3>에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $\sum_{n=0}^{2018} (-1)^n f(x_n)$의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

7. 성균관대 적중 예상 자작 문제 (일부 공개)

우주설 자작 논술문항

2017년 우주설 자체논술 2회 2번 문항 ★★★★

한 변의 길이가 x인 정육면체의 내부에 반지름의 길이가 1인 구를 채워 넣으려 한다.

함수 $f(x)$를 한 변의 길이가 x인 정육면체에 최대로 넣을 수 있는 반지름의 길이가 1인 구의 개수로 정의할 때, 물음에 답하시오.

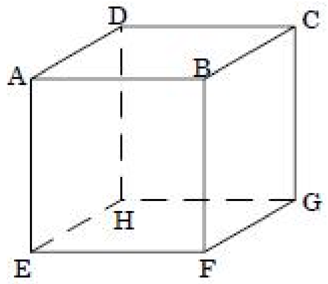
예를 들어 $f(1)=0$이고, $x=2$부터는 1개의 구를 넣을 수 있으므로, $f(2)=1$이다.

1. $f(x)=2$를 만족시키는 x의 최솟값을 구하시오.

2. $f(x)=4$를 만족시키는 x의 최솟값을 구하시오.

3. $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=m(x-3)+1$이 만나는 점의 개수가 3개가 되기 위한 m값의 범위를 구하시오.
(단, $2<x<4$)

2018년 우주설 자체논술 2회 1번 문항 ★★★



(가) 위 그림과 같이 공간좌표 상에 한 변의 길이가 2인 정육면체가 있다.
$F(0,0,0)$, $E(-2,0,0)$, , $G(0,-2,0)$ $B(0,0,2)$ 일때,
평면 α: $x-2z=t$ 에 의해 잘린 정육면체 단면의 넓이를 $f(t)$라 정의하자

(나) 함수$f(t)$는 닫힌구간 $[-6,0]$에서 정의된다.

(다) 일반적으로 함수 $f(x)$의 최대, 최솟값은 $f(x)$의 식을 미분하여 알아낼 수 있으며, $[a,b]$에서 $f(x)$가 연속이라면, $[a,b]$에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

1. $f(-2)$의 값을 구하시오.

2. 제시문 (다)를 참고하여, 함수 $f(t)$의 최댓값을 구하시오.

3. $\int_{-6}^{0} tf(t)dt$의 값을 구하시오.

수고하셨습니다!

성균관대학교 시험은 2018년 11월 18일입니다.
다들 좋은결과 있길 바랍니다.

by 포만한 수학연구소 우주설